



Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
Instituto de Ingeniería y Tecnología



# CULCYT. CULTURA CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

Revista de investigación en ingeniería  
e innovación tecnológica

ISSN 2007-0411

Volumen 19 | Número 2  
Mayo-Agosto 2022

Incluye la edición especial "La simbiosis en el puente  
cognitivo entre la física y las matemáticas"

DOI: 10.20983/culcyt.2022.2



#### Directorio Institucional

**Mtro. Juan I. Camargo Nassar**  
RECTOR

**Dr. Daniel Constandse Cortez**  
SECRETARIO GENERAL

**Dr. Juan F. Hernández Paz**  
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

**Mtro. Jesús Meza Vega**  
DIRECTOR GENERAL DE COMUNICACIÓN UNIVERSITARIA

**Dra. Nelly Gordillo Castillo**  
COORDINADORA DE APOYO AL DESARROLLO DE  
LA INVESTIGACIÓN Y AL POSGRADO DEL IIT

#### Comité Editorial

**Dra. Nelly Gordillo**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ  
Editora en Jefe

**Mtro. Raúl Alfredo Meza González**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ  
Coordinador Editorial

**Dr. Víctor Manuel Castaño Meneses**  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**Dr. Ramón Gerardo Guevara González**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

**Dra. Klavdia Oleschko Lutkova**  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**Dr. Abdiel Ramírez Reyes**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

**Dra. Santos Adriana Martel Estrada**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

**Dr. David Cortés Sáenz**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

**Dr. David Ortega Gaucín**  
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

CULCYT se fundó en diciembre de 2003 como parte del programa para la formación de investigadores del Instituto de Ingeniería y Tecnología. Lanzó su primer número en abril de 2004. Fundador: Dr. Victoriano Garza Almanza. A partir de 2019, ha fungido como Editora en Jefe la Dra. Nelly Gordillo Castillo.

#### CULCYT. CULTURA CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

Vol. 19, núm. 2, mayo-agosto de 2022, es una publicación académica, editada de manera cuatrimestral por la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, a través del Instituto de Ingeniería y Tecnología.

D.R. © UACJ, Avenida del Charro núm. 619 norte, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

Editora responsable: Dra. Nelly Gordillo Castillo.

Reserva de derechos al uso exclusivo núm. 04-2021-060118164700-203.

ISSN (electrónico): 2007-0411.

Sitio OJS: [erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt](http://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt). Correo electrónico: [culcyt@uacj.mx](mailto:culcyt@uacj.mx). Teléfono +52 (656) 6884848.

DOI: [10.20983/culcyt.2022.2](https://doi.org/10.20983/culcyt.2022.2)

Modalidad de publicación continua. Tan pronto como un artículo ha sido preparado, se publica en línea.

Los trabajos a publicar en CULCYT deben ser originales e inéditos. En este momento, la revista no tiene costos de publicación para los autores.

El acceso a la revista es libre, sin requerimientos, bajo lo establecido en la normatividad mexicana de acceso abierto, y se da a través de su sitio

<https://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt>

o mediante el Repositorio Institucional de la UACJ

<http://ri.uacj.mx/vufind/>



Los artículos firmados son responsabilidad de sus autores.

Se autoriza la reproducción total o parcial, siempre y cuando se cite la fuente.

Información para autores:

<https://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/autores>

Los contenidos e imágenes de la publicación están sujetos a una licencia CC 4.0 internacional BY NC.



# CONTENIDO

## CONTENTS

### Artículos de investigación / Research articles

- Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial** **4**  
 Non-traditional dynamic vibration absorber for controlling inertial force  
 José Gabriel Mendoza-Larios, Eduardo Barredo-Hernández, Irving Abdiel Maldonado-Bravo

- Determinación de fuerza de agarre en operadores de producción de una industria médica de Ciudad Juárez** **43**  
 Determination of hand grip of production operators of a medical industry at Ciudad Juarez  
 Javier Azael Ayala-Gutiérrez, Karla Gabriela Gómez-Bull, Juan Luis Hernández-Arellano, María Marisela Vargas-Salgado

### Artículos de revisión / Review articles

- Métodos de remoción de metales en aguas para consumo humano: Una revisión** **12**  
 Heavy metal removal methods in water for human consumption: A review  
 Sebastián Zúñiga-Martínez, Óscar Fidencio Ibáñez-Hernández, Jorge Salas Plata-Mendoza, Edith Flores-Tavizón, Gilberto Velázquez-Angulo

- Electrocoagulación de iones de metales pesados en aguas residuales: Una revisión** **28**  
 Electrocoagulation of heavy metal ions in wastewater: A review  
 Humberto Rubi-Juárez, Marisela Yadira Soto-Padilla, Miguel Domínguez-Acosta

### Edición Especial “La simbiosis en el puente cognitivo entre la física y las matemáticas” / Special edition “The symbiosis in the cognitive bridge between physics and mathematics”

- Presentación** **E1**  
 Presentation  
 Jesús Manuel Sáenz Villela

- Videoanálisis y técnica Monte Carlo para calcular la cota máxima de la fuerza de una patada** **E2**  
 Video-analysis and Monte Carlo technique to calculate the maximum force of a kick  
 Vicente Torres-Zúñiga

- Aproximación interdisciplinaria STEM con recursos tecnológicos para el tratamiento de conceptos de física y matemáticas** **E13**  
 Interdisciplinary STEM approach with technological resources for the treatment of physics and mathematics concepts  
 Elvia Rosa Ruiz-Ledezma, Fermín Acosta-Magallanes, María del Socorro Valero-Cázar

- El Circo de la Física: Actividades lúdicas en la divulgación de la física** **E23**  
 The Physics Circus: Physics outreach playful activities  
 Karen Yael Castrejón-Parga, Jesús Manuel Sáenz-Villela

- Proyecto STEM sobre la generación de energía eléctrica en el río Amajac usando turbinas** **E38**  
 STEM project on the feasibility of generating electricity in the Amajac river using turbines  
 Carmen del Pilar Suárez Rodríguez, Nicolás Martínez Ortiz, Ángel Ossiel Pérez Santiago, Raúl Castillo Meraz

# Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial

## *Non-traditional dynamic vibration absorber for controlling inertial force*

José Gabriel Mendoza-Larios<sup>1</sup>✉, Eduardo Barredo-Hernández<sup>1</sup>, Irving Abdiel Maldonado-Bravo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de la Mixteca.

<sup>2</sup>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).

### RESUMEN

En este artículo se aborda el problema de optimización del absorbedor dinámico de vibración no tradicional (NDVA) para el control pasivo de vibración en una estructura de un grado de libertad sometida a excitación inercial. Para la obtención de los parámetros óptimos de diseño del NDVA, se aplicaron dos enfoques diferentes: la técnica de los puntos fijos y el criterio  $\mathcal{H}_\infty$ . De la implementación de la técnica de los puntos fijos en combinación con la técnica de ajuste de frecuencias de Krenk se obtuvieron relaciones simples para los parámetros de diseño del NDVA. Por otro lado, mediante el método de Nishihara y el Teorema de Vieta se redujo el problema de optimización del criterio  $\mathcal{H}_\infty$  a la solución de un sistema restringido de ecuaciones no lineales. Este sistema se resolvió para el rango de valores de la relación de masa  $1\% \leq \mu \leq 20\%$ . Para este rango de valores el NDVA, en comparación con el absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA), presenta una mejora de 0.36 – 15.7 % en la supresión de vibración.

**PALABRAS CLAVE:** técnica de los puntos fijos; frecuencias invariantes; optimización  $\mathcal{H}_\infty$ ; NDVA; excitación inercial.

### ABSTRACT

This paper deals with solution for the constrained nonlinear multivariable optimization problem which provides the optimal design to the non-traditional dynamic vibration absorber when coupled to the single degree-of-freedom structure under inertial force. For the calculation of NDVA's design optimal parameters, it was necessary to apply two different approaches which are the following: the fixed-points technique and the  $\mathcal{H}_\infty$  criterion. When the fixed-points technique is combined with the Krenk's frequency tuning approach, short closed-form solutions are obtained for the optimal design of NDVA. By applying the Nishihara's method and the Vieta's theorem to numerically solve the  $\mathcal{H}_\infty$  optimization problem, a better dynamic balance between resonant points can be obtained unlike the fixed-points technique. For the mass ratio range from 1% to 20%, it was proved that NDVA yields 0.36-15.7% improvement compared with the classic dynamic vibration absorber.

**KEYWORDS:** fixed-points technique; invariant frequencies;  $\mathcal{H}_\infty$  optimization; NDVA; inertial excitation.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** José Gabriel Mendoza Larios  
**INSTITUCIÓN:** Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM)  
**DIRECCIÓN:** Carretera Huajuapán-Acatlilma, km 2.5  
Huajuapán de León, Oaxaca, México, C.P. 69000  
**CORREO ELECTRÓNICO:** jgml@mixteco.utm.mx

**Fecha de recepción:** 14 de febrero de 2022. **Fecha de aceptación:** 20 de mayo de 2022. **Fecha de publicación:** 14 de junio de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

Es común que las máquinas y estructuras experimentan ciertos niveles de vibración debido a la acción de fuerzas externas que actúan sobre ellas. Más aún, si la frecuencia de las fuerzas de excitación se iguala a las frecuencias naturales del sistema, se producirá el fenómeno conocido como resonancia. Bajo esta condición, los niveles de vibración crecen de forma descontrolada y pueden causar daños en máquinas y estructuras o en algunos de los elementos que las componen. Por esto, se vuelve necesaria la implementación de sistemas de amortiguación para mitigar las amplitudes de vibración del sistema. Entre estos sistemas de amortiguación se encuentran: topes de impacto, amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración, inersores y amortiguadores con fluidos inteligentes, entre otros [1]. Asimismo, la principal función de un sistema de amortiguamiento es disminuir o inclusive cancelar las vibraciones mecánicas.

En las últimas décadas, el control pasivo de vibraciones mediante la aplicación de absorbedores dinámicos de vibración se ha incrementado notablemente en diferentes áreas de la ingeniería. Este aumento se debe principalmente a su simplicidad en cuanto a diseño e implementación. El primer absorbedor de vibración fue inventado por Frahm alrededor de 1911 [2], el cual consistía en una masa secundaria y un resorte conectado entre el sistema principal y la masa secundaria. Más tarde se añadiría un amortiguador al sistema secundario, para el que Ormondroyd y Den Hartog [3] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA (*Dynamic Vibration Absorber*) utilizando la técnica de los puntos fijos.

Posteriormente, Krenk [4] propuso una teoría de ajuste de frecuencias para el cálculo del factor de amortiguamiento óptimo, que produce la misma amplitud de vibración en el rango de frecuencias de operación del DVA. Por su parte, Asami et al. [5] y Nishihara y Asami [6] utilizaron los criterios de optimización  $\mathcal{H}_\infty$  y  $\mathcal{H}_2$  para el desarrollo de soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. Adicionalmente, Argentini et al. [7] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA sujeto a una fuerza inercial derivada de una masa desbalanceada. Por otro lado, Ren [8] propuso una modificación del DVA clásico al fijar a tierra una de las terminales del elemento amortiguador, configuración que se conoce como absorbedor de vibración no tradicional (*Nonlinear Dynamic Vibration Absorber*: NDVA).

Posteriormente, Heidari y Monjezi [9] implementaron tanto el DVA clásico como el NDVA para el control de vibraciones en un rotor tipo Jeffcott y los resultados muestran que el NDVA mejora la supresión de vibración comparado con el DVA clásico.

En este trabajo se presenta un estudio para el control de vibraciones de una estructura sometida a excitación inercial, mediante la implementación de un NDVA. Se obtuvieron ecuaciones simplificadas para los parámetros de diseño óptimo del NDVA, a partir de la técnica de los puntos fijos. Cabe señalar que la ecuación para el cálculo del factor de amortiguamiento óptimo no se ha reportado en la literatura. También, se implementó la optimización del índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  y mediante el método de Nishihara se obtuvieron los parámetros de diseño óptimos del NDVA de forma numérica. Adicionalmente, se presenta el incremento de supresión de vibración que provee el NDVA en comparación con el DVA clásico.

## II. METODOLOGÍA

Este trabajo de investigación se realizó mediante el seguimiento de la metodología que se presenta enseguida:

1. Investigación sobre el estado del arte del control pasivo de vibraciones de sistemas mecánicos utilizando absorbedores de vibración.
2. Definición del problema y modelado matemático del sistema mecánico con absorbedor de vibración bajo excitación inercial.
3. Obtención de la Función de respuesta en frecuencia del sistema (FRF) y cálculo de los parámetros óptimos de diseño del sistema absorbedor de vibraciones, mediante la implementación de la técnica de los puntos fijos y el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$ .
4. Análisis de los resultados y conclusiones.

En el siguiente apartado se muestra el desarrollo del modelado matemático y la obtención de la FRF del sistema con el NDVA.

### MODELADO MATEMÁTICO

En esta parte se desarrolla el modelo matemático del sistema mecánico con absorbedor de vibración no tradicional (NDVA), así como, su FRF.

En la Figura 1 se muestra el sistema de estudio, que está compuesto por una masa primaria sometida a excita-

ción inercial y un sistema secundario constituido por una masa, un resorte conectado entre las masas y un amortiguador de fluido viscoso entre la masa secundaria y la tierra mecánica.

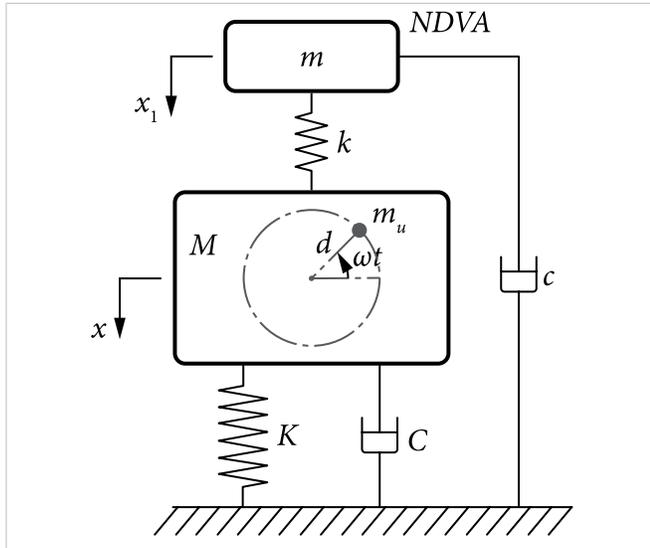


Figura 1. Sistema con NDVA bajo excitación inercial.

Por lo tanto, después de la aplicación del formulismo Euler-Lagrange para sistemas no conservativos y, en especial, al sistema mecánico mostrado en la Figura 1, se obtiene el modelo matemático que rige su comportamiento dinámico, el cual se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + k(x - x_1) &= F_0 \text{sen}\omega t \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k(x_1 - x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{con } F_0 = m_u d \omega^2$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema primario. Asimismo, para el sistema secundario,  $m$ ,  $c$  y  $k$  constituyen su masa, su amortiguamiento y su rigidez. Además,  $m_u$  es una masa que se ubica a una distancia  $d$  y representa la excitación inercial cuya frecuencia es  $\omega$ . Adicionalmente, como la excitación inercial es de tipo armónica, el sistema representado por la Ecuación (1), al considerar una solución de tipo armónica, con  $C \cong 0$  y después de un tratamiento matemático consistente, la FRF adimensional del sistema primario se da como sigue:

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)| = \Omega^2 \left[ \frac{A(q, \Omega) + B(q, \zeta, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega) + D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} A &= [(q + \Omega)(q - \Omega)]^2 \\ B &= (2q\zeta\Omega)^2 \end{aligned}$$

$$C = \{[1 + (\mu + 1)q^2]\Omega^2 - q^2 - \Omega^4\}^2$$

$$D = [(2q\zeta\Omega)(1 + \mu q^2 - \Omega^2)]^2$$

donde

$$\mu = \frac{m}{M}, \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_2}, \quad \Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y los parámetros adimensionales  $\mu$ ,  $q$ ,  $\zeta$  y  $\Omega$  definidos anteriormente representan la relación de masas, la relación de frecuencias naturales no amortiguadas, el factor de amortiguamiento y la relación de frecuencia forzada, respectivamente. Estos parámetros adimensionales se pueden verificar mediante un análisis dimensional al implementar el teorema II de Buckingham [10]. Adicionalmente, el diseño del NDVA quedará especificado a partir de los valores de estos parámetros.

En la siguiente subsección, se implementará la técnica de los puntos fijos con la finalidad de obtener los parámetros óptimos de diseño del sistema absorbente de vibraciones, a partir de relaciones matemáticas simplificadas.

### TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS

La técnica de los puntos fijos consiste en un proceso de calibración de frecuencias al considerar dos estados de operación límite del absorbente. Estos estados de operación límite se dan cuando el amortiguamiento del sistema toma los valores  $\zeta = 0$  y  $\zeta = \infty$ . Bajo estas condiciones se producen los llamados puntos fijos o puntos invariantes, que son independientes del factor de amortiguamiento.

Para la implementación de la técnica de los puntos fijos se considera la FRF del sistema descrito en la Figura 1, representada por la Ecuación (2). Si se evalúa la FRF del sistema en los estados de operación límite cuando  $\zeta = 0$  y  $\zeta = \infty$ , se obtienen las siguientes dos ecuaciones que son independientes del amortiguamiento:

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow 0} = \left[ \frac{A(q, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow \infty} = \left[ \frac{B(q, \zeta, \Omega)}{D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

De la igualación de las Ecuaciones (3) y (4) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{A(q, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega)} = \pm \frac{B(q, \zeta, \Omega)}{D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \quad (5)$$

La Ecuación (5) arroja un resultado trivial cuando se resuelve considerando el signo positivo y, en contraste, con el signo negativo se obtiene la Ecuación (6):

$$a\Omega^2 + b(\mu, q)\Omega + c(\mu, q) = 0 \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b(\mu, q) &= -(\mu q^2 + q^2 + 1) \\ c(\mu, q) &= \frac{1}{2}q^2(\mu q^2 + 2) \end{aligned}$$

Por otra parte, se puede obtener una expresión matemática equivalente a la Ecuación (6) expresada en función de la magnitud  $|H|$ . Esto se logra al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación (4) y con un tratamiento algebraico adecuado, lo que resulta en la Ecuación (7).

$$\tilde{a}(|H|)\Omega^2 + \tilde{b}(\mu, q, |H|)\Omega + \tilde{c}(\mu, q, |H|) = 0 \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{a}(|H|) &= |H|^2 - 1 \\ \tilde{b}(\mu, q, |H|) &= -2|H|^2(\mu q^2 + 1) \\ \tilde{c}(\mu, q, |H|) &= |H|^2(\mu q^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Es importante notar que las Ecuaciones (6) y (7) son bicuadráticas y que sus soluciones son dos raíces reales que corresponden a las frecuencias invariantes del NDVA. En la Figura 2 se muestra la FRF de la estructura principal para diferentes valores del factor de amortiguamiento. En esta se pueden apreciar los puntos fijos denotados por  $P_1$  y  $P_2$ , que son independientes del amortiguamiento del sistema. Asimismo, a cada punto fijo le corresponde una frecuencia invariante.

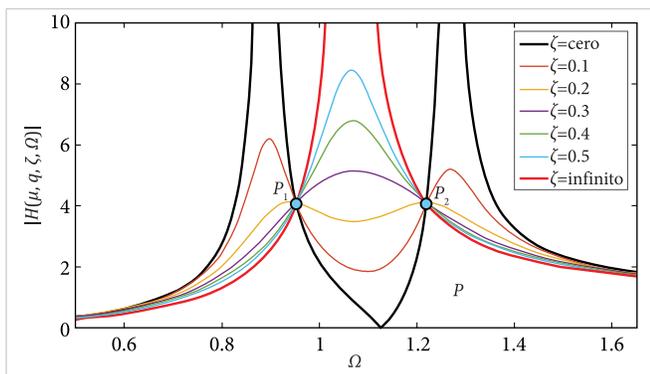


Figura 2. FRF de la estructura primaria para diferentes valores del factor de amortiguamiento.

Por otro lado, para obtener las expresiones simplificadas de los parámetros óptimos de diseño del NDVA que producen la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes, se emplea el Teorema de Vieta. Por consiguiente, la suma y producto de las raíces reales de los polinomios mónicos derivados de las Ecuaciones (6) y (7) se pueden expresar a partir de lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 = \sum_{i=1}^2 \Omega_{\zeta \rightarrow \infty, i}^2 \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^2 \Omega_i^2 \Omega_j^2 = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^2 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \quad (9)$$

Después de sustituir las sumas y los productos de las raíces de los polinomios mónicos en las Ecuaciones (8) y (9) respectivamente, se obtienen las Ecuaciones (10) y (11):

$$-(\mu q^2 + q^2 + 1) = \frac{-2|H|^2(\mu q^2 + 1)}{|H|^2 - 1} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}q^2(\mu q^2 + 2) = \frac{|H|^2(\mu q^2 + 1)^2}{|H|^2 - 1} \quad (11)$$

Al resolver simultáneamente las Ecuaciones (10) y (11), se obtienen expresiones analíticas simplificadas tanto para la variable adimensional de ajuste de frecuencias  $q_{\text{ópt}}(\mu)$  como para la magnitud calibrada  $|H(\mu)|$  correspondiente a los puntos fijos. Estas soluciones están en función de la relación de masas  $\mu$ , y se expresan como sigue:

$$q_{\text{ópt}}(\mu) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} \quad (12)$$

$$|H(\mu)| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu} - \mu}{\mu}} \quad (13)$$

$$\Omega^2 - \mu q_{\text{ópt}}^2 - 1 = 0 \quad (14)$$

$$\Omega_{\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu}} \quad (15)$$

Por último, para determinar el factor de amortiguamiento que aplanan la función de respuesta en frecuencia de la estructura principal, es necesario sustituir  $q_{\text{ópt}}(\mu)$ ,  $|H(\mu)|$  y  $\Omega_{\zeta \rightarrow \infty}$  en la Ecuación (2) y resolver la ecuación resultante para la relación de amortiguamiento  $\zeta$ . Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo se expresa como sigue:

$$\zeta_{\text{ópt}}(\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\mu}} \quad (16)$$

Con la implementación de la técnica de los puntos fijos se logró la obtención de ecuaciones algebraicas simplificadas para el diseño óptimo del absorbedor de vibración no tradicional bajo excitación inercial. Adicionalmente, en la siguiente subsección se presenta el cálculo numérico de los parámetros óptimos de diseño del NDVA, considerando el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$ .

### ÍNDICE DE RENDIMIENTO $\mathcal{H}_\infty$

En este apartado se utiliza el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  con el objetivo de optimizar los parámetros de diseño del NDVA mediante la minimización de las máximas amplitudes de vibración de la estructura principal en las frecuencias resonantes. El criterio  $\mathcal{H}_\infty$  se conoce comúnmente en la literatura como la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$  [11]. La implementación de esta norma conduce a un problema de optimización multivariable no lineal con restricciones de igualdad, el cual se define como sigue:

$$\min_{P_{\text{opt}}} \left( \max_{\Omega} (|H_{\text{NDVA}}(\Omega)|) \right) = \max_{\Omega} \left( |H_{\text{NDVA}}(P_{\text{opt}}, \mu, \Omega)| \right) \quad (17)$$

sujeto a

$$\frac{\partial |H(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0$$

donde  $P_{\text{opt}}(q, \zeta)$  representa los parámetros de diseño del NDVA que deben optimizarse. Adicionalmente, el problema de optimización se restringe a soluciones reales positivas  $P_{\text{opt}}(q, \zeta) \geq 0$ . Con esto en mente, en este trabajo de investigación se utiliza el método de Nishihara [12] para resolver el problema de optimización planteado en la Ecuación (17). La idea novedosa de Nishihara fue proponer un artificio matemático para minimizar la FRF de la estructura principal mediante la siguiente función:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (18)$$

Esta función también se puede expresar como sigue:

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} = 0 \quad (19)$$

Al combinar la FRF de la estructura primaria definida por la Ecuación (2) con las Ecuaciones (18) y (19) se obtiene una expresión que garantiza que las amplitudes de vibración en las frecuencias resonantes sean iguales. Tal expresión se define por la Ecuación (20):

$$\Omega^4 + c_1\Omega^3 + c_2\Omega^2 + c_3\Omega + c_4 = 0 \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned} c_1(\mu, q, \zeta, r) &= 2\{q^2[(2\zeta^2 - 1)r^2 - \mu] - 1\}/r^2 \\ c_2(\mu, q, \zeta, r) &= \{[\mu(\mu + 2 - 8\zeta^2) + r^2]q^4 + 2(\mu - 4\zeta^2 + 2)q^2 + 1\}/r^2 \\ c_3(\mu, q, \zeta, r) &= 2q^2[2q^4\mu^2\zeta^2 + (4\mu\zeta^2 - \mu - 1)q^2 + \zeta^2 - 1]/r^2 \\ c_4(q, r) &= q^4/r^2 \end{aligned}$$

De esta forma se minimiza el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  al minimizar la variable desconocida  $r$ . Posteriormente, de la aplicación del Teorema de Vieta, la suma y el producto de las raíces de la Ecuación (20) genera un conjunto de ecuaciones no lineales en términos de los coeficientes  $c_i$  para  $i=1, \dots, 4$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow c_1\sqrt{c_4} - c_3 = 0 \\ f_2 &\rightarrow c_1\sqrt{c_4} - c_3 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Este sistema de ecuaciones está en función de los parámetros de diseño del absorbedor y de la variable desconocida  $r$ . Con la finalidad de resolver el sistema de ecuaciones (21), se agrega una ecuación de restricción, la cual proporciona una condición necesaria para alcanzar una solución óptima a la norma  $\|H(\Omega)\|_\infty$ . La ecuación resultante se obtiene al utilizar la matriz jacobiana de la variación infinitesimal de la variable  $r$  con respecto a los parámetros de diseño del absorbedor. Esta matriz jacobiana se expresa como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

La matriz jacobiana tiene un tamaño de  $2 \times 3$  y se satisface para cualquier determinante menor de  $2 \times 2$  igualado a cero. Por lo tanto, la ecuación de restricción se define por la Ecuación (23):

$$f_3 \rightarrow \det = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Asimismo, se puede observar que el proceso de optimización mediante el cálculo de la norma  $\|H_\infty\|$  utilizando el método de Nishihara se reduce a la solución del sistema de ecuaciones no lineales conformado por las Ecuaciones (21) y (23). El sistema de ecuaciones resultante se resuelve mediante el método de Newton-Raphson, al tomar como datos de inicio los valores de

los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica de los puntos fijos.

En la siguiente sección se presentan los resultados de los parámetros de diseño óptimo del DVA que se obtuvieron a partir de la técnica de los puntos fijos y la norma  $\|H_\infty\|$ . Además, se calcula el incremento de reducción de vibración que proporciona la implementación del NDVA en comparación con el DVA clásico.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las expresiones analíticas resultantes de la implementación de la técnica de los puntos fijos, constituyen una herramienta importante para el diseño óptimo del NDVA debido a su simplicidad y a que solo dependen de la relación de masas  $\mu$ . En la Figura 3 se muestran los resultados de las FRF óptimas de la estructura principal para diferentes valores de la relación de masas  $\mu$  y considerando los parámetros  $q_{\text{ópt}}(\mu)$  y  $\zeta_{\text{ópt}}(\mu)$  calculados a partir de las Ecuaciones (12) y (16).

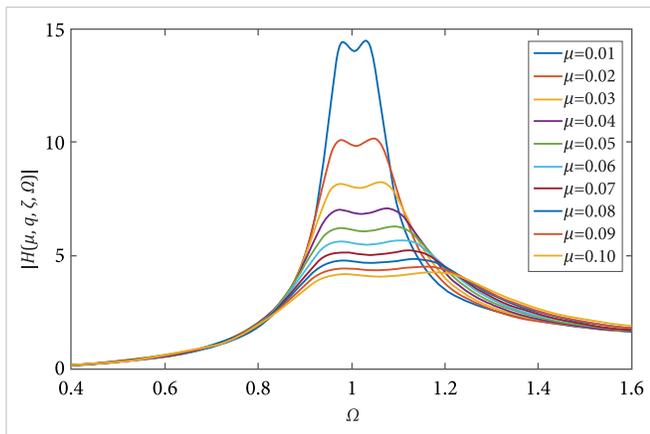


Figura 3. FRF óptimas de la estructura principal para diferentes valores de la relación de masas  $0.01 \leq \mu \leq 0.1$ .

Tal como se esperaba, en la Figura 3 se observa que la magnitud de vibración optimizada de la estructura principal desciende al incrementar el valor de la relación de masas  $\mu$ . Asimismo, en la Figura 4 se muestra la comparación de las FRF de la estructura principal con NDVA y DVA clásico, considerando una relación de masas  $\mu \in [0.1, 0.2]$ .

En la Figura 4 es evidente que el rendimiento del dispositivo NDVA, respecto a la supresión de vibración, es mayor que el del DVA clásico. También, la integración del NDVA hace que la FRF de la estructura principal sea más

plana en la zona de operación del dispositivo. Asimismo, el ancho de operación se desplaza hacia adelante.

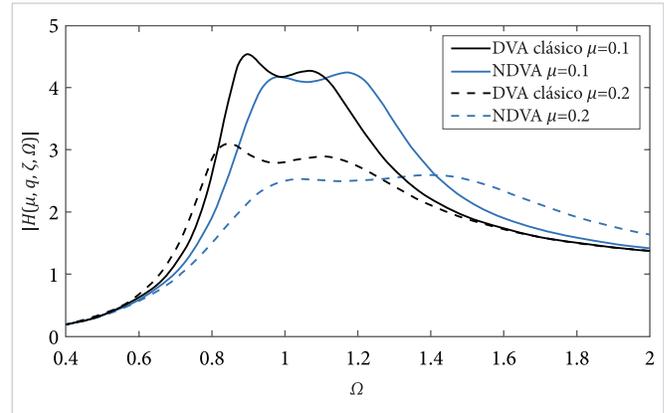


Figura 4. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, para  $\mu \in [0.1, 0.2]$ .

Por otro lado, en la Tabla 1 se muestran los resultados numéricos de los parámetros óptimos de diseño del NDVA obtenidos a partir del criterio  $\mathcal{H}_\infty$ , para diferentes valores del parámetro de relación de masas dentro del rango  $1\% \leq \mu \leq 20\%$ . Se considera este rango de valores de relación de masa para aplicaciones prácticas del NDVA [13], [14].

TABLA 1  
PARÁMETROS ÓPTIMOS PARA EL NDVA OBTENIDOS  
MEDIANTE EL CRITERIO  $H_\infty$

$\mu$	$q_{\text{ópt}}$	$\zeta_{\text{ópt}}$	$r_{\text{mín}}$	NORMA $\ H_\infty\ $
0.01	1.01021	0.06164	0.99746	14.03710
0.02	1.02085	0.08775	0.99483	9.84984
0.03	1.03197	0.10823	0.99212	7.97891
0.04	1.04360	0.12583	0.98930	6.85363
0.05	1.05580	0.14175	0.98637	6.07840
0.06	1.06861	0.15645	0.98333	5.50033
0.07	1.08211	0.17042	0.98017	5.04616
0.08	1.09636	0.18377	0.97686	4.67575
0.09	1.11146	0.19674	0.97340	4.36503
0.1	1.12750	0.20940	0.96978	4.09853
0.2	1.39264	0.34538	0.91643	2.49880

En la Figura 5 se muestra la comparación de las normas  $\|H_\infty\|$  de la estructura principal con NDVA y DVA clásico cuando se considera una relación de masas  $\mu=0.1$ .

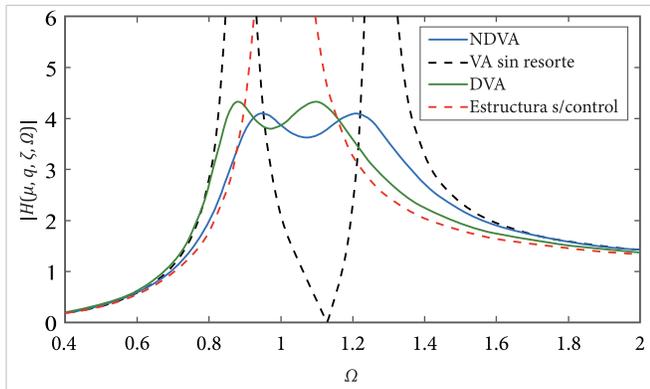


Figura 5. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el NDVA son  $q_{\text{ópt}}=1.1275$ ,  $\zeta_{\text{ópt}}=0.20940$  y la norma  $\|H_{\infty}\|=4.09853$ ; y para el DVA clásico  $q_{\text{ópt}}=0.95254$ ,  $\zeta_{\text{ópt}}=0.19219$  y la norma  $\|H_{\infty}\|=4.32175$ .

En la Figura 5 se observa que la norma  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$  para el NDVA es menor que la del DVA clásico. Adicionalmente, el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema se puede calcular como en [15].

$$\%SP_{\text{NDVA}} = \left( \frac{SP_{\text{DVA}} - SP_{\text{NDVA}}}{SP_{\text{DVA}}} \right) 100 \% \quad (24)$$

El porcentaje de reducción de vibración del sistema con NDVA comparado con el DVA clásico es del 0.36–15.7 %, para el rango de valores de relación de masas que se muestra en la Tabla 1.

Por su parte, en la Figura 6 se muestra la comparación gráfica de las FRF de la estructura principal, generadas a partir de la técnica de los puntos fijos y la norma  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ , para una relación de masas de  $\mu=0.1$ .

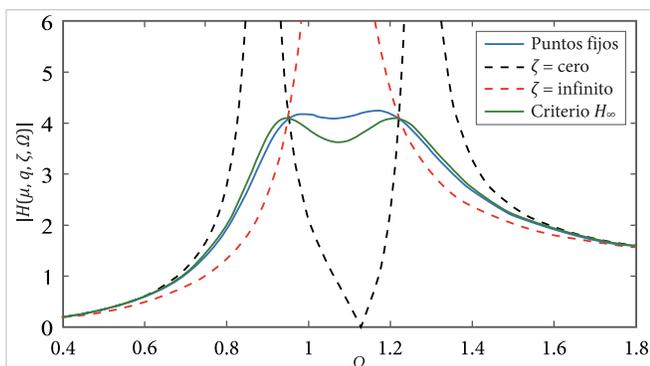


Figura 6. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, norma  $\|H(\Omega)\|_{\infty}$  y puntos fijos.

De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 6, la curva de amplitud óptima de vibración (Técnica

de los Puntos Fijos) es semejante a la curva generada a partir del índice de rendimiento  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Cabe mencionar que, aunque la técnica de los puntos fijos provee un camino relativamente más fácil para resolver el problema de diseño óptimo del NDVA, el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_{\infty}$  proporciona una alta precisión para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño [16].

## IV. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se abordó el problema de control pasivo de vibraciones de una estructura de un grado de libertad, sometida a una fuerza de excitación inercial. Se consideró, como elemento de control pasivo, un absorbedor de vibración dinámico no tradicional (NDVA). Para el diseño óptimo del dispositivo NDVA se aplicaron dos enfoques diferentes: la técnica de los puntos fijos y el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Como resultado de la implementación de la técnica de los puntos fijos, se logró el desarrollo de ecuaciones algebraicas simplificadas, para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño del NDVA.

Asimismo, mediante la teoría de ajuste de frecuencias de Krenk, se obtuvo una ecuación simplificada para el factor de amortiguamiento óptimo, misma que no ha sido reportada en la literatura. Además, por ser una ecuación compacta, facilita el diseño del NDVA para el control de fuerza inercial. De igual forma, el problema de optimización utilizando el criterio  $\mathcal{H}_{\infty}$  se llevó a cabo mediante la utilización del método de Nishihara, para el cual es necesario considerar la función  $h=1/\sqrt{1-r^2}$ , con el fin de minimizar la función de respuesta en frecuencia de la estructura principal. Por lo que después de un tratamiento matemático conveniente y el uso del Teorema de Vieta, el problema de optimización se redujo a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales restringido. De la solución de este sistema de ecuaciones se obtuvieron los parámetros óptimos de diseño del NDVA de forma numérica.

Por otro lado, de la comparación de los resultados de las FRF de la estructura principal con NDVA y DVA clásico, se observa que el NDVA proporciona una mayor supresión de vibración. De hecho, para el rango de relación de masas utilizado de  $1\% \leq \mu \leq 20\%$ , se obtuvo un porcentaje de reducción de vibración del 0.36–15.7 %. Lo anterior significa que, con el mismo valor de masa física del absorbedor, el NDVA produce un mayor rendimiento de supresión de vibración que el DVA clásico. En contraste,

de la Figura 5 es evidente que el incremento de ancho de banda que proporciona el NDVA en comparación con el DVA clásico no es significativo. Asimismo, se observa que los resultados obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos, son similares a los que arroja la optimización utilizando el criterio  $\mathcal{H}_\infty$ .

## REFERENCIAS

- [1] C. Mazón, "Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico", Tesis de maestría, CENIDET, Cuernavaca, Mor., México, 2019.
- [2] S. Pani, S. K. Senapati, K. C. Patra y P. Nath, "Review of an Effective Dynamic Vibration Absorber for a Simply Supported Beam and Parametric Optimization to Reduce Vibration Amplitud", *Int. J. Eng. Res. Appl.*, vol. 7, no. 7, pp 49-77, jul. 2017, doi: 10.9790/9622-0707034977.
- [3] D. J. Ormondroyd, "The theory of dynamic vibration absorber", *Trans., ASME, Applied Mechanics*, vol. 50, pp 9-22, 1928.
- [4] S. Krenk, "Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper", *J. Appl. Mech.*, vol. 72, no. 6, pp. 936-942, may. 2005, doi: 10.1115/1.2062867.
- [5] T. Asami, O. Nishihara y A. M. Baz, "Analytical Solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems", *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 2, pp. 284-295, Apr, 2002, doi: 10.1115/1.1456458.
- [6] O. Nishihara y T. Asami, "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)", *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 4, pp. 576-582, oct. 2002, doi: 10.1115/1.1500335.
- [7] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani, "A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing", *J. Vib. Acoust.*, vol. 137, no. 3, pp. 034501, jun. 2015, doi: 10.1115/1.4029576.
- [8] M. Z. Ren, "A variant design of the dynamic vibration absorber", *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 4, pp. 762-770, Aug, 2001, doi: 10.1006/jsvi.2001.3564.
- [9] H. Heidari y B. Monjezi "Vibration control of imbalanced Jeffcott rotor by virtual passive dynamic absorber with optimal parameter values", *Proc IMechE Part C-J Mechanical Engineering Science*, vol. 232, no. 23, pp. 4278-4288, en. 2018, doi: 10.1177/0954406217752024.
- [10] J. A. Çengel y J. M. Cimbala. *Mecánica de Fluidos Fundamentos y Aplicaciones*, 4.ª ed. México: McGraw Hill, 2018.
- [11] Y. Hu y M. Z. Q. Chen, "Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 99, pp. 297-307, ag. 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [12] T. Asami, Y. Mizukawa y T. Ise, "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function", *J. Vib. Acoust.*, vol. 140, no. 6, pp. 061012, dic. 2018, doi: 10.1115/1.4040229.
- [13] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, J. Colín y M. Arias-Montiel, "Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration", *Eng. Struct.*, vol. 195, pp. 469-489, jun. 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.05.105.
- [14] D. J. Inman, *Engineering Vibration*, 5.ª ed. Estados Unidos: Pearson, 2022.
- [15] G. López, "Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga" Tesis de licenciatura, Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oax., México, 2021.
- [16] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Colín, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, M. Arias-Montiel, "A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber", *J. Sound Vib.*, vol. 485, pp. 1-24, oct. 2020, doi: 10.1016/j.jsv.2020.115583.

## RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado económicamente por el "Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP) de la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM)" con número de oficio 511-6/2020-8637.

# Métodos de remoción de metales en aguas para consumo humano: Una revisión

## *Heavy metal removal methods in water for human consumption: A review*

Sebastián Zúñiga-Martínez<sup>1</sup>✉, Óscar Fidencio Ibáñez-Hernández<sup>1</sup>, Jorge Salas Plata-Mendoza<sup>1</sup>,  
Edith Flores-Tavizón<sup>1</sup>, Gilberto Velázquez-Angulo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Depto. de Ingeniería Civil y Ambiental, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.

### RESUMEN

La contaminación de las fuentes de agua naturales empleadas para el abastecimiento humano es una problemática en crecimiento alrededor del mundo, en especial por el aumento de sustancias tóxicas presentes en estas. Lo anterior conlleva a la evaluación de alternativas de tratamiento para la remoción de metales pesados. En el presente documento se recopiló información disponible en diferentes medios físicos y electrónicos en torno a los métodos empleados para la potabilización del agua y los costos asociados al volumen de agua procesada y/o porcentaje de contaminantes removidos. Con esto, se encontró que los métodos fisicoquímicos, por membranas, adsorbentes y electroquímicos, son los más empleados para la remoción de metales pesados en el agua potable, siendo los métodos fisicoquímicos los más económicos en su operación (0.0163 USD/m<sup>3</sup>) y los de membrana de ósmosis inversa los más costosos (0.3319 USD/m<sup>3</sup>). Además, estos costos están relacionados con la remoción de sustancias como As, Cr, Cd, Cu, Hg, Pb, Ni y de las cuales, se detectó al As y Pb como los más relevantes. Además, hay gran variedad de métodos que son aplicables a la potabilización del agua, sin embargo, la selección de estos debe ajustarse a la situación general de la fuente de agua existente, la legislación aplicable, las necesidades de la población y los recursos disponibles para su tratamiento.

**PALABRAS CLAVE:** aguas subterráneas; metales pesados; remoción de metales pesados; tratamientos de aguas residuales; tratamientos de agua potable.

### ABSTRACT

The contamination of natural water sources used for human supply is a growing problem around the world, especially due to the increase of toxic substances present in them. This leads to the evaluation of treatment alternatives for the removal of heavy metals. In this document, information available in different physical and electronic media regarding the methods used for water purification and the costs associated with the volume processed of water and/or the percentage of pollutants removed was collected. It was found that physicochemical, membrane, adsorbent and electrochemical methods are the most commonly used for the removal of heavy metals from drinking water, with physicochemical methods being the most economical to operate (0.0163 USD/m<sup>3</sup>) and, on the contrary, with reverse osmosis membrane methods being the most expensive (0.3319 USD/m<sup>3</sup>). In addition, these costs are related to the removal of substances such as As, Cr, Cd, Cu, Hg, Pb, and Ni, of which As and Pb were found to be the most relevant. It was found that there is a great diversity of methods that are applicable to the purification of water; however, the selection of these must be adjusted to the existing water source quality, the actual regulation, needs of the population and the available resources for its treatment.

**KEYWORDS:** groundwater; heavy metals; heavy metals removal; wastewater treatment; drinking water treatment.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Sebastián Zúñiga Martínez  
**INSTITUCIÓN:** Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
**DIRECCIÓN:** Av. del Charro núm. 450 norte, col. Partido Romero, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México  
**CORREO ELECTRÓNICO:** a1194445@alumnos.uacj.mx

**Fecha de recepción:** 27 de agosto de 2022. **Fecha de aceptación:** 10 de junio de 2022. **Fecha de publicación:** 30 de junio de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

El recurso hídrico es un bien de gran importancia económica, social y ambiental para las comunidades. No obstante, desde las últimas décadas la calidad física, química y microbiológica de los afluentes ha presentado un deterioro progresivo a consecuencia del crecimiento demográfico, la sobreexplotación de los recursos y la utilización de las fuentes como medios receptores directos o indirectos de desechos de diferentes actividades antrópicas. Debido a lo anterior, se incorporan altas concentraciones de sustancias tóxicas a las fuentes de agua tanto superficiales como subterráneas que pueden afectar al ambiente y la salud humana [1].

Las fuentes subterráneas son aquellas que se ven más afectadas y tienen mayor riesgo para la salud humana, ya que gran parte de estas son las únicas disponibles en zonas aisladas, con problemas de disponibilidad y calidad del vital líquido [2]. Se han generado dinámicas de sobreexplotación de los recursos hídricos, que causan la degradación de los acuíferos por la liberación de elementos químicos contenidos en los estratos rocosos, la infiltración de sustancias tóxicas, como metales pesados provenientes de actividades agrícolas, mineras, industriales, y por la lixiviación provenientes de rellenos sanitarios mal administrados. Como consecuencia, muchos acuíferos alrededor del mundo han sufrido la contaminación de sus aguas por metales pesados y han puesto en riesgo la salud pública y la seguridad alimentaria de la población [3].

Los metales pesados son sustancias químicas que se caracterizan por su alta densidad, toxicidad y persistencia en el ambiente [4]. En el caso del agua, los estudios se han dirigido a sustancias que, en concentraciones bajas, pueden impactar negativamente a la salud humana y a los ecosistemas. Algunos de los metales más estudiados son arsénico (As), cobre (Cu), cromo (Cr), mercurio (Hg), níquel (Ni), plomo (Pb) y zinc (Zn) [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Las concentraciones elevadas de algunos de estos elementos en los ecosistemas pueden alterar el metabolismo de las plantas al modificar la vía de absorción de nutrientes y provocar efectos agudos en la fauna, como la intoxicación y muerte masiva de especies, o afectaciones crónicas como la reducción de la fertilidad o el desarrollo de efectos teratogénicos [11]. Además, los efectos a la salud humana ocasionados por la exposición prolongada a los metales pesados, mediante la in-

gesta de agua contaminada, están relacionados a enfermedades renales, cardíacas, respiratorias, neurológicas, reproductivas, cutáneas y mutagénicas, entre otras [12].

Debido al riesgo que estas sustancias representan para la salud humana, organizaciones internacionales como la Organización Mundial de la Salud (OMS), dependiente de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), se han dedicado a recopilar estudios independientes de riesgos asociados al consumo del agua, mismos con los que se estructura y presenta la guía de calidad de agua que define los valores máximos recomendado para agentes físicos, químicos y microbiológicos antes de ser considerados riesgosos para la salud, sin embargo, su aplicación a nivel local es definida por entes de control locales o nacionales [13]. En este sentido, en la [Tabla 1](#) se presentan la comparativa entre los valores dados por la OMS y los adoptados por dos países.

TABLA 1 [13]-[15]  
LÍMITES MÁXIMOS PERMISIBLES (mg/L)

PARÁMETROS	OMS	COLOMBIA	MÉXICO
Al	0.2-0.1	0.200	0.200
As	0.010	0.010	0.025
Cd	0.030	0.003	0.005
Cu	2.000	1.000	1.000
Cr	0.050	0.050	0.050
Fe	N/E	0.300	0.300
Hg	0.006	0.001	0.001
Ni	0.070	0.020	N/E
Mg	0.400	0.100	0.150
Pb	0.010	0.010	0.010
Zn	3.000	3.000	5.000

N/E: no especificado en la guía o norma citada.

A raíz del riesgo que implica el consumo de agua contaminada para la salud humana, se han desarrollado diversas técnicas (físicas, químicas y/o biológicas) para remover a niveles seguros o por completo la presencia de metales tóxicos en el agua [16]. Con esto se pretende reducir la concentración de estos metales en las aguas residuales que finalmente llegan a los cuerpos receptores como consecuencia de sistemas de tratamiento deficientes o inexistentes. Por lo expuesto anteriormente, el presente artículo hace una recopilación de estudios en torno a las técnicas aplicadas a la remoción de metales pesados presentes en el agua.

## II. METODOLOGÍA

Se utilizaron las bases de datos disponibles en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México (ScienceDirect, EBSCO y Nature, entre otros) y las de acceso libre que se encuentran disponibles en la web, recurriendo a palabras claves para la selección inicial de los documentos. Posteriormente, se clasificaron de acuerdo con fechas de publicación, medio al que se aplica el tratamiento (afluentes, efluentes o redes domiciliarias), sustancias objeto de remoción y técnicas empleadas para ello.

## III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las técnicas de remoción de aguas con concentraciones relativamente bajas de iones metálicos deben ser de alta sensibilidad y gran eficacia <sup>[17]</sup>. Los tratamientos aplicados a la remoción de metales pesados son técnicas químicas y/o físicas.

En el primer caso, el uso de métodos químicos para la remoción de iones metálicos ha demostrado gran eficiencia, sin embargo, acarrea otros problemas como los altos costos de operación y la generación de subproductos tóxicos, clasificados en dos ramas: en la primera están los subproductos de desinfección o SPD, como trihalometanos-THM y ácidos haloacéticos-AHA, que son formados por medio de la interacción del cloro con la materia orgánica disuelta en el agua (en mayor medida, superficiales) y donde factores como el pH, temperatura, dosis de cloro y tiempo de contacto con el desinfectante son críticos para la formación de los SPD <sup>[18]-[20]</sup> y en la segunda, la generación de lodos que a pesar de ser considerados inertes requieren un tratamiento especial por la presencia de metales y microorganismos, entre otras sustancias, que son retenidas en estos y para lo cual se requiere caracterizar los lodos, dificultando así su aprovechamiento como abono o su adecuada disposición <sup>[21]</sup>.

En el segundo caso, los métodos físicos se dividen principalmente en dos categorías: filtración y adsorción. La principal desventaja es que el tiempo de funcionamiento efectivo antes de que los medios filtrantes se saturen es relativamente corto y para la implementación de los métodos de adsorción se requieren grandes áreas para su instalación <sup>[22]</sup>. Cada método o tecnología cuenta con sus propias condiciones que permitirán su selección y aplicabilidad.

### A. TRATAMIENTOS FISICOQUÍMICOS (TFQ)

En el mercado existe una gran variedad de compuestos químicos que son empleados en los sistemas de potabilización, tanto para la remoción de elementos coloidales como para la reducción de iones disueltos en el agua. Estos métodos se basan en la adición de sustancias inorgánicas que facilitan la floculación y posterior precipitación de los iones metálicos presentes en el agua (coagulantes químicos o CC), utilizando las sales de hierro o de aluminio, principalmente, y son empleados en países en vía de desarrollo donde, debido a la poca capacidad de inversión de los gobiernos, se opta por sistemas convencionales y con múltiples etapas para la remoción de dichos contaminantes.

En comparación, con los métodos que se mencionarán más adelante, se requiere una inversión inicial inferior en infraestructura y operación. Además, los parámetros que se deben controlar en estos sistemas se limitan al pH, la dosis y tipo de coagulante, y los procesos unitarios involucrados traen consigo problemas relacionados con la generación de subproductos derivados tanto de la precipitación de los metales disueltos como de la adición de Fe o Al <sup>[23]</sup>.

Donde la operación de los sistemas de tratamiento de agua se ha dado de manera incorrecta, pueden encontrarse, en altas concentraciones, metales como el aluminio y provocar a largo plazo enfermedades del sistema nervioso central, como Alzheimer. Por otro lado, una selección y dosificación óptima del coagulante, así como la implementación de un proceso complementario de filtración, han arrojado resultados positivos en la remoción de metales pesados como el As. Para esto, los rangos óptimos de pH descritos en la literatura son menores a 6 para el Al y para las sales de hierro se recomienda un rango entre 7.2 a 7.5. Con ello, se logra reducir la presencia de estas sustancias entre un 95 % al 100 %. Asimismo, otras sustancias, como el cloruro de circonio y el cloruro de titanio, han mostrado tasas de remoción de metales pesados similares a las mencionadas anteriormente <sup>[24]</sup>.

De igual manera, otra sustancia que se ha evaluado en la remoción de metales pesados en agua para el consumo humano y que ha presentado altas tasas de eficiencia es el óxido de magnesio (MgO) como coagulante, el cual se caracteriza por reaccionar dentro de rangos amplios de pH utilizando bajas dosificaciones del reac-

tivo. Las tasas de remoción obtenidas de metales como Cd, Cr, Cu, Fe, Ni y Pb se encuentran por encima del 95 %, sin embargo, aunque el Cd puede ser removido hasta en un 98 % del flujo, se necesitan dosis mayores de coagulante [25].

Ahora, los procesos químicos que ocurren en las técnicas de coagulación/floculación, se presentan en la Figura 1.

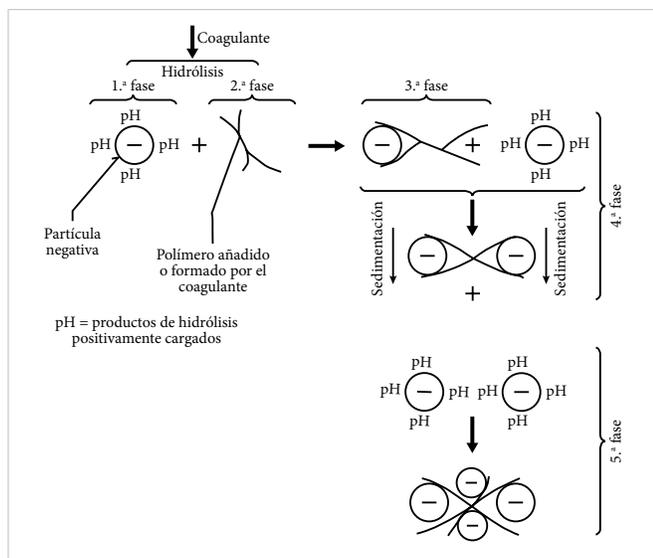


Figura 1. Modelo del procesos químico de coagulación-floculación. Fuente: reproducida de [26].

Por otra parte, la precipitación química es un tratamiento primario empleado principalmente para reducir la concentración de metales pesados en el agua y que requiere procesos complementarios para el manejo de los subproductos generados (lodos).

En principio, esta técnica busca insolubilizar los metales presentes en el agua mediante reacciones de oxidación-reducción que se consiguen a través de la adición de hidróxidos y sulfatos al agua [27]. La variable de mayor importancia que debe ser considerada para la aplicación de este método es el pH [28], [29]. En este sentido, Blue et al. [30] estudiaron la eficiencia de la sal de dipotasio de 1,3-benzendiamidoetanotiol (BDET) como agente precipitante de mercurio (Hg) en aguas de pozos. Con ello, se obtuvo una reducción superior al 99 % en las muestras analizadas.

La reacción química por la cual se logra esta remoción se muestra en la Figura 2.

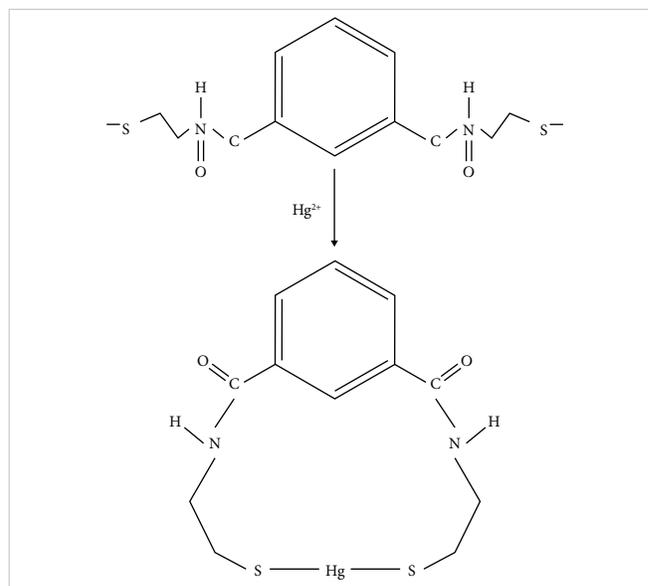


Figura 2. Reacción del BDET y el metal. Fuente: reproducida de [30].

## B. MÉTODOS DE FILTRACIÓN POR MEMBRANA (MFM)

Los métodos de filtración por membrana buscan separar los compuestos disueltos y/o suspendidos en el agua mediante la presión de un flujo a través de un material, en la mayoría de las veces poroso, que retiene contaminantes químicos, biológicos y/o físicos como iones metálicos, algas, virus, protozoos y sólidos disueltos. Las tecnologías de membrana se clasifican, de acuerdo con su diámetro de poro, en microfiltración, ultrafiltración, nanofiltración y ósmosis inversa, las cuales tienen un diámetro de poro aproximado de 0.1 μm, 0.01 μm, 0.001 μm y sin porosidad, respectivamente [31].

### Microfiltración (MF)

La MF es un método utilizado para remover agentes contaminantes en el agua, principalmente partículas y bacterias, empleando para ello un material poroso con un diámetro entre 10 a 0.1 μm y la aplicación de presiones negativas que faciliten el tránsito del agua a través de dicho material. Estas membranas se fabrican con el método de inversión de fase o electrohilado, pero resultan ineficientes en la remoción de virus, materia orgánica disuelta e iones metálicos presentes en el agua, además que su tasa de saturación es mayor a la registrada por otros métodos de membrana. Para reducir el problema que ocasiona la saturación del filtro en los procesos de trabajo y la capacidad de remoción de sustancias, se emplean mayormente técnicas de retrolavado y aireación, permitiendo que estas membranas

alcancen a separar hasta el 22 % de los metales tóxicos presentes en el agua [32].

Debido a lo anterior, recientemente se han estudiado nuevas alternativas orgánicas e inorgánicas en la fabricación de membranas con capacidad de adsorción de microcontaminantes [33] y con nuevas configuraciones de microfibras [34]. Estas modificaciones en sus membranas han permitido un mayor alcance en la remoción de sustancias patógenas y tóxicas, como virus e iones metálicos, facilitando su aplicación en diversos tipos de agua. Estas membranas tienen un amplio historial en su uso como pretratamiento en sistemas convencionales o en plantas de ultrafiltración, nanofiltración y ósmosis inversa [35].

#### *Ultrafiltración (UF)*

Las membranas de UF se caracterizan por tener un diámetro de poro entre  $< 0.1$  y  $0.01 \mu\text{m}$ , y poseer la capacidad de retener proteínas, compuestos orgánicos disueltos, bacterias y virus, pero, debido a su porosidad, tiene baja capacidad para detener iones metálicos. Por ello, actualmente se trabaja en compuestos alternativos para la estructuración de membranas capaces de adaptarse a los sistemas existentes en las plantas de tratamiento, tomando formas laminares y/o tubulares. Además, empleando compuestos de polímeros orgánicos y nanomateriales inorgánicos que, a diferencia de los compuestos homopolímeros utilizados usualmente en la fabricación de membranas, tienen la capacidad de resistir temperaturas superiores a  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ , trabajar con rangos de pH más amplios y resistir la compactación y la presencia de cloruros presente en las fuentes y redes de conducción. Estos nuevos procesos de fabricación de membranas han favorecido la capacidad de adsorción de esta tecnología, aumentando su eficiencia [36].

Por ser la adsorción su principal mecanismo de remoción de metales pesados, estas membranas suelen presentar dificultades al trabajar flujos con múltiples sustancias disueltas, ya que, ante la presencia de soluciones con mezcla de metales, los poros son ocupados por compuestos más complejos y, subsecuentemente, la remoción se reduce en un 20 % aproximadamente en este tipo de los medios con cadenas moleculares menos complejas. Sin embargo, estos porcentajes pueden incrementarse significativamente utilizando sistemas cruzados con múltiples etapas [37].

#### *Nanofiltración (NF)*

Es un método utilizado para el tratamiento de agua potable y residual con el que se busca remover sustancias orgánicas e inorgánicas como metales pesados. En este proceso influyen principalmente tres características: composición química del afluente, condiciones de operación del sistema y tipos de la membrana utilizada. Es importante mencionar que en estos sistemas se requiere controlar el pH, las características del flujo, la concentración del contaminante y su fuerza iónica, la presión del flujo, el caudal, tipo de membrana (hidrofóbica o hidrofílica), carga superficial, tamaño de poro y morfología de esta. Algunas condiciones, como la alta concentración de materia orgánica disuelta en el agua, pueden provocar la saturación o degradación prematura de los filtros, lo que significa la reducción de la vida útil de la membrana y su eficiencia; por ello, en la actualidad se han venido trabajando métodos para reducir la saturación de las membranas a través del cambio de régimen de los flujos que la cruzan mediante el dopado de estas con sustancias que limiten su interacción y saturación [38].

Usualmente, la porosidad de la membrana se ha relacionado con la capacidad de remoción de contaminantes y las condiciones como la carga superficial y el caudal que transita a través de esta en la capacidad de retención de metales pesados. Un ejemplo de ello es lo observado en el estudio de Tansel [39], en el que se buscó verificar la importancia de las condiciones óptimas en el proceso de nanofiltración para mejorar la calidad del permeado. En este se encontró que en membranas con cargas superficiales negativas se debe ajustar el flujo en función del diámetro de poro y la resistencia de la membrana.

Es decir, si bien una membrana con tamaño de poro entre  $0.009$  y  $0.0042 \mu\text{m}$  tiene mayor potencial de retención debido a su selectividad, la resistencia de la membrana y la baja permeabilidad, puede desaprovechar la capacidad de retención iónica que tiene y disminuir la tasa de agua producida por metro cuadrado por hora. En otras palabras, para flujos con altas concentración de metales pesados y donde se requiera una mayor producción de agua, membranas con diámetros entre los  $0.1293$  a  $0.0234 \mu\text{m}$  tienen una respuesta negativa debido a su baja capacidad de rechazo y alta tasa de carga que se presenta bajo estas condiciones, sin embargo, en condiciones de baja concentración de

metales, la respuesta electrostática entre la membrana y el flujo facilitan la remoción y disminuyen los gastos asociados a la operación. Por otro lado, independientemente del tipo de membrana que se emplee, si se manejan las condiciones de operación óptimas para cada caso, la eficiencia en la remoción puede estar por encima del 90 %.

Las membranas mencionadas se han caracterizado por contar con cargas superficiales neutras o negativas que facilitan su trabajo en medios acuosos típicos. Sin embargo, el uso de membranas con cargas positivas desarrolladas a partir de 2004 posibilitó su aplicación en medios ácidos y la recuperación de sustancias catiónicas en el proceso, como los metales pesados. Con ello, en medios acuosos ácidos y con presencia de metales, como Mg, se ha logrado remover hasta el 96 %. Empero, en medios con alta salinidad, la eficiencia de las membranas puede verse reducida debido a la interacción que tiene esta característica con el tamaño de poro y las cargas electrostáticas de la membrana [40].

Finalmente, la vida útil de algunas membranas puede llegar a estar en los 25 usos, es decir, aproximadamente seis meses antes de tener una reducción significativa de alrededor del 15 % en su capacidad de remoción de metales [41].

### Ósmosis Inversa (OI)

La OI se ha utilizado en sistemas de entrada-salida de flujos y se caracteriza por emplear sistemas de flujos cruzados, es decir, formando un sistema interconectado y en espiral con el cual se logra remover hasta el 99 % de las sustancias disueltas en el agua por medio del mecanismo de solución-difusión.

El mecanismo de la OI consta de tres etapas: en la primera se absorben las moléculas disueltas en la membrana; posteriormente se desplazan al perímetro de esta para que, finalmente, ocurra la desorción de las sustancias desplazadas (Figura 3). Para ello, el flujo se somete a presiones osmóticas que varían según la concentración de sustancias a remover. Por ejemplo, en el proceso de desalinización la presiones promedio y máxima a la que se expone el flujo varían entre 26 y 36 bares, respectivamente [42], aunque estos sistemas pueden alcanzar presiones superiores y cercanas a los 100 bares, dependiendo de la sustancia específica que se desee remover.

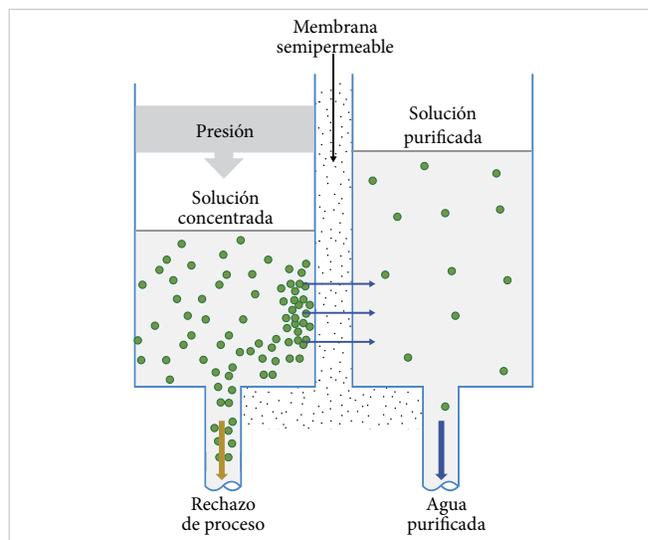


Figura 3. Esquema de operación de ósmosis inversa. Fuente: adaptado de [43].

Por otra parte, el parámetro de mayor importancia en el diseño e implementación de los sistemas de OI corresponde a la recuperación del permeado, es decir, la proporción del agua obtenida. Para el cálculo de esta variable, se emplean las siguientes ecuaciones [43]:

$$R_v = \frac{V_p}{V_a} \quad (1)$$

donde  $R_v$  es la recuperación volumétrica del flujo,  $V_p$  es el caudal permeado ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) y  $V_a$  es el caudal de alimentación ( $\text{m}^3/\text{h}$ ).

$$m_a = m_c + m_p \quad (2)$$

donde  $m_a$  es el flujo másico de alimentación ( $\text{kg}/\text{h}$ ),  $m_c$  es el flujo másico concentrado ( $\text{kg}/\text{h}$ ) y el  $m_p$  es el flujo másico permeado ( $\text{kg}/\text{h}$ ).

$$R_{OI} = \frac{V_p}{V_a} \quad (3)$$

donde  $R_{OI}$  es la recuperación másica,  $V_a$  es caudal de alimentación ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) y  $V_p$  es caudal permeado ( $\text{m}^3/\text{h}$ ). Por otra parte, la OI es un proceso que permite adaptarse a las diferentes necesidades de caudal y contaminantes que se presenten. Al respecto, esta tecnología ha sido evaluada para remover metales pesados del agua y aplicando sistemas simples (entrada-salida) con los cuales se han registrado porcentajes de remoción superiores al 85 % del permeado. Por otra parte, este tipo de sistemas generan rechazos que se caracterizan por ser el concentrado

de los contaminantes filtrados y los cuales requieren ser tratados para evitar o reducir el impacto al ambiente, por ende, es necesario someter los rechazos a procesos complementarios como recirculación, evaporación, solidificación, riego o fitorremediación, entre otros [44].

Ahora bien, las variables de mayor importancia para la correcta operación de estos sistemas son pH, presión, temperatura, caudal y salinidad del flujo, por lo que, para su operación, se requiere de entornos controlados y tecnificados con personal capacitado que opere el sistema, pues de lo contrario se expondría al mismo a un proceso prematuro de saturación y deterioro de los filtros debido a que por ser sistemas automatizados el controlador aumentaría el flujo y la presión con lo que se incrementará la tasa de saturación actual. Por otra parte, se han explorado modelos de automatización predictivos que permitan solventar estos desafíos derivados de la automatización [45]. Finalmente, la vida útil de los sistemas es variable y dependerá de muchos factores, sin embargo, la vida útil de las membranas se ha puede ser entre 5 a 10 años aproximadamente, tiempo en el cual se deberá reemplazar los medios filtrantes [46], [47].

### C. ADSORBENTES (AD)

Los materiales adsorbentes son aquellos a los cuales se adhieren a su superficie los contaminantes presentes en el agua debido a la interacción electrostática que ocurren entre estos. La investigación de los adsorbentes como medios de remoción de metales pesados en el agua potable y residual ha crecido en los últimos años debido a su bajo costo de fabricación, alta tasa de remoción, facilidad para su aplicación, versatilidad y viabilidad financiera, ya que estos facilitan la recuperación de sustancias de amplio uso industrial [48].

Con respecto a lo anterior, el adsorbente más común y de amplio uso comercial es el carbón activado granular, sin embargo, el interés de los investigadores se dirige a la búsqueda de elementos alternos que conserven las mismas características de adsorción, disminuyan las pérdidas del adsorbente en la regeneración y reduzcan los costos de tratamiento [49], [50].

#### *Adsorbentes alternativos (ADA)*

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, Islam *et al.* [51] utilizaron un adsorbente magnético con base en un carbonato para la remoción de  $As^{5+}$ ,  $Cr^{6+}$  y  $Pb^{2+}$ , ya que

este tipo de adsorbentes cuentan con una gran área de influencia superficial y susceptibilidad de atracción de contaminantes catiónicos y aniónicos mediante la interacción coulombica. Con esto se redujo hasta en un 99.99 % la concentración de los compuestos mencionados. Ahora bien, la viabilidad para la aplicación de cualquier adsorbente en condiciones reales no solo depende de la eficacia en la remoción de los metales, sino que además debe evaluarse la disminución de la eficiencia a través de los ciclos de uso y su facilidad de recuperación. Para ello, los compuestos se someten a múltiples pruebas de adsorción/desorción con el fin de determinar la masa retenida y recuperada de un contaminante en un número de ciclos preestablecidos, el cual será definido de acuerdo a la eficiencia buscada en el sistema de tratamiento [52], [53].

#### *Bioadsorbentes (BA)*

El uso de bioadsorbentes ha ganado relevancia dentro de la comunidad científica, donde se han explorado diferentes compuestos provenientes de hojas, ramas, semillas, cáscaras, microorganismos como hongos y bacterias, entre otros, como una alternativa económica y eficiente para la sustitución de los adsorbentes convencionales. La eficiencia que se ha obtenido con estos adsorbentes es significativa, ya que con estas técnicas aplicadas en la potabilización del agua se ha logrado, en tiempos relativamente cortos, la remoción de hasta el 99 % de los metales pesados presentes en el medio acuoso. Lo anterior, en algunos casos, con flujos continuos y discontinuos en presencia de uno o varios contaminantes y a diferentes escalas de pH. Al mismo tiempo, son métodos que se adaptan fácilmente a las necesidades colectivas e individuales debido a la facilidad para ser empleados en grandes instalaciones de tratamiento, así como el uso individual en las zonas que así lo requieran [54].

Como se describió previamente, el uso de bioadsorbentes está pensado para condiciones de operación fijas o móviles. En este sentido, George *et al.* [55] investigaron la eficiencia de las ramas y hojas de *Moringa oleifera* (MO) como bioadsorbente en un proceso convencional de potabilización destinado a la remoción de Ni, Cr, Pb y Cd. Con ello, se logró remover hasta el 60 y 50 % de los metales pesados con las ramas y hojas, respectivamente. Además, se redujeron los microorganismos presentes en el agua en más del 90 % debido a las características bactericidas, fungicidas y aglutinantes que tiene la MO.

También, aprovechando la abundancia de materia orgánica marina en zonas costeras, se han utilizado macroalgas y exoesqueletos de crustáceos para la remoción de iones de  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Zn}^{2+}$  en cuerpos de agua, encontrando que en concentraciones de 1.5 mM/L a 5.3 de pH inicial, la capacidad de adsorción de la *Fucus vesiculosus* y de los exoesqueletos del *Cancer pagurus*, para  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Zn}^{2+}$ , osciló entre el 86 a 91 % y de 75 a 92 %, respectivamente [56]. Además, para zonas agrícolas se ha explorado la utilización de subproductos residuales provenientes de granos como el arroz para su aprovechamiento en la remoción de bajas concentraciones de metales pesados en el agua. En este sentido, Dan et al. [57] estudiaron la eficiencia de la cascarilla de arroz para la remoción de múltiples iones metálicos, sobresaliendo esta en la remoción de iones de Ag, Cd, Cu y Pb, ya que su eficiencia estuvo entre el 70 y 80 %.

#### D. TRATAMIENTOS ELECTROQUÍMICOS (TE)

Los tratamientos o reacciones electroquímicas son aquellas donde se aprovecha el potencial redox (reducción-oxidación) de un material o un medio para la eliminación, degradación o transformación de un compuesto a otro a través de la transferencia de electrones entre especies químicas [58]. En cuanto a eficiencia, estos tratamientos han mostrado resultados semejantes a los obtenidos con tratamientos convencionales químicos, físicos y/o biológicos y, aunado a las condiciones de inocuidad, versatilidad, seguridad y su viabilidad financiera, en algunos casos pueden superar los métodos anteriormente mencionados [59].

La inocuidad en los métodos electroquímicos dependerá del método empleado, la configuración del sistema de tratamiento y los elementos electroquímicos, con lo cual es posible reducir y/o eliminar compuestos tóxicos presentes en las aguas, así como eliminar subproductos tóxicos derivados de la adición de compuestos químicos para eliminar material disuelto. Su versatilidad se debe a que estos son sistemas aplicables para remover simultáneamente múltiples contaminantes y parámetros orgánicos e inorgánicos que afectan la calidad del agua sin necesidad de alterar significativamente los diseños o electrodos empleados. También se considera un método seguro, ya que el proceso no requiere necesariamente la utilización y almacenamiento de insumos químicos debido a que son mínimos las sustancias o iones requeridos para tratar los flujos se generan directamente en el sistema de tratamiento y los riesgos asociados a

la manipulación y exposición a químicos. Por último, su viabilidad financiera se debe a que los montajes de estos sistemas no requieren de fuertes inversiones iniciales y el consumo energético, que es su principal desventaja, se puede amortiguar con un diseño eficiente de las electroceldas y la utilización de fuente de alimentación sustentable [59].

#### Electrocoagulación (EC)

Es un método que se viene estudiando desde el siglo XX, que ha sido utilizado mayoritariamente para el tratamiento de aguas residuales y en el que tradicionalmente se han utilizado sales como catalizadores de la reacción, aunque puede ser empleado sin la presencia de estas. Esto ha hecho que el uso del método de EC sea técnicamente factible para la remoción de metales pesados en el agua para consumo humano. Las variables de pH, conductividad, tipos de electrodos, espaciamiento entre estos, tiempo de reacción y calidad del agua son las principales características que se deben de considerar para la aplicación de la EC. Esta tecnología se basa en la utilización de dos electrodos: uno que sirve para la conducción de una corriente eléctrica a través del medio acuoso (cátodo) y otro como de sacrificio (ánodo), con lo que se generan cationes que reaccionan y desestabilizan los compuestos presentes en el agua para su posterior sedimentación (Figura 4) [60].

En la Figura 4 se observan los componentes siguientes: el ánodo (a), que es el electrodo donde se presenta la oxidación de los compuestos debido a la migración de aniones hacia este; el cátodo (b), que es el electrodo donde se presenta la reducción de los compuestos debido a la migración de cationes hacia este; el elemento conductor (c) y, finalmente, se conecta a un equipo (d) que mide o emplea la energía producida.

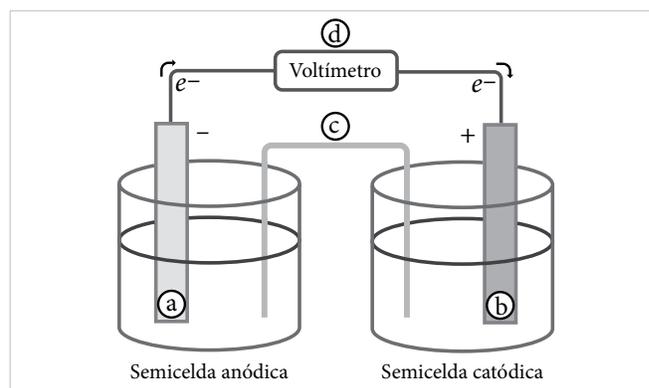


Figura 4. Configuración de una celda electroquímica.

Ahora, según Can et al. [61], la eficiencia de estos sistemas se determina a través de las variables de la eficiencia en la remoción del contaminante de interés (Ecuación 4), el consumo energético específico del tratamiento (Ecuación 5), la eficiencia anódica (Ecuación 6) y la eficiencia de la corriente instantánea (Ecuación 7).

a) Eficiencia de remoción (E):

$$E = \frac{Ci - Cf}{Ci} * 100 \quad (4)$$

donde E: eficiencia de remoción (%), Ci: concentración inicial del contaminante (mg/L), Cf: concentración final del contaminante (mg/L) y 100: factor porcentual.

b) Consumo de energía específico (CEE):

$$CEE = \frac{V * I * t}{X_{rem}} \quad (5)$$

donde CEE: consumo de energía específico (kWh/kg X), V: voltaje a través de electrodos (V=W/A), I: corriente en amperios (A), t: tiempo de electrólisis (h) y X: contaminante a analizar.

c) Eficiencia anódica (η):

$$\eta = \frac{\Delta(X_{exp}) * Vs}{I * t * S_{ánodo}} \quad (6)$$

donde η: eficiencia anódica (mg X/Ahm<sup>2</sup>), Vs: volumen solución (muestra)(L), I: corriente en amperios (A), t:

tiempo de electrólisis (h), S<sub>ánodo</sub>: área activa del ánodo (m<sup>2</sup>) y X: contaminante a analizar.

d) Eficiencia de corriente instantánea (ECI):

$$ECI = \frac{F * Vs * [(X)_t - (X)_{\Delta t + t}]}{8 * I * \Delta t} * 100 \quad (7)$$

donde ECI: eficiencia de corriente instantánea (%), F: constante de Faraday (96 487 C/mol), Vs: volumen de solución (L), (X)<sub>t</sub>: concentración contaminante a determinado tiempo (g/L), (X)<sub>t+Δt</sub>: diferencia de concentración de contaminante a determinado tiempo (g/L), T: tiempo en segundos (s), 8: factor dimensional (32 g O<sub>2</sub>\*mol<sup>-1</sup>O<sub>2</sub>/4mol\*e<sup>-1</sup>\*mol<sup>-1</sup>O<sub>2</sub>) y 100: factor porcentual.

Las ventajas de la EC son su alta eficiencia en la remoción de partículas disueltas en el agua, su versatilidad por el reducido espacio que requiere para su instalación y la potencial automatización que tienen estos sistemas [62]. En este sentido, diversos estudios donde se aplicó la EC como técnica de remoción de metales pesados en el agua destinada para consumo humano reportaron porcentajes de remoción significativos para Cr (98.2 %) [63], As (≥99 %) [62] y Fe (99.99 %) [64] en pruebas hechas en aguas naturales y sintéticas.

La comparativa de eficiencias obtenidas en cada método mencionado se presentan en la [Tabla 2](#).

TABLA 2  
EFICIENCIAS DE REMOCIÓN

MÉTODO	METALES	INSUMOS	[I]	TR	FLUJO	AGUA	EFICIENCIA	REF.
CQ	Cd, Cr, Cu, Ni, Pb	MgO	N/D	N/D	Batch	Sintética	95 %	[25]
CF	As	AlCl <sub>3</sub> /AR204-UZRA	0.1	45	Continuo	Sintética	97 %	[23]
	As <sup>5+</sup> /As <sup>3+</sup>	FeCl <sub>3</sub>	0.1	0.3	Continuo	Sintética	70/95 %	[23]
	As <sup>5+</sup>	AlCl <sub>3</sub>	0.1	0.3	Continuo	Sintética	90 %	[23]
	As <sup>5+</sup> /As <sup>3+</sup>	ZrCl <sub>4</sub>	0.05	0.3	Batch	Sintética	90/25 %	[24]
	As <sup>5+</sup> /As <sup>3+</sup>	TiCl <sub>4</sub>	0.05	0.3	Batch	Sintética	95/75 %	[24]
	As <sup>5+</sup> /As <sup>3+</sup>	TiCl <sub>3</sub>	0.05	0.3	Batch	Sintética	90/85 %	[24]
NF	Mg	NF270	N/D	N/D	Continuo	Sintética	95 %	[40]
	As <sup>5+</sup> /As <sup>3+</sup>	GMF	0.004	0.8	Continuo	Pozo	95 %	[41]
AD	Ni, Pb, Zn	CHFM/RHA	N/D	2	Continuo	Sintética	99 %	[49]
	As <sup>5+</sup> , Cr <sup>6+</sup> , Pb <sup>2+</sup>	IO@CaCO <sub>3</sub>	1-30	0.2	Batch	Sintética	99 %	[51]
BA	Cd, Cr, Cu, Pb	CAA	10	2	N/D	Sintética	80 %	[48]
	Cd/Cr/Ni/Pb/Zn	MO	10-50	1	Batch	Lago	60/55/25/80/20 %	[55]
EC	As	SS	0.04-0.08	N/D	Continuo	Pozo	95 %	[62]
	As, F	SS/Fe	0.005-0.01	0.6	N/D	Pozo	99/90 %	[62]

N/D: No descrita; [I]: concentración inicial del contaminante en mg/L; TR: tiempo de reacción en horas; CQ: coagulación química; CF: coagulación/filtración; BA: bioabsorbentes; SS: acero inoxidable; CAA: carbón activado de alga; IO@CaCO<sub>3</sub>: adsorbente magnético mesoporoso a base de carbonato; CHFM/RHA: membrana cerámica de fibra hueca con ceniza de cáscara de arroz; RHA, Ref.: referencia bibliográfica.

## COSTOS DE PRODUCCIÓN

Los métodos de precipitación o tratamientos fisicoquímicos (TFQ) predominan en entornos donde las condiciones económicas impiden la construcción y operación de sistemas alternativos de procesamiento, ya que con relación al costo-beneficio los primeros requieren una inversión inferior en infraestructura y operación y su eficiencia en la remoción de múltiples variables es mayor en algunos casos. Sin embargo, en la operación de los sistemas de TFQ dicha relación puede llegar a superar a los reportados para algunas tecnologías de membranas. Así pues, con relación a la producción de agua potable por medio de TFQ, según la bibliografía, los costos están entre USD 0.01/m<sup>3</sup> a 0.027/m<sup>3</sup> aproximadamente [65], [66].

Los costos de operación y en especial el gasto energético asociado al funcionamiento de los sistemas de MF y en general de toda aquella tecnología que requiera de electricidad para funcionar, dependerán de la tarifa energética que se tenga en la región. En los métodos de microfiltración se consideran los cuatro aspectos siguientes dentro del costo de operación: gasto energético, insumos, remplazo de membranas, limpieza de membranas y mano de obra, cuya representación en el costo total de operación (USD 0.039/m<sup>3</sup>) está en el 51, 28, 6 y 15 %, respectivamente [65].

Los costos en los sistemas de UF se pueden dividir en dos partes: la primera corresponde a los costos de construcción, que rondan en los USD 256/m<sup>3</sup> de agua producida que es menor en comparación con los sistemas convencionales de filtración, ya que el área requerida para la producción de un metro cúbico de agua es un 69.6 % inferior, y la segunda se refiere a los costos de operación, que en los sistemas de UF son más elevados que los sistemas convencionales de filtración (SCF), ya que para el primer sistema se requiere una inversión por metro cúbico de USD 0.035 mientras que en los SCF es de USD 0.011 [67].

La NF es un proceso en el cual se deben evaluar varios aspectos para calcular el costo de producción por metro cúbico de agua. En este se consideran variables como el volumen total diario tratado, la presión óptima de producción, la eficiencia esperada para la remoción de contaminantes, el área de contacto de la membrana, el tiempo de retorno de la inversión y el mantenimiento, operación y procesos previos existentes al tratamiento

por NF. En este sentido, la implementación de un sistema de NF acoplado, posteriormente, a uno convencional de tratamiento puede representar un costo adicional de USD 0.13/m<sup>3</sup> correspondiente a una recuperación del 68 % de los contaminantes orgánicos presentes en el agua, utilizando membranas comerciales NF255-400 [68] fabricadas por Filmtec Co. Por otro lado, en las membranas de intercambio iónico AMX y CMX Neosepta fabricadas por Tokuyama Co., que tienen la capacidad de retener iones monovalentes y divalentes, se han evaluado los costos asociados al tratamiento directo de aguas salinas utilizando sistemas combinados que ayuden a aumentar la recuperación de compuestos. Por ejemplo, utilizando sistemas dobles de NF se consiguió bajar 79.2 % la concentración de boro con un costo de producción de USD 0.098/m<sup>3</sup>, y donde más del 84.69 % de este recae en los costos de mantenimiento del sistema y solo el 15.31 % en gasto energético [69]. Por otro lado, en aguas con una salinidad inferior, pero con mayor concentración de metales (Cr, Co), los costos de producción por metro cúbico se estiman en USD 0.117 [70].

El costo de producción de agua en sistemas de OI se calcula mediante la consideración del gasto energético, el personal de operación, los insumos químicos de lavado de filtros y el mantenimiento del sistema de potabilización, entre otros aspectos. Con este fin se calcularon para el año 2016 valores netos de producción de USD 0.33/m<sup>3</sup>, incluidos los correspondientes el proceso de recirculación de los rechazos. Cabe resaltar que los costos más representativos de la operación de los sistemas de OI provienen del gasto energético, ya que estos representan más del 60 % del costo total de operación [46].

Por otro lado, el carbón activado es un compuesto adsorbente utilizado para la remoción de metales pesados en el agua, sin embargo, este compuesto típicamente es utilizado de manera complementaria en los métodos convencionales de potabilización debido a su alto costo de adquisición que ronda los USD 0.092/g [56]. Esto quiere decir que su aplicación directa como método de remoción es limitado. Es por esto que la presencia de adsorbentes con compuestos metálicos se ha desarrollado para la remoción directa o complementaria. Por ejemplo, se han estudiado adsorbentes como espuma de poliuretano porosa dopada con nanopartículas de óxido de hierro (PU-IONP, por sus siglas en inglés), alúmina activada (AA), hidrato de óxido de hierro (HFOR, por sus siglas en inglés) y hierro cero valente a nanoescala (nZVI, por sus siglas en inglés) para la remoción

de metales y cuyos costos de fabricación se encuentran en USD 0.40/g, USD 0.50/g, USD 1.29/g y USD 10.69/g, respectivamente [71].

La EC es un proceso en el cual el gasto energético representa un porcentaje significativo del gasto operativo del sistema. Otras variables, como pH, concentración del contaminante, intensidad de corriente aplicada, velocidad de mezcla, tiempo de reacción, electrodos empleados y la tarifa energética, pueden influir en el costo final del proceso; empero, estos costos, suponiendo escenarios de máximo y mínimos consumos electródicos (MAEC) de operación, se pueden hallar entre USD 0.014/m<sup>3</sup> y USD 0.173/m<sup>3</sup>, utilizando electrodos de aluminio [72]. No obstante, en los métodos de EC donde se emplean coagulantes como catalizadores del proceso, el costo de operación puede incrementarse hasta USD 0.49/m<sup>3</sup> [73].

En la [Tabla 3](#) se muestra el consolidado de los costos asociados a los métodos contenidos en el presente artículo.

#### IV. CONCLUSIONES

En la actualidad existe una gran variedad de métodos para la remoción de metales pesados tanto comerciales como alternativos. Gran parte de estos han sido pensados y aplicados en el tratamiento de aguas residuales de los sectores mineros, textiles y metalúrgicos, entre otros. Sin embargo, en el sector de potabilización, estos métodos se ven reducidos a cuatro enfoques: químicos, por membranas, adsorbentes y electroquímicos. Dentro de estos, los que tienen una mayor aplicación en la sociedad actual son los métodos químicos y por membranas. Además, los medios de remoción son variados en cada tecnología, es decir, no existe un solo compuesto que se asocie a un método en específico, por lo que estas tecnologías se ajustan a las necesidades de la población, sus presupuestos y la calidad, tanto de la fuente de agua que se tenga como de los requerimientos para su uso. También, la versatilidad de las tecnologías ha evolucionado con el tiempo, pasando de ser un conjunto de técnicas pensadas para instalaciones tecnificadas, a herramientas susceptibles a utilizarse en entornos individuales.

Por otro lado, considerando únicamente los costos de operación, se encontró que los sistemas de tratamiento convencionales (físicoquímicos) son los que acarrearán el menor costo de operación y que la técnica más costosa de operar es la tecnología de ósmosis inversa. Ahora, los mayores costos identificados para la primera se ven

Tabla 3  
COSTOS DE LOS TRATAMIENTOS

MÉTODO	GASTOS	COSTOS	AÑO	REF.
CC	Coa	0.0170 USD/m <sup>3</sup>	2013	[65]
	Eel	0.0002 USD/m <sup>3</sup>		
	Ope	0.0100 USD/m <sup>3</sup>		
CC	Coa	0.0038 USD/m <sup>3</sup>	2020	[66]
	Eel	0.0012 USD/m <sup>3</sup>		
	Ope	0.0074 USD/m <sup>3</sup>		
CC	Coa	0.0010 USD/m <sup>3</sup>	2020	[66]
	Eel	0.0012 USD/m <sup>3</sup>		
	Ope	0.0074 USD/m <sup>3</sup>		
MF	Eel	0.0200 USD/m <sup>3</sup>	2013	[65]
	M	0.0110 USD/m <sup>3</sup>		
	Man	0.0027 USD/m <sup>3</sup>		
	Mob	0.0056 USD/m <sup>3</sup>		
MF	Con	256 USD/m <sup>3</sup>	2013	[67]
	Man	0.0041 USD/m <sup>3</sup>		
	Eel	0.0313 USD/m <sup>3</sup>		
NF	O/M_Rec: 68 %	0.1556 USD/m <sup>3</sup>	2006	[68]
	O/M_Rec: 83 %	0.1154 USD/m <sup>3</sup>		
NF	Eel	0.0150 USD/m <sup>3</sup>	2009	[42]
	O/I	0.0830 USD/m <sup>3</sup>		
NF	Eel	0.0410 USD/m <sup>3</sup>	2012	[70]
	Rec	0.0590 USD/m <sup>3</sup>		
	Ins	0.0080 USD/m <sup>3</sup>		
	Mem	0.0090 USD/m <sup>3</sup>		
OI	Eel	0.2040 USD/m <sup>3</sup>	2016	[67]
	Mob	0.0930 USD/m <sup>3</sup>		
	Ins	0.0040 USD/m <sup>3</sup>		
	Man	0.0309 USD/m <sup>3</sup>		
AD	CA	0.0920 USD/g	2019	[56]
ADA	PU-IONP	0.4000 USD/g	2017	[71]
	AA	0.5000 USD/g		
	HFOR	1.2500 USD/g		
	nZVI	10.690 USD/g		
EC	MAEC: 0.025 mg/m <sup>3</sup>	0.0140 USD/m <sup>3</sup>	2019	[72]
	MAEC: 0.525 mg/m <sup>3</sup>	0.1730 USD/m <sup>3</sup>		
EC	SS	0.1300 USD/m <sup>3</sup>	2013	[65]
	Al	0.5480 USD/m <sup>3</sup>		

Coa: coagulación; Eel: energía eléctrica; Ope: operación; Mem: membrana; Man: mantenimiento; Mob: mano de obra; Con: construcción; O/M\_Rec: operación/mantenimiento; O/I: operación/instalación; Rec: rechazo; Ins: insumos; CA: carbón activado; MAEC: escenario de máximo y mínimos consumos; USD/m<sup>3</sup>; costo en dólares por metro cúbico de agua tratada; USD/g: costo en dólares por gramo requerido para el tratamiento del agua.

reflejados en la operación de las múltiples etapas que requiere esta tecnología, sin embargo, en los sistemas de OI, los mayores costos recaen sobre el gasto energético, por lo que es imprescindible que en caso de optar por este sistema de potabilización se cuente con sistemas de alimentación eléctrica independientes, es decir, cuenten con mecánicos de autogeneración eléctrica para reducir significativamente los costos de potabilización.

Por otra parte, se identificó que los costos de potabilización pueden variar de acuerdo con los contaminantes y la eficiencia de remoción buscados, por lo que se requiere investigar específicamente los costos que implica

la remoción de cada contaminante antes de seleccionar la técnica a implementar.

Por último, la viabilidad de un método no se debe basar solo en su costo de operación, ya que existen condiciones de flujo y calidad que requieren tecnologías específicas para alcanzar las metas de potabilización que se fijen en el proyecto y que estará basada en las normas de calidad de agua de cada país (para México aplica la NOM-127-SSA1-1994), por lo que se recomienda evaluar los pros y contras de cada tecnología antes de decidirse por una.

## REFERENCIAS

- [1] WWAP (Programa Mundial de Evaluación de los Recursos Hídricos de las Naciones Unidas), *Informe Mundial de las Naciones Unidas sobre el Desarrollo de los Recursos Hídricos 2017. Aguas residuales: El recurso desaprovechado*. París: UNESCO, 2017.
- [2] F. I. Arreguín-Cortés, R. Chávez-Guillén, P. R. Soto-Navarro y P. L. Smedley, "An overview of arsenic occurrence in the groundwater of Mexico", en *Understanding the Geological and Medical Interface of Arsenic - As 2012*, J. C. Ng, B. N. Noller, R. Naidu, J. Bundschuh y P. Bhattacharya, eds. 1.<sup>a</sup> ed., Londres: CRC Press, 2012, pp. 91-92.
- [3] Y. C. Reyes, I. Vergara, O. E. Torres, M. Díaz y E. E. González, "Contaminación por metales pesados: implicaciones en salud, ambiente y seguridad alimentaria", *Ing. Investig. y Desarro.*, vol. 16, no. 2, pp. 66-77, sept. 2016, doi: 10.19053/1900771x.v16.n2.2016.5447.
- [4] L. Wei et al., "Transformation and speciation of typical heavy metals in soil aquifer treatment system during long time recharging with secondary effluent: Depth distribution and combination", *Chemosphere*, vol. 165, pp. 100-109, dic. 2016, doi: 10.1016/j.chemosphere.2016.09.027.
- [5] T. Tervahauta, S. Rani, L. Hernández Leal, C. J. N. Buisman y G. Zeeman, "Black water sludge reuse in agriculture: Are heavy metals a problem?", *J. Hazard. Mater.*, vol. 274, pp. 229-236, jun. 2014, doi: 10.1016/j.jhazmat.2014.04.018.
- [6] N. H. Ab Razak, S. M. Praveena, A. Z. Aris y Z. Hashim, "Drinking water studies: A review on heavy metal, application of biomarker and health risk assessment (a special focus in Malaysia)", *J. Epidemiol Glob Health*, vol. 5, no. 4, pp. 297-310, dic. 1, 2015, doi: 10.1016/j.jegh.2015.04.003.
- [7] S. Chowdhury, M. A. J. Mazumder, O. Al-Attas y T. Husain, "Heavy metals in drinking water: Occurrences, implications, and future needs in developing countries", *Sci Total Environ*, vol. 569-570, pp. 476-488, nov. 1, 2016, doi: 10.1016/j.scitotenv.2016.06.166.
- [8] Z. Sharifi, S. M. T. Hossaini y G. Renella, "Risk assessment for sediment and stream water polluted by heavy metals released by a municipal solid waste composting plant", *J. Geochemical Explor.*, vol. 169, pp. 202-210, oct. 2016, doi: 10.1016/j.gexplo.2016.08.001.
- [9] A. Rasool et al., "Arsenic and heavy metal contaminations in the tube well water of Punjab, Pakistan and risk assessment: A case study", *Ecol. Eng.*, vol. 95, pp. 90-100, oct. 2016, doi: 10.1016/j.ecoleng.2016.06.034.
- [10] C. T. Vu, C. Lin, C. C. Shern, G. Yeh, V. G. Le y H. T. Tran, "Contamination, ecological risk and source apportionment of heavy metals in sediments and water of a contaminated river in Taiwan", *Ecol. Indic.*, vol. 82, pp. 32-42, nov. 2017, doi: 10.1016/j.ecolind.2017.06.008.
- [11] A. Kovacik et al., "Seasonal variations in the blood concentration of selected heavy metals in sheep and their effects on the biochemical and hematological parameters", *Chemosphere*, vol. 168, pp. 365-371, feb. 2017, doi: 10.1016/j.chemosphere.2016.10.090.
- [12] S. B. Bandara, K. M. Towle y A. D. Monnot, "A human health risk assessment of heavy metal ingestion among consumers of protein powder supplements", *Toxicol. Reports*, vol. 7, pp. 1255-1262, en. 2020, doi: 10.1016/j.toxrep.2020.08.001.
- [13] OMS (Organización Mundial de la Salud), *Guías para la calidad del agua potable*, 3.<sup>a</sup> ed., vol. 1, Ginebra, 2008.
- [14] Minvivienda. (2007, jun. 22). *Resolución Número 2115*. [En línea]. Disponible: <https://www.minvivienda.gov.co/sites/default/files/normativa/2115 - 2007.pdf> (acceso: mar. 30, 2021).
- [15] Secretaría de Salud. (2000, oct. 20). *Modificación a la Norma Oficial Mexicana NOM-127-SSA1-1994*. [En

- línea]. Disponible: [https://www.siapa.gob.mx/sites/default/files/norma\\_oficial.pdf](https://www.siapa.gob.mx/sites/default/files/norma_oficial.pdf) (acceso: mar. 30, 2021).
- [16] G. Hu et al., “Human health risk-based life cycle assessment of drinking water treatment for heavy metal(loids) removal”, *J. Clean. Prod.*, vol. 267, p. 121980, sept. 2020, doi: 10.1016/j.jclepro.2020.121980.
- [17] M. C. Basso, E. G. Cerrella y A. L. Cukierman, “Empleo de algas marinas para la biosorción de metales pesados de aguas contaminadas”, *Av. en Energías Renov. y Medio Ambient.*, vol. 6, pp. 69-74, 2002. [En línea]. Disponible: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/80414> (acceso: feb. 18, 2021).
- [18] M. J. Rodríguez, G. Rodríguez, J. Serodes y R. Sadiq, “Subproductos de la desinfección del agua potable: Formación, aspectos sanitarios y reglamentación”, *Interciencia*, vol. 32, no. 11, pp. 749-756, 2007. [En línea]. Disponible: [http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0378-18442007001100007](http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0378-18442007001100007).
- [19] Y. Jiménez y G. Esperanza, “Evaluación de la cloración alcalina con hipoclorito de sodio comercial en el tratamiento de cianuros alcalinos altamente peligrosos”, *Rev. Cuba. Química*, vol. XVII, no. 3, p. 86, 2005. [En línea]. Disponible: <https://www.redalyc.org/pdf/4435/443543687028.pdf> (acceso: mar. 30, 2021).
- [20] J. L. Berdonces, “La problemática del tratamiento del agua potable”, *Med. Natur.*, vol. 2, no. 2, pp. 69-75, 2008.
- [21] J. A. Gutiérrez-Rosero, Á. I. Ramírez-Fajardo, R. Rivas, B. Linares y D. Paredes, “Tratamiento de lodos generados en el proceso convencional de potabilización de agua”, *Rev. Ing. Univ. Medellín*, vol. 13, no. 25, pp. 13-27, 2014. [En línea]. Disponible: [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1692-33242014000200002](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1692-33242014000200002) (acceso: mar. 30, 2021).
- [22] M. T. Shaaban, H. A. H. Ibrahim, A. S. Abouhend y K. M. El-Moselhy, “Removal of Heavy Metals from Aqueous Solutions Using Multi-Metals and Antibiotics Resistant Bacterium Isolated from the Red Sea, Egypt”, *Am. J. Microbiol. Res.*, vol. 3, no. 3, pp. 93-106, 2015, doi: 10.12691/ajmr-3-3-1.
- [23] A. Oehmen et al., “Arsenic removal from drinking water through a hybrid ion exchange membrane - Coagulation process”, *Sep. Purif. Technol.*, vol. 83, no. 1, pp. 137-143, nov. 2011, doi: 10.1016/j.seppur.2011.09.027.
- [24] D. Lakshmanan, D. Clifford y G. Samanta, “Arsenic Removal by Coagulation With Aluminum, Iron, Titanium, and Zirconium”, *J. Am. Water Works Assoc.*, vol. 100, no. 2, pp. 76-88, feb. 2008, doi: 10.1002/j.1551-8833.2008.tb08144.x.
- [25] M. M. Barbooti, B. A. Abid y N. M. Al-Shuwaiki, “Removal of Heavy Metals Using Chemicals Precipitation”, *Eng. Technol. J.*, vol. 29, no. 3, pp. 595-612, 2011. [En línea]. Disponible: <https://www.iasj.net/iasj/article/26192> (acceso: feb. 18, 2021).
- [26] L. de Vargas, coord., *Tratamiento de agua para consumo humano. Plantas de filtración rápida*, t. I, Lima: OPS, 2004. [En línea]. Disponible: [http://www.ingenieriasanitaria.com.pe/pdf/manual1/tomol/mal\\_tomo1\\_indice.pdf](http://www.ingenieriasanitaria.com.pe/pdf/manual1/tomol/mal_tomo1_indice.pdf) (acceso: may. 3, 2022).
- [27] D. I. Caviedes, R. A. Muñoz, A. Perdomo, D. Rodríguez y I. J. Sandoval, “Tratamientos para la Remoción de Metales Pesados Comúnmente Presentes en Aguas Residuales Industriales. Una Revisión”, *Ing. y Región*, vol. 13, no. 1, p. 73, 2015, doi: 10.25054/22161325.710.
- [28] M. H. Córdova, R. Vargas, M. F. Cesare, L. Flores y L. Visitación, “Tratamiento de las aguas residuales del proceso de curtido tradicional y alternativo que utiliza complejantes de cromo”, *Rev Soc Quím Perú*, vol. 80, no. 3, 2014.
- [29] Á. Quishpe, E. De la Torre y A. Guevara, “Tratamiento de efluentes líquidos de la industria de curtido mediante precipitación química, adsorción con carbón activado y rizofiltración”, *Rev. Politécnica*, vol. 31, 2012. [En línea]. Disponible: [http://revistapolitecnica.epn.edu.ec/ojs2/index.php/revista\\_politecnica2/article/view/200](http://revistapolitecnica.epn.edu.ec/ojs2/index.php/revista_politecnica2/article/view/200).
- [30] L. Y. Blue, M. A. Van Aelstyn, M. Matlock y D. A. Atwood, “Low-level mercury removal from ground-water using a synthetic chelating ligand”, *Water Res.*, vol. 42, no. 8-9, pp. 2025-2028, 2008, doi: 10.1016/J.WATRES.2007.12.010.
- [31] M. C. Grueso-Dominguez, C. C. Castro-Jiménez, M. A. Correa-Ochoa y J. C. Saldarriaga-Molina, “Estado del arte: desalinización mediante tecnologías de membrana como alternativa frente al problema de escasez de agua dulce”, *Rev. Ing. Univ. Medellín*, vol. 18, no. 35, pp. 69-89, 2019, doi: 10.22395/rium.v18n35a5.

- [32] A. D. Ortega, V. Barbosa, V. M. Cartana, A. Hemke-meier y M. T. Friedrich, "Stormwater management by microfiltration and ultrafiltration treatment", *J. Water Process Eng.*, vol. 30, p. 100453, ag. 2019, doi: 10.1016/j.jwpe.2017.07.018.
- [33] R. Wang et al., "Nanofibrous microfiltration membranes capable of removing bacteria, viruses and heavy metal ions", *J. Memb. Sci.*, vol. 446, pp. 376-382, nov. 2013, doi: 10.1016/j.memsci.2013.06.020.
- [34] X. Liu, B. Jiang, X. Yin, H. Ma y B. S. Hsiao, "Highly permeable nanofibrous composite microfiltration membranes for removal of nanoparticles and heavy metal ions", *Sep. Purif. Technol.*, vol. 233, p. 115976, feb. 2020, doi: 10.1016/j.seppur.2019.115976.
- [35] T. Urošević y K. Trivunac, "Achievements in low-pressure membrane processes microfiltration (MF) and ultrafiltration (UF) for wastewater and water treatment", en *Current Trends and Future Developments on (Bio-) Membranes*, A. Basile y K. Ghasemzadeh, eds. Elsevier, 2020, cap. 3, pp. 67-107, doi: 10.1016/B978-0-12-817378-7.00003-3.
- [36] S. Shahrin et al., "Development of adsorptive ultrafiltration membranes for heavy metal removal", en *Advanced Nanomaterials for Membrane Synthesis and Its Applications*. Elsevier, 2019, cap. 1, pp. 1-22, doi: 10.1016/B978-0-12-814503-6.00001-X.
- [37] M. Chandrashekhar Nayak, A. M. Isloor, Inamuddin, B. Lakshmi, H. M. Marwani y I. Khan, "Polyphenylsulfone/multiwalled carbon nanotubes mixed ultrafiltration membranes: Fabrication, characterization and removal of heavy metals  $Pb^{2+}$ ,  $Hg^{2+}$ , and  $Cd^{2+}$  from aqueous solutions", *Arab. J. Chem.*, vol. 13, no. 3, pp. 4661-4672, mar. 2019, doi: 10.1016/j.arabjc.2019.10.007.
- [38] M. Khayet, M. N. A. Seman y N. Hilal, "Response surface modeling and optimization of composite nanofiltration modified membranes", *J. Memb. Sci.*, vol. 349, no. 1-2, pp. 113-122, mar. 2010, doi: 10.1016/j.memsci.2009.11.031.
- [39] B. Tansel y N. Dizge, "Multi objective performance analysis of nanofiltration process to loading parameters by response surface approach", *Desalination*, vol. 272, no. 1-3, pp. 164-169, may. 2011, doi: 10.1016/j.desal.2011.01.012.
- [40] S. Cheng, D. L. Oatley, P. M. Williams y C. J. Wright, "Positively charged nanofiltration membranes: Review of current fabrication methods and introduction of a novel approach", *Adv Colloid Interface Sci.*, vol. 164, nos. 1-2, pp. 12-20, may. 11, 2011, doi: 10.1016/j.cis.2010.12.010.
- [41] E. Roy, S. Patra, R. Madhuri y P. K. Sharma, "A single solution for arsenite and arsenate removal from drinking water using cysteine@ZnS:TiO<sub>2</sub> nanoparticle modified molecularly imprinted biofouling-resistant filtration membrane", *Chem. Eng. J.*, vol. 304, pp. 259-270, nov. 2016, doi: 10.1016/j.cej.2016.06.064.
- [42] L. F. Greenlee, D. F. Lawler, B. D. Freeman, B. Marrot y P. Moulin, "Reverse osmosis desalination: Water sources, technology, and today's challenges", *Water Research*, vol. 43, no. 9, pp. 2317-2348, may. 01, 2009, doi: 10.1016/j.watres.2009.03.010.
- [43] A. Saavedra, H. Valdés y C. Zúñiga, *Manual técnico de desalación y purificación de aguas mediante ósmosis inversa*. 2022.
- [44] C. Corroto, A. Pérez, E. Calderón y A. Fernández, "Alternativas de Remoción de Arsénico en Aguas de Rechazo de Plantas de Ósmosis Inversa", Ministerio de Obras Públicas Argentina, 2012. [En línea]. Disponible: <https://xdoc.mx/documents/alternativas-de-remocion-de-arsenico-en-aguas-de-rechazo-de-5ddae55b25c4a> (acceso: feb. 18, 2021).
- [45] R. Rivas-Perez, J. Sotomayor-Moriano, C. G. Perez-Zuñiga y E. M. Calderon-Mendoza, "Diseño de un GPC multivariable basado en una PC industrial para el control de una unidad de ósmosis inversa de una industria farmacéutica", *Rev. Mex. Ing. Quím.*, vol. 15, no. 1, pp. 259-273, 2016. [En línea]. Disponible: [http://www.scielo.org.mx/article\\_plus.php?pid=S1665-27382016000100259&tlng=es&lng=es](http://www.scielo.org.mx/article_plus.php?pid=S1665-27382016000100259&tlng=es&lng=es) (acceso: feb. 18, 2021).
- [46] G. E. Dévora-Isiordia, M. E. López-Mercado, G. A. Fimbres-Weihs, J. Álvarez-Sánchez y S. Astorga-Trejo, "Desalación por ósmosis inversa y su aprovechamiento en agricultura en el valle del Yaqui, Sonora, México", *Tecnol. cienc. agua*, vol. 7, no. 3, 2016. [En línea]. Disponible: [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2007-24222016000300155](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-24222016000300155) (acceso: feb. 18, 2021).

- [47] S. Sahuquillo, S. Muñoz y C. Pérez, "Proyecto Remembrance: recuperación de las membranas de ósmosis inversa al final de su vida útil", *TECNOAQUA*, vol. 1, no. 16, pp. 2-6, dic. 2015. [En línea]. Disponible: [www.tecnoaqua.es](http://www.tecnoaqua.es) (acceso: may. 02, 2022).
- [48] W. M. Ibrahim, A. F. Hassan y Y. A. Azab, "Biosorption of toxic heavy metals from aqueous solution by *Ulva lactuca* activated carbon", *Egypt. J. Basic Appl. Sci.*, vol. 3, no. 3, pp. 241-249, sept. 2016, doi: [10.1016/j.ejbas.2016.07.005](https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2016.07.005).
- [49] S. K. Hubadillah, M. H. D. Othman, Z. Harun, A. F. Ismail, M. A. Rahman y J. Jaafar, "A novel green ceramic hollow fiber membrane (CHFM) derived from rice husk ash as combined adsorbent-separator for efficient heavy metals removal", *Ceram. Int.*, vol. 43, no. 5, pp. 4716-4720, abr. 2017, doi: [10.1016/j.ceramint.2016.12.122](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2016.12.122).
- [50] I. Martínez, "Eliminación de compuestos organoclorados para potabilización de aguas", tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 2003. [En línea]. Disponible: <https://www.semanticscholar.org/paper/Eliminación-de-compuestos-organoclorados-para-de-Martínez/c43cf451c4b65d0370f6c318a913b0df5662f3bc> (acceso: may. 2, 2022).
- [51] M. S. Islam, W. S. Choi, B. Nam, C. Yoon y H. J. Lee, "Needle-like iron oxide@CaCO<sub>3</sub> adsorbents for ultrafast removal of anionic and cationic heavy metal ions", *Chem. Eng. J.*, vol. 307, pp. 208-219, en. 2017, doi: [10.1016/j.cej.2016.08.079](https://doi.org/10.1016/j.cej.2016.08.079).
- [52] B. Lapo, H. Demey, J. Zapata, C. Romero y A. M. Sastre, "Sorption of Hg(II) and Pb(II) ions on chitosan-iron(III) from aqueous solutions: Single and binary systems", *Polymers*, vol. 10, no. 4, 2018, doi: [10.3390/polym10040367](https://doi.org/10.3390/polym10040367).
- [53] F. J. Cerino et al., "Response surface methodology for lead biosorption on *Aspergillus terreus*", *Int. J. Environ. Sci. Technol.*, vol. 8, pp. 695-704, 2011, doi: [10.1007/BF03326254](https://doi.org/10.1007/BF03326254).
- [54] P. Gupta y B. Diwan, "Bacterial Exopolysaccharide mediated heavy metal removal: A Review on biosynthesis, mechanism and remediation strategies", *Biotechnology Reports*, vol. 13, pp. 58-71, mar. 1, 2017, doi: [10.1016/j.btre.2016.12.006](https://doi.org/10.1016/j.btre.2016.12.006).
- [55] K. S. George, K. B. Revathi, N. Deepa, C. P. Sheregar, T. S. Ashwini y S. Das, "A Study on the Potential of Moringa Leaf and Bark Extract in Bioremediation of Heavy Metals from Water Collected from Various Lakes in Bangalore", *Procedia Environ. Sci.*, vol. 35, pp. 869-880, en. 2016, doi: [10.1016/j.proenv.2016.07.104](https://doi.org/10.1016/j.proenv.2016.07.104).
- [56] S. Richards, J. Dawson y M. Stutter, "The potential use of natural vs commercial biosorbent material to remediate stream waters by removing heavy metal contaminants", *J. Environmental Manag.*, vol. 231, pp. 275-281, 2018, doi: [10.1016/j.jenvman.2018.10.019](https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2018.10.019).
- [57] Y. Dan, L. Xu, Z. Qiang, H. Dong y H. Shi, "Preparation of green biosorbent using rice hull to preconcentrate, remove and recover heavy metal and other metal elements from water", *Chemosphere*, vol. 262, p. 127940, en. 2021, doi: [10.1016/J.CHEMOSPHERE.2020.127940](https://doi.org/10.1016/J.CHEMOSPHERE.2020.127940).
- [58] E. Gilpavas, E. D. Arbeláez, L. M. Sierra, C. White, C. Oviedo y P. A. Restrepo, *Aplicación de la electroquímica en el tratamiento de aguas residuales* (Serie Cuadernos de Investigación), no. 65. Medellín: Universidad EAFIT, 2008.
- [59] J. C. Gil, "Tratamiento electroquímico para la remoción de metales pesados en residuos líquidos peligrosos generados en los laboratorios de docencia de la Universidad del Cauca", tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali, 2012.
- [60] J. R. Parga et al., "Arsenic removal via electrocoagulation from heavy metal contaminated groundwater in La Comarca Lagunera México", *J. Hazard. Mater.*, vol. 124, no. 1-3, pp. 247-254, sept. 2005, doi: [10.1016/j.jhazmat.2005.05.017](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2005.05.017).
- [61] O. T. Can, E. Gengec y M. Kobya, "TOC and COD removal from instant coffee and coffee products production wastewater by chemical coagulation assisted electrooxidation", *J. Water Process Eng.*, vol. 28, pp. 28-35, abr. 2019, doi: [10.1016/J.JWPE.2019.01.002](https://doi.org/10.1016/J.JWPE.2019.01.002).
- [62] M. López-Guzmán, M. T. Alarcón-Herrera, J. R. Iriyoyen-Campuzano, L. A. Torres-Castañón y L. Reynoso-Cuevas, "Simultaneous removal of fluoride and arsenic from well water by electrocoagulation", *Sci. Total Environ.*, vol. 678, pp. 181-187, ag. 2019, doi: [10.1016/j.scitotenv.2019.04.400](https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.04.400).

- [63] S. Vasudevan, J. Lakshmi y G. Sozhan, "Studies on the Al-Zn-In-alloy as anode material for the removal of chromium from drinking water in electrocoagulation process", *Desalination*, vol. 275, no. 1-3, pp. 260-268, jul. 2011, doi: [10.1016/j.desal.2011.03.011](https://doi.org/10.1016/j.desal.2011.03.011).
- [64] B. Abdulhadi, P. Kot, K. Hashim, A. Shaw, M. Muradov y R. Al-Khaddar, "Continuous-flow electrocoagulation (EC) process for iron removal from water: Experimental, statistical and economic study", *Sci. Total Environ.*, vol. 760, p. 143417, mar. 2021, doi: [10.1016/j.scitotenv.2020.143417](https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.143417).
- [65] C. Calderón, A. Martín, E. Mundo, P. Drogui y G. Buena, "Removal of arsenic from drinking water: A comparative study between electrocoagulation-microfiltration and chemical coagulation-microfiltration processes", *Sep. Purif. Technol.*, vol. 118, pp. 645-651, oct. 2013, doi: [10.1016/j.seppur.2013.08.011](https://doi.org/10.1016/j.seppur.2013.08.011).
- [66] K. Kalaitzidou, A. Zouboulis y M. Mitrakas, "Cost evaluation for Se(IV) removal, by applying common drinking water treatment processes: Coagulation/precipitation or adsorption", *J. Environ. Chem. Eng.*, vol. 8, no. 5, p. 104209, oct. 2020, doi: [10.1016/j.jece.2020.104209](https://doi.org/10.1016/j.jece.2020.104209).
- [67] C. M. Chew, M. K. Aroua, M. A. Hussain y W. M. Z. Wan Ismail, "Evaluation of ultrafiltration and conventional water treatment systems for sustainable development: An industrial scale case study", *J. Clean. Prod.*, vol. 112, pp. 3152-3163, en. 2016, doi: [10.1016/j.jclepro.2015.10.037](https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2015.10.037).
- [68] R. Liikanen, J. Yli-Kuivila, J. Tenhunen y R. Laukkanen, "Cost and environmental impact of nanofiltration in treating chemically pre-treated surface water", *Desalination*, vol. 201, no. 1-3, pp. 58-70, nov. 2006, doi: [10.1016/j.desal.2006.03.520](https://doi.org/10.1016/j.desal.2006.03.520).
- [69] M. Turek, P. Dydo y B. Bandura-Zalska, "Boron removal from dual-staged seawater nanofiltration permeate by electrodialysis", *Desalin. Water Treat.*, vol. 10, no. 1-3, pp. 60-63, 2009, doi: [10.5004/dwt.2009.782](https://doi.org/10.5004/dwt.2009.782).
- [70] M. Giagnorio, S. Steffenino, L. Meucci, M. C. Zanetti y A. Tiraferri, "Design and performance of a nanofiltration plant for the removal of chromium aimed at the production of safe potable water", *J. Environ. Chem. Eng.*, vol. 6, no. 4, pp. 4467-4475, ag. 2018, doi: [10.1016/j.jece.2018.06.055](https://doi.org/10.1016/j.jece.2018.06.055).
- [71] F. B. Hussein y N. H. Abu-Zahra, "Extended performance analysis of polyurethane-iron oxide nanocomposite for efficient removal of arsenic species from water", *Water Supply*, vol. 17, no. 3, pp. 889-896, 2017, doi: [10.2166/ws.2016.188](https://doi.org/10.2166/ws.2016.188).
- [72] F. Y. AlJaberi, "Operating cost analysis of a concentric aluminum tubes electrodes electrocoagulation reactor", *Heliyon*, vol. 5, no. 8, p. e02307, ag. 2019, doi: [10.1016/j.heliyon.2019.e02307](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02307).
- [73] E. Lacasa, P. Cañizares, C. Sáez, F. Martínez y M. A. Rodrigo, "Modelling and cost evaluation of electro-coagulation processes for the removal of anions from water", *Sep. Purif. Technol.*, vol. 107, pp. 219-227, abr. 2013, doi: [10.1016/j.seppur.2013.01.035](https://doi.org/10.1016/j.seppur.2013.01.035).

# Electrocoagulación de iones de metales pesados en aguas residuales: Una revisión

## *Electrocoagulation of heavy metal ions in wastewater: A review*

Humberto Rubí-Juárez<sup>1</sup>✉, Marisela Yadira Soto-Padilla<sup>1</sup>, Miguel Domínguez-Acosta<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.

### RESUMEN

La presencia de metales pesados en el agua para consumo humano tiene su origen en las actividades antropogénicas o en procesos naturales. Los seres humanos pueden estar expuestos a 23 de estos minerales que son tóxicos en dosis grandes o pequeñas y pueden afectar diversos órganos, desencadenar enfermedades como Parkinson y Alzheimer por acumulación progresiva o provocar cáncer. Los métodos de tratamiento pretenden abatir la concentración de metales pesados en matrices acuosas, al mismo tiempo que se manifiestan como una solución. La tecnología electroquímica denominada electrocoagulación ha sido usada con éxito para remover cadmio, cobre, cromo, manganeso, mercurio, níquel y zinc en el laboratorio sin descartar, aunque con menor frecuencia, la escala piloto. Se revisaron artículos sobre investigaciones en este tema desarrolladas entre 2015 y 2022 en diversos países y se concluye que electrocoagulación tiene el potencial para propiciar un uso exitoso en plantas de tratamiento pequeñas debido a sus ventajas, entre ellas que no requiere del suministro suplementario de algún compuesto químico en su concepción más básica, genera menor cantidad de lodos, la selección de los materiales electródicos y el acomodo dentro de la celda son relevantes para lograr resultados superiores y el costo energético razonable por cada metro cúbico de agua procesada.

**PALABRAS CLAVE:** metales pesados; método electroquímico; electrocoagulación.

### ABSTRACT

The presence of heavy metals in water for human consumption has its origin in anthropogenic activities or in natural processes. Human beings can be exposed to 23 of these minerals that are toxic in large or small doses and can affect various organs, trigger diseases such as Parkinson's and Alzheimer's due to progressive accumulation or cause cancer. Treatment methods aim to lower the concentration of heavy metals in aqueous matrices, while manifesting as a solution. The electrochemical technology called electrocoagulation has been used successfully to remove cadmium, copper, chromium, manganese, mercury, nickel and zinc in the laboratory without ruling out, although less frequently, the pilot scale. Articles on research on this topic developed between 2015 and 2022 in various countries were reviewed and it was concluded that electrocoagulation has the potential to promote successful use in small treatment plants due to its advantages, including that it does not require the supplementary supply of any compound chemical in its most basic conception, generates less sludge, the selection of electrode materials and the arrangement within the cell are relevant to achieve superior results, and reasonable energy cost for each cubic meter of water processed.

**KEYWORDS:** heavy metals; electrochemical method; electrocoagulation.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Humberto Rubí Juárez

**INSTITUCIÓN:** Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

**DIRECCIÓN:** Av. del Charro núm. 450 norte, col. Partido Romero, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México

**CORREO ELECTRÓNICO:** humberto.rubi@uacj.mx

**Fecha de recepción:** 24 de junio de 2022. **Fecha de aceptación:** 24 de agosto de 2022. **Fecha de publicación:** 31 de agosto de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

Los metales pesados se definen por alguna de las siguientes propiedades: densidad, peso atómico, número atómico, químicas, toxicidad y no químicas [1]. La densidad constituye el atributo más contundente para varios autores [2], [3], [4], [5], [6]. Los metales o metaloides que poseen una densidad superior a 4 g/cm<sup>3</sup> y en algunas ocasiones desde 3.5 g/cm<sup>3</sup> son los que frecuentemente se especifican como metales pesados. La sugerencia para un término más comprensible involucró el requisito de un número atómico superior a 20 y la procedencia natural [7].

Los metales pesados pueden concentrarse en el medio ambiente en forma natural o antropogénica. La primera abarca hábitats terrestres, marinos y de aguas dulces [4]. El aporte de estos minerales se debe a la erosión de material sólido, vulcanismo, extracción de sedimentos y transporte como partículas. Las cantidades en lagos y lagunas están sujetas a factores de compuestos complejos orgánicos, pH, ligandos orgánicos e intensidad de adsorción en partículas, entre otros [8]. También contribuyen las transformaciones geológicas, como meteorización mineral, erosión y erupciones volcánicas [9] y se ha detectado la presencia de zinc, cobre, plomo, fierro, níquel, cromo, cobalto y manganeso en el polvo atmosférico depositado en las hojas de plantas o los árboles [10].

Igualmente, la actividad humana influye en la propagación de metales pesados. El tipo de estos varía según el producto consumido, desde arsénico en pesticidas, conservantes de madera y biosólidos, hasta plomo en residuos de baterías, insecticidas y herbicidas. Asimismo, se consideran cadmio, cobre, cromo, mercurio y níquel [11]. Específicamente, la práctica industrial tiene una importante coparticipación en estos procesos debido a la minería, la fundición, la galvanoplastia y la descarga de aguas residuales, además de la agricultura por los fertilizantes fosfatados y la erosión inducida [9], [12].

La exposición a la que puede estar sujeto el ser humano abarca 23 metales pesados [3]. El cobalto, cobre, cromo, hierro, manganeso, níquel y cinc son parte necesaria de la dieta en varias funciones fisiológicas y bioquímicas [13], sin embargo, en dosis o cantidades grandes pueden ser tóxicos [3], [14]. La toxicidad se manifiesta principalmente en órganos como pulmones, hígado, riñones y piel. La acumulación de estos minerales puede causar debilidad muscular, daños al sistema nervioso central y

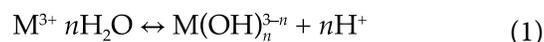
degeneración neurológica que puede progresar hacia la enfermedad de Parkinson o Alzheimer. La exposición reiterada posibilita la aparición de cáncer [3], [14], [15], [16].

La realidad reconocida por las repercusiones de la exposición a metales pesados en fase acuosa ha motivado la investigación de métodos de tratamiento. La clasificación se ha detallado en no convencionales y convencionales. Los primeros, cuya investigación se ha intensificado más recientemente, son adsorción con diversos adsorbentes, celdas combustible microbianas, nanotecnología, oxidación tipo Fenton y fitorremediación [16]. Los segundos admiten precipitación química, coagulación/floculación, filtración por membranas, intercambio iónico y electroquímicos [15], [16].

Las tecnologías electroquímicas han adquirido relevancia en la remoción de metales pesados por sus numerosos enfoques disponibles, como electrodeposición, electroflotación, electrosorción, electrodiálisis, electrodeionización y electrocoagulación [17]. La electrocoagulación ha sido usada extensamente con éxito para cadmio, cobre, cromo, manganeso, mercurio, níquel, vanadio y cinc [18], [19], entre otros. Por esta razón se han elegido para esta revisión versiones de ese tratamiento en aguas residuales sintéticas o nativas a escala laboratorio o piloto. Asimismo, en este artículo se presenta la recopilación de algunas investigaciones desarrolladas en diversos países entre 2015 y 2022. La descripción de cada una de ellas resume el objetivo y las condiciones experimentales, incluyendo variables esenciales, por ejemplo, intensidad de corriente, tiempo de reacción y material eléctrico, además de los resultados más destacados.

## II. PRINCIPIO DE LA ELECTROCOAGULACIÓN

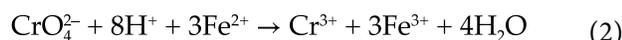
La coagulación, después de la incorporación de una sal al agua, introduce cationes metálicos, mientras que la electrocoagulación crea esos mismos iones por la corriente eléctrica que pasa por electrodos. Los cationes polivalentes comunes a ambos forman un acuoión que inicia la desprotonación espontánea sucesiva hasta formar especies monoméricas, hidroxocomplejos con iones hidróxido y especies poliméricas [20], [21]. Las reacciones que normalmente se reportan son con aluminio o hierro [20]:



Los  $M(OH)_n$  producidos, donde  $M = Fe$  o  $Al$ , inducen sorción, coprecipitación o atracción electrostática se-

guida de la coagulación *per se* [22], [23]. La cantidad de lodo que precipita es reducida debido a que no se requiere el suministro adicional de químicos [24], [25]. Los iones de hierro pueden ser liberados equivalentemente desde un electrodo de acero inoxidable como ferroso ( $\text{Fe}^{2+}$ ) o férrico ( $\text{Fe}^{3+}$ ) [20].

La electrocoagulación, que por definición también se extiende a iones disueltos [26], se lleva a cabo por otros mecanismos. El ejemplo conocido es la creación de  $\text{Cr}^{3+}$  que posteriormente precipitará como hidróxido de cromo (III):



La clave se concede a una reducción de  $\text{Cr}^{6+}$  a  $\text{Cr}^{3+}$  facilitada por los iones  $\text{Fe}^{2+}$  con la concomitante oxidación a iones  $\text{Fe}^{3+}$  [27], [28]. El anión con  $\text{Cr}^{6+}$  dependerá del pH de la solución preservando el dicromato  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ , hidrogenocromato  $\text{HCrO}_4^-$  o cromato  $\text{CrO}_4^{2-}$ .

La conformación elemental demanda que los dos electrodos, cátodo y ánodo, estén sumergidos en agua. Los extremos no inmersos se sujetan a las puntas caimán de los cables que se conectan, mediante las puntas banana, a las terminales de una fuente de alimentación. El encendido con el interruptor permite la activación de la diferencia de potencial que impulsa el paso de la corriente eléctrica. En el ánodo comienza la electrodisolución del material electródico, frecuentemente aluminio o hierro, para generar los cationes metálicos que se transfieren a la fase acuosa donde inicia la secuencia reactiva ya descrita. La Figura 1 [21], [29] muestra los componentes.

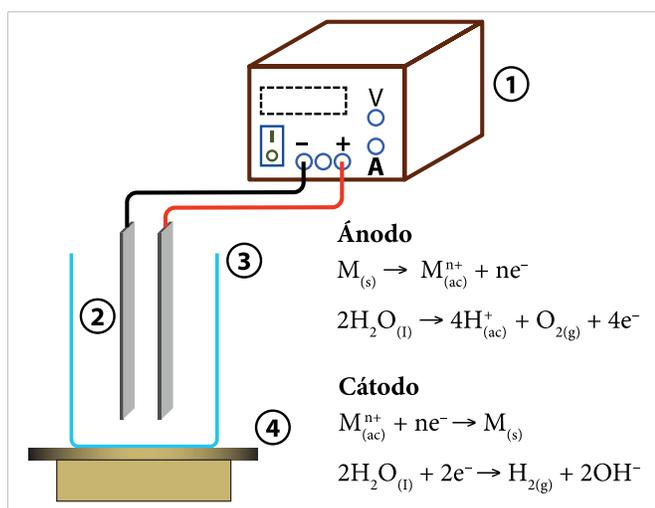


Figura 1. Elementos básicos de la electrocoagulación: 1) fuente de alimentación, 2) electrodos, 3) celda electroquímica y 4) agitación.

Las variables comúnmente evaluadas en las investigaciones son densidad de corriente, espaciado entre electrodos, electrolito de soporte, concentración del electrolito, emplazamiento en serie o paralelo y modo monopolar o bipolar. El monopolar en paralelo tiene los electrodos alternados ánodo-cátodo, donde cada uno de ellos se conecta a su correspondiente terminal negativa-positiva de la fuente de alimentación. No existe una interconexión interna entre los electrodos inmediatamente adyacentes a diferencia de la disposición en serie, en la que además los electrodos más externos son los únicos que están conectados a las terminales. Los bipolares ofrecen electrodos externos monopolar conectados hacia la fuente, los restantes mantienen polaridad contraria en cada lado, restringida por la carga del electrodo frente a ellos. El empalme bipolar está condicionado a la modalidad en serie [30], [31]. La Figura 2 muestra la distribución monopolar en serie, paralela y bipolar.

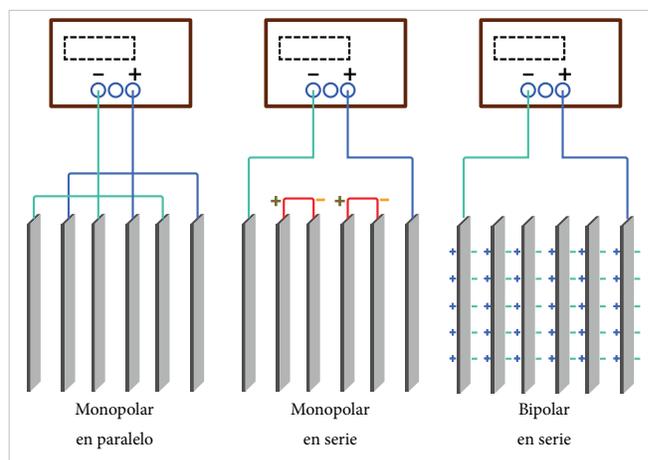


Figura 2. Arreglos de electrodos en la electrocoagulación.

### III. ELECTROCOAGULACIÓN DE AGUAS RESIDUALES

Sharma *et al.* [32] determinaron la eficiencia del proceso de EC en la remoción de Cr(VI) y Pb del agua residual de una planta de galvanoplastia local. El pH inicial, la densidad de corriente ( $j$ ), el espaciado de los electrodos y el tiempo de tratamiento ( $t_R$ ) fueron abarcadas para instaurar condiciones óptimas.

Se utilizaron electrodos rectangulares de acero inoxidable en paralelo, 2 ánodos y 2 cátodos, separados a 4 espacios en milímetros. Las soluciones acuosas con 55.3 y 4.92  $\text{mg}/\text{dm}^3$  de Cr (VI) y Pb se mantuvieron en agitación a 150 rpm.

Los experimentos fueron llevados a diversos pH iniciales, 1.5-9, con una  $j = 73.5 \text{ A/m}^2$ . La máxima remoción de 91.1 y 91.3 % para Cr (VI) y Pb, respectivamente, se alcanzó a  $\text{pH} = 3.5$ . El consumo de energía fue evaluado a varios pH, 2-9.5, con una  $j = 73.5 \text{ A/m}^2$ , espaciamiento de electrodos de 10 mm y tiempo de reacción de 90 minutos. El consumo de energía aumentó a partir de 21.5 hasta 38.6  $\text{Wh/dm}^3$  con el incremento de pH desde 2 a 9.5. Asimismo, el consumo anódico correspondiente cambió comenzando con 53.5 208  $\text{mg/dm}^3$  para llegar a 100  $\text{mg/dm}^3$ .

Se evaluó el efecto de la densidad de corriente durante la electrocoagulación a  $\text{pH} 3.5$ . Las concentraciones de los metales disminuyeron con el tiempo de reacción de 0 a 105 minutos. Las reducciones llegaron a 4.92 y 0.304  $\text{mg/dm}^3$  en Cr(VI) y Pb cuando la densidad de corriente ascendió a 183.75  $\text{A/m}^2$ . Se examinó también otro importante parámetro: el espaciamiento de los electrodos. En condiciones óptimas,  $\text{pH} = 3.5$ ,  $j = 73.5 \text{ A/m}^2$  y tiempo = 90 minutos, una distancia de 10, 15, 20 y 25 mm produjo remociones de 91.1, 63.3, 68.7 y 69.5 %, así como 91.3, 68.5, 71.6 y 73.1 % para Cr(VI) y Pb, respectivamente.

La propuesta es que con los valores de  $\text{pH} = 3.5$ ,  $j = 73.5 \text{ A/m}^2$  y  $t_R = 90$  minutos un tratamiento posterior por membranas o adsorción permitiría que el agua pueda ser utilizada para riego de jardines, lavado o bien disuelta en algún cuerpo de agua.

Ilhan *et al.* [33] plantearon como objetivo la remoción de cromo, cobre, cinc, níquel y demanda química de oxígeno (DQO) de aguas residuales de la industria siderúrgica. Se inspeccionó la densidad de corriente, el tiempo, el efecto del pH antes y después de la electrocoagulación. El agua residual se recolectó a la entrada de una planta cuyas aguas residuales proceden de varias industrias de galvanotecnia. La caracterización evidenció la presencia de los metales pesados Cr (VI) =  $35 \pm 2$ , cromo total =  $250 \pm 10$ , Ni =  $75 \pm 5$ , Cu =  $75 \pm 5$ , Zn =  $35 \pm 3$ , Pb < 0.1 y Cd < 0.1  $\text{mg/L}$ . El área electródica de los dos materiales utilizados (hierro y aluminio) separadamente fue de 78.75  $\text{cm}^2$  y 173.25  $\text{cm}^2$ .

La remoción de Cu, Ni, Zn y Cr se distinguió sin cambiar el pH inicial = 1.8. Los electrodos de aluminio no superaron el 48 % en los metales Cu, Ni y Zn, pero consiguieron 64 % de reducción para el Cr(VI) después de 40 minutos. Por otra parte, los electrodos de hierro obtuvieron el 86 y

96 % en 30 minutos para Cu y Cr, respectivamente. El Zn y Ni se restringieron a 48 y 55 % cuando transcurrieron 40 minutos. La densidad de corriente en esas pruebas fue igual a 100  $\text{A/m}^2$ .

El comportamiento que tienen los metales en solución a diferentes valores de pH motivó a suponer que la eficiencia pudiera incrementarse con el ajuste de ese parámetro. Complementariamente, los electrodos de hierro se eligieron por el mejor desempeño mostrado.

El pH previo y posterior a la electrocoagulación se evaluó en el espectro de 6 a 12 con incrementos unitarios. La opción  $\text{pH} = 12$ , aunada a un tiempo de reacción de 15 minutos y  $j = 100 \text{ A/m}^2$ , condujo a una eliminación de 66.4, 61.6, 93.9 y 96 % de Cu, Ni, Cr total y Zn. Por otra parte, se encontró que los porcentajes fueron mayores con un ajuste de pH ulterior.

Kenova *et al.* [34] estudiaron la electrocoagulación de agua residual sintética conteniendo  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Ni}^{2+}$  con concentraciones de 100, 250 y 500  $\text{mg/L}$  para cada ion. Las variables valoradas fueron densidad de corriente, tiempo y material anódico. Los electrodos de hierro y aluminio, cuya área superficial anódica era de 2.0  $\text{cm}^2$ , estaban espaciados 0.5 cm. La densidad de corriente se limitó a 15, 30 45 y 60  $\text{mA/cm}^2$ . La conductividad eléctrica se acrecentó añadiendo  $\text{K}_2\text{SO}_4$  a una concentración de 0.5 M.

La densidad de corriente de 30, 45 y 60  $\text{mA/cm}^2$  derivó en una remoción de 45, 60 y 76 % de cobre con los electrodos de hierro en 30 minutos de electrólisis. Un resultado menos destacado se obtuvo para el níquel, alcanzando porcentajes de 10, 19.6 y 30.8. Los electrodos de aluminio ocasionaron una eficiencia de remoción de 30 y 25 % con una densidad 279 de corriente de 15  $\text{mA/cm}^2$ , diferente a 76 y 68 % con 45  $\text{mA/cm}^2$ , en ambos casos con los porcentajes de  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Ni}^{2+}$ .

El aumento del tiempo de electrocoagulación a 60 minutos generó una mayor eficiencia. El  $\text{Cu}^{2+}$  alcanzó prácticamente una disminución de 100 %, residual de 0.2  $\text{mg/L}$ , sumado a un rango de 30 a 68 % de  $\text{Ni}^{2+}$  dependiendo de la densidad de corriente con los electrodos de hierro. El material de aluminio propició que el  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Ni}^{2+}$  redujeran 96-99.96 %, excepto con 15  $\text{mA/cm}^2$  que provocó una disminución igual a 50 y 45 % para  $\text{Cu}^{2+}$  y  $\text{Ni}^{2+}$ , respectivamente.

La remoción se acortó con el incremento de la concentración de los metales pesados. La densidad de corriente de 30 mA/cm<sup>2</sup> suministrada en un lapso de 60 minutos aminoró el porcentaje de 89 a 60 % y de 25 a 2 %, para Cu<sup>2+</sup> y Ni<sup>2+</sup>, respectivamente, a medida que la concentración aumentó de 100 a 500 mg/L en el procedimiento con electrodos de hierro. En relación con el aluminio, la eficiencia fue 100-63 % para cobre y 100-47 % para Ni<sup>2+</sup>.

Zhang *et al.* [35] adaptaron la variante de electrocoagulación energizada con paneles solares para la remoción de níquel de agua residual reconstituida. Los factores observados fueron material electrodico, distancia entre electrodos, concentración de Ni<sup>2+</sup>, potencia de salida de los paneles fotovoltaicos, presencia de aniones SO<sub>4</sub><sup>2-</sup> y Cl<sup>-</sup>. Los componentes fueron un panel solar fotovoltaico, multímetro digital, medidor digital de potencia, conexiones eléctricas, medidor de flujo, placas anódicas, placas catódicas, reactor, conductos para agua, contenedor y bomba centrífuga. Los electrodos sumergidos verticalmente 50 mm dentro del líquido tenían dimensiones 110 × 70 × 1.5 mm. El agua sintética se preparó disolviendo NiSO<sub>4</sub>·6H<sub>2</sub>O. La recirculación de 3 litros se impulsó a través de la bomba hacia el reactor para obtener un flujo volumétrico de 0.2 L/min. La concentración original de Ni<sup>2+</sup> y el pH fueron 200 mg/L y 7.

A partir del aluminio, grafito y titanio se indagó la remoción de níquel. Disponiendo de una intensidad de radiación solar (IRS) de 750 ± 30 W/m<sup>2</sup>, la eficiencia de remoción de níquel (ERN) en un tiempo de 10, 20 y 30 minutos, fue 45.1, 70.3 y 90.3 % para aluminio, 7.8, 15.6 y 26.8 % para grafito y 5, 13.9 y 18.4 % para titanio. Después de alcanzar 40 minutos, el aluminio eliminó casi el 100 % de níquel.

La intensidad de corriente y el voltaje del panel solar fotovoltaico están condicionados por la distancia de los electrodos, que a su vez afectan la ERN. La distancia entre electrodos fue cambiada de 10 a 50 mm para comparar la eficiencia de remoción. La IRS administrada de 740±50 W/m<sup>2</sup> a 20, 40 y 60 minutos causó una ERN de 52.5, 90.9 y 100 % para la distancia de electrodos de 10 mm, 70.3, 98.9 y 100 % para 20 mm, 48.6, 76.4 y 92.1 % para 30 mm, 34.9, 55.2 y 73.9 % para 40 mm, y 32.9, 43.7 y 57.9 % para 50 mm. La distancia óptima fue de 20 mm, como lo revelaron los porcentajes.

La concentración de Ni<sup>2+</sup> fue cambiada de 100 a 300 mg/L para representar alteraciones propiciadas por llu-

via o evaporación natural. Las ERN ascendieron con la extensión del tratamiento hasta 40 minutos. Las ERN son todas 100 % para 100 y 150 mg/L después de ese tiempo. Sin embargo, la ERN para 300 mg/L siguió sufriendo y alcanzó 100 % hasta completar 75 minutos.

Refiriéndose a la suposición de la ocupación de ácidos sulfúrico y clorhídrico en industrias de galvanoplastia, se pretendió esbozar el efecto de los iones SO<sub>4</sub><sup>2-</sup> y Cl<sup>-</sup> en la electrocoagulación. La solución con 3.4 mmol de SO<sub>4</sub><sup>2-</sup> logró la más alta ERN con la IRS de 610±40 W/m<sup>2</sup>, mientras que 6.8 mmol de Cl<sup>-</sup> la más baja. El conjunto de 1.7 mmol de SO<sub>4</sub><sup>2-</sup> y 3.4 mmol de Cl<sup>-</sup> se situó entre esas dos fronteras. Por ejemplo, la ERN fue 97.7, 87.2 y 57.2 % para 3.4 mmol/L de SO<sub>4</sub><sup>2-</sup>, 1.7 mmol/L de SO<sub>4</sub><sup>2-</sup>-3.4 mmol/L de Cl<sup>-</sup> y 6.8 mmol/L de Cl<sup>-</sup>, respectivamente, en un lapso de 50 minutos.

La potencia de los paneles fotovoltaicos delimita el voltaje y la corriente que circula por los electrodos. En circunstancias de 200 mg/L de Ni<sup>2+</sup> y 20 mm de espacio electrodico, la eficiencia de remoción en los primeros 40 min aumenta cuando la potencia de salida del panel fotovoltaico mejora de 30 a 90 W. Después, no se percibe una alteración cuando la potencia es igual a 120 W, lo que insinúa un rango de potencia destacado para obtener una mayor eliminación.

ELKaramany *et al.* [36] sometieron a electrocoagulación soluciones de cromo y cadmio a partir de concentraciones madre con 560 mg/L de cromo y 800 mg/L de cadmio. Las cantidades fueron elegidas para simular concentraciones reales de 369 metales pesados en agua residual industrial procedente de tenería y teñido en Egipto. Los compuestos químicos CrCl<sub>3</sub>·6H<sub>2</sub>O y 3CdSO<sub>4</sub>·8H<sub>2</sub>O se disolvieron en agua destilada. La conformación reunió un contenedor de vidrio de 12 L, 20 × 20 × 30 cm, placas de hierro y aluminio con medidas de 10.5 cm de ancho, 30 cm de alto y 1 mm de espesor y una fuente de alimentación de 30 voltios. Los factores averiguados fueron configuración de electrodos, pH inicial, densidad de corriente y concentración inicial de iones. También se realizó una comparación contra la coagulación química.

El ordenamiento de los electrodos Fe-Fe, Fe-Al, Al-Al y Al-Fe colocados como ánodo-cátodo fue probado en las mismas condiciones experimentales de concentraciones iniciales, 560 mg/L de cromo y 800 mg/L de cadmio, pH 5.0 y densidad de corriente 7.0 mA/cm<sup>2</sup>. El par

Fe-Al y Fe-Fe alcanzó casi una reducción de 68 y 47 % para cromo después de 60 minutos de evolución. Por el contrario, esas distribuciones de electrodos consiguieron 36 y 64 % para cadmio.

Una prueba sumada a las efectuadas se formuló con concentraciones iniciales Cr = 280 mg/L y Cd = 400 mg/L a pH de 6.2. La remoción de cromo fue 98 y 90 % con electrodos Fe-Al y Fe-Fe. En cuanto al cadmio, llegó a 72 y 18 % con la misma disposición. El impacto del pH inicial se analizó a partir de los valores 1.9, 5.8 y 8.4. La corriente de 0.8 A se aplicó al ensamble Fe-Al que estaba sumergido en las soluciones, iniciando con 280 mg/L de cromo y 400 mg/L de cadmio para mantener la reacción por un periodo de 60 minutos. Las eficiencias ascendieron a 24, 93, 95 % y 29, 95, 100 % respecto a cromo y cadmio.

Los electrodos agrupados Fe-Al con un trecho de 3.5 cm se emplearon para investigar la consecuencia de la densidad de corriente adecuada a 8.2, 9 y 12.5 mA/cm<sup>2</sup>.

Después de 60 minutos con 280 y 400 mg/L como concentraciones iniciales para Cr y Cd, las eficiencias, ajustando el pH inicial en 5.8, se acrecentaron a 91.3, 94.8, 99.4 % y 18, 49, 50 % en cromo y cadmio.

La electrocoagulación se comparó contra la coagulación química dosificando alumbre y cloruro férrico. Las condiciones programadas constaron de la mezcla rápida, 120 rpm en 1 minuto, mezcla lenta, 30 rpm en 20 minutos, culminando con la sedimentación en 30 minutos. Las dosis utilizadas fueron 30, 40, 50 y 125 mg/L y la concentración inicial 240 y 620 mg/L relativa a cromo y cadmio. El porcentaje de reducción con la dosis de 125 mg/L de alumbre se estimó en 19 y 27.5 %, acompañado a 18 y 21 % con 50 mg/L de cloruro férrico referente a cromo y cadmio.

Brahmi *et al.* [37] llevaron a cabo la electrocoagulación de cadmio en fase acuosa primero en agua residual artificial y después en agua residual real. Primeramente, se concentraron en indagar la cantidad óptima de los parámetros para ganar la mejor remoción. Posteriormente, el conjunto conocido se implementó en agua recolectada de una industria tunecina de fabricación de ácido sulfúrico y superfosfato (TCG).

Los electrodos rectangulares de aluminio se adecuaron en modo monopolar y bipolar. El área total inmersa in-

dividual fue de 68 cm<sup>2</sup>, calculada a partir de la región 85 × 80 × 2 mm. La longitud entre ánodo-cátodo se varió de 5 a 20 mm. La celda, en forma de vaso cilíndrico, tenía capacidad de 1 L. La velocidad de agitación abarcó de 0 a 600 rev/min.

Las soluciones se elaboraron con CdSO<sub>4</sub>•10H<sub>2</sub>O para destinar 100 mg/L de concentración inicial en la electrocoagulación, con una densidad de corriente (*j*) a 3.68 mA/cm<sup>2</sup>, pH inicial de 7 y conductividad a 5.68 mS/cm. Los parámetros inicialmente constantes fueron temperatura 16.5 °C, velocidad de agitación 300 rev/min, superficie volumen o *S/V* igual a 13.6 m<sup>-1</sup> y 2 cm de distancia entre electrodos.

El arreglo explorado de los electrodos atendió a un número de dos o cuatro unidades en modo monopolar y bipolar. La configuración no tuvo efecto sobre el consumo del electrodo de aluminio. La ocupación de cuatro favoreció que el proceso fuera más rápido, 30 minutos para 90 % de reducción de cadmio, a diferencia de 45 minutos si se usaban dos electrodos para ese mismo desempeño. La bipolar fue más eficiente, pero demandó más energía y costo en comparación con la monopolar. La remoción en 60 minutos obtenida de 92 % costó 0.55 TDN (dinar nacional tunecino) con el sistema bipolar y 87 % costó 0.16 TDN con el monopolar.

Las pruebas de EC fueron ejecutadas para valores de relación *S/V* 3.4, 6,8, 10.2 y 13.6 m<sup>-1</sup>. El porcentaje de remoción de cadmio para las 460 *S/V* comparadas fue cercano a 99 % al transcurrir 60 minutos, pero con diferencia de costo. En los primeros 30 minutos, el aumento de *S/V* de 3.4 a 13.6 m<sup>-1</sup> enriqueció la eficiencia de 90.95 a 99.76 % ligada a un caída tanto en el costo de 1.130 a 0.280 TND m<sup>-3</sup> como consumo de energía de 10.2 a 1.75 kW•h/m<sup>3</sup> reflejado por la disminución de la temperatura desde 21.1 a 18.4 °C.

Respecto a distintos alejamientos entre electrodos, se practicó con 0.5, 1 y 2 cm los ensayos de electrocoagulación. Previo a los 30 minutos de tiempo, la atenuación entre electrodos de 2 a 0.5 cm favoreció un aumento en la supresión de cadmio de 82.33 a 91.63 %, un descenso en el costo de tratamiento de 0.270 a 0.210 TND m<sup>-3</sup> y una disminución del consumo de energía de 0.87 a 0.55 kW•h/m<sup>3</sup>. Quedó expuesto el concomitante decaimiento de la temperatura de la solución de 19.5 a 17.8 °C.

La temperatura inicial óptima se definió a partir de los valores 18, 30, 50 y 70 °C. La eliminación máxima de 98.28 % se obtuvo con 50 °C y un tiempo de electrólisis de 30 minutos, sin perturbar el costo y mejorando la eficiencia. El último factor de la primera fase contenía las velocidades de agitación 0, 300, 450 y 600 rev/min.

La electrocoagulación exenta de agitación impuso porcentajes menores a 68 y 80 % después de un plazo de 30 y 60 minutos, respectivamente. La agitación de 300 rev/min apresuró la eliminación e incluso más cuando fue 450 rev/min ocasionando un porcentaje de 95 y 99.5 % después de 30 y 60 min, respectivamente.

En la segunda fase se adaptaron pruebas con las aguas residuales industriales TCG una vez que el pH se ajustó a 7. La muestra contenía una concentración de cadmio de 2.83 mg/L, una conductividad de 1.176 mS/cm y un pH ácido de 2.02. La remoción de cadmio, agrupando todas las cantidades óptimas de los parámetros seleccionados, fue muy destacada. Se consiguió en 5 minutos una eliminación de 100 %, con un pequeño consumo de 1.6 kW·h/m<sup>3</sup> y un costo de 0.116 TND m<sup>-3</sup>.

Xu *et al.* [38] llevaron a cabo experimentos de electrocoagulación para inspeccionar el efecto de parámetros operativos en la remoción simultánea de los metales cadmio, cinc y manganeso. En virtud de la complejidad de las aguas residuales, por ejemplo, de fundición, añadieron al estudio la repercusión de los iones Cl<sup>-</sup>, SO<sub>4</sub><sup>2-</sup>, Ca<sup>2+</sup> y Mg<sup>2+</sup>. Los agentes integraban combinaciones de electrodos, pH inicial, densidad de corriente, concentración inicial de Zn<sup>2+</sup>, dureza, concentración de aniones y co-aniones como proporción RCl:SO<sub>4</sub>.

El agua residual sintética de 15 mg/L, 92mg/L y 320 mg/L de cadmio, cinc y manganeso, respectivamente, fue formulada a partir de soluciones acuosas de CdCl<sub>2</sub>, ZnCl<sub>2</sub> y MnCl<sub>2</sub>·4H<sub>2</sub>O con propiedades ultrapuras del líquido. Los electrolitos de soporte incorporados fueron 50 mmol de NaCl y 10 mmol de Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. La dureza del agua residual fue simulada con sales de calcio CaCl<sub>2</sub>·2H<sub>2</sub>O y CaSO<sub>4</sub>·2H<sub>2</sub>O, además de sales de magnesio MgCl<sub>2</sub>·6H<sub>2</sub>O y MgSO<sub>4</sub>·7H<sub>2</sub>O.

Las corridas se realizaron con 500 mL manteniendo la agitación a 150 rpm dentro de un reactor cuboide de 700 mL que medía 100 × 70 × 100 mm. Un par de placas paralelas operadas en forma monopolar con un área superficial sumergida de 50 cm<sup>2</sup> se posicionaron

verticalmente. La longitud entre electrodos se fijó en 20 mm, la temperatura ambiente se conservó constante a 25 ± 0.5 °C y el pH se ajustó utilizando 0.1 M de HCl o 0.1 M de NaOH.

El primer acercamiento a los resultados muestra una organización de electrodos de cuatro maneras, ánodo-cátodo, Al-Al, Al-Fe, Fe-Al y Fe-Fe para encontrar la óptima. La concentración residual de cadmio (C<sub>Cd(II)</sub>), cinc (C<sub>Zn(II)</sub>) y manganeso (C<sub>Mn(II)</sub>) con hierro actuando como ánodo fue más baja comparada con aluminio. Después de 60 minutos, se lograron concentraciones residuales de 0.68 mg/L, 0.71 mg/L y 194.9 mg/L para Cd<sup>2+</sup>, Zn<sup>2+</sup> y Mn<sup>2+</sup>, cuando se empleó el par de electrodos Fe-Fe. Particularmente, para el cadmio la C<sub>Cd(II)</sub> alcanzó 6.63, 10.44 y 11.52 mg/L por medio de Fe-Al, Al-Fe y Al-Al, respectivamente, develando un decaimiento limitado de ese metal. La remoción de Zn<sup>2+</sup> y Mn<sup>2+</sup> manifestó dependencia únicamente por los materiales anódicos. Una evidencia se constató porque no hubo una diferencia significativa en la C<sub>Zn(II)</sub>, como se reveló entre Al-Al y Al-Fe, la cual disminuyó continuamente hasta 18.42 y 20.13 mg/L, después de 60 minutos, a partir de 92.0 mg/L.

El pH inicial es considerable en el ambiente de las pruebas puesto que dictamina la forma química de los iones de hierro. El incremento de los valores de 4 a 7 disminuyó la C<sub>Cd(II)</sub> de 7.05 a 2.31 mg/L, la C<sub>Zn(II)</sub> disminuyó de 6.32 a 0.86 mg/552 L y la C<sub>Mn(II)</sub> se redujo desde 203.3 a 166.5 mg/L una vez que se cumplieron 30, 20 y 60 minutos, respectivamente.

Con relación a la densidad de corriente, aspecto interesante porque gobierna la producción de coagulante y la liberación de burbujas, la C<sub>Cd(II)</sub> mínima alcanzó 0.22 mg/L contando desde 15 mg/L a 10 mA/cm<sup>2</sup> en 60 minutos, aunque regulada a 4 mA/cm<sup>2</sup> el porcentaje de reducción de Cd<sup>2+</sup> se acercó a 65.2 % equivalente a un residual de 5.22 mg/L. La C<sub>Zn(II)</sub> se acercó a menos de 1.0 mg/L en 30 minutos cuando la densidad de corriente era superior o igual a 6 mA/cm<sup>2</sup>; mientras tanto, 20.94 mg/L de Zn<sup>2+</sup> persistían a 4 mA/cm<sup>2</sup>. El acrecentamiento de la densidad de corriente de 4 a 10 mA/cm<sup>2</sup> posibilitó que la C<sub>Mn(II)</sub> descendiera de 237.6 mg/L a 165.9 mg/L, idéntico a 27.36 y 49.71 %, respectivamente, en 60 minutos.

Una de las interrogantes que habían tanteado versaba sobre la interacción entre Zn<sup>2+</sup> y Cd<sup>2+</sup> en el curso de

la electrocoagulación. Por tanto, valoraron el efecto de la concentración inicial de  $Zn^{2+}$  ( $[Zn^{2+}]_0$ ) en el abatimiento de  $Cd^{2+}$ . Dosis adicionales de  $Zn^{2+}$  fueron agregadas a 0, 50, 100, 200 y 400 mg/L. La  $C_{Cd(II)}$  disminuyó muy lentamente durante los primeros 20 minutos cuando  $[Zn^{2+}]_0$  fue 100 mg/L, en cambio el  $Cd^{2+}$  fue casi absolutamente removido en ausencia de  $Zn^{2+}$ . Adicionalmente, el aumento de  $[Zn^{2+}]_0$  de 0 a 400 mg/L suscitó que la  $C_{Cd(II)}$  de 10.5 mg/L, por ejemplo, fuera extendida de 5 hasta 42 minutos.

La propuesta de los autores para emular el agua residual de fundición promovió la inclusión de aniones cloruro y sulfato para explorar la remoción de metales en agua, incluyendo 10 y 15 mmol de  $Ca^{2+}$  y  $Mg^{2+}$ .

Los escenarios se definieron con 50 mmol de cloruro e igual cantidad tanto de sulfato como de la mezcla equimolar de ambos en el acomodo de electrodos Fe-Fe. El decrecimiento de  $Cd^{2+}$  en la solución con cloruro exhibió el rendimiento más pobre. No obstante, la  $C_{Cd(II)}$  disminuyó notablemente cuando se añadió sulfato y los aniones binarios cloruro-sulfato, presentándose, en la culminación de 60 minutos, la  $C_{Cd(II)}$  de 0.4 y 0.29 mg/L, respectivamente. La  $C_{Zn(II)}$  alcanzó menos de 0.5 mg/L para todas las condiciones del experimento. La solución de iones  $Cl^-$  afectó positivamente la eliminación de  $Mn^{2+}$ . El desenlace del tratamiento dirigió las concentraciones residuales de  $Mn^{2+}$  en torno a 155.6, 200.2 y 181 mg/L para  $Cl^-$ ,  $SO_4^{2-}$  y los aniones binarios cloruro-sulfato, respectivamente.

Complementariamente, se averiguó el efecto de acrecentar las relaciones molares de cloruro a sulfato (RCl:SO<sub>4</sub>) en el rango 0:50, 2.5:50, 5:50 y 10:50 en la eliminación de  $Cd^{2+}$  (20 minutos),  $Zn^{2+}$  (40 minutos) y  $Mn^{2+}$  (40 minutos) con una dureza,  $C_{Ca+Mg}$ , fluctuando desde 0+0, 5+10 y 10+20 mmol/L. Un aumento en la dureza ejerció un efecto negativo en la eliminación de los tres metales. A título indicativo, después de 20 min, la eficiencia de  $Cd^{2+}$  descendió de 80 a 21.4 % y la de  $Zn^{2+}$  de 99.1 a 89.86 % con la subida de la dureza desde 0 a 30 mg/L y RCl:SO<sub>4</sub> conformada en 5:50. Por otro lado, aumentar la dosis de cloruro aventajó la eficiencia. La RCl:SO<sub>4</sub> se potenció de 0:50 a 2.5:50, lo que provocó el crecimiento de 13.23 a 24.43 %, 80 a 91.03 % y 17.09 a 28.10 % para  $Cd^{2+}$ ,  $Zn^{2+}$  y  $Mn^{2+}$ , respectivamente.

Krystynik et al. [39] concibieron un esquema experimental para la remoción de cromo partiendo desde el labo-

ratorio hacia la escala piloto. Los ensayos en el primero ocuparon soluciones modelo de  $K_2Cr_2O_7$  para ponderar la influencia de las variables pH, corriente de entrada, densidad de corriente, relación molar dosificada Fe/Cr,  $Cr_{total}$  y flujo volumétrico, en los intervalos 2-10, 0-2.08 A, 0-95 mA/cm<sup>2</sup>, 1/2 - 4/1, 10-40 mg/L y 10-60 L/h, respectivamente.

La celda electroquímica estaba constituida por dos tubos concéntricos. El interior era un ánodo de hierro y el exterior de acero inoxidable que actuaba como cátodo. La división entre electrodos era de 6 mm. El efluente originado continuamente se acumuló en un vaso para someterlo a una prueba de jarra estándar seguida de sedimentación durante 30 minutos antes de recoger la muestra. Las características del agua residual de referencia fueron pH 6, conductividad de 500 μS/cm,  $Cr_{total}$  de 20 mg/L y color naranja oscuro.

En un medio óptimo de pH 6, flujo volumétrico de 40 L/h,  $Cr_{total}$  inicial de 20 mg/L, conductividad de 500 μS/cm y densidad de corriente de 19 mA/cm<sup>2</sup>, la relación de dosificación fue considerada como insignia para aminsonar el cromo del agua. Con base en esta, se reportó el  $Cr_{total}$  remanente,  $Cr^{3+}$  residual, % de remoción de Cr y el consumo de energía. En la secuencia desde 1/2 hasta 5/1, los valores decrecieron en la medida 14.6 mg/L, 6.5 mg/L, 26.6 % y 645 0.15 kW·h/m<sup>3</sup> para arribar a 0.7 mg/L, 0.6 mg/L, 96.5 % y 0.91 kW·h/m<sup>3</sup>. La aparición de  $Cr^{3+}$  se atribuyó a las reacciones electroquímicas que causaron la reducción del  $Cr^{6+}$ .

El seguimiento dirigido a la segunda etapa impulsó la verificación de las observaciones del laboratorio en agua industrial contaminada. La muestra se tomó de un pozo, HSV 13, localizado en una antigua planta de galvanización en República Checa. La contaminación estuvo distinguida por 20, 0.05, 1.68, 6.09, 4.53, 0.06, 6.05 y 56.1 mg/L de Cr, Pb, Cu, Zn, Al, Cd, Mn y Ni, respectivamente.

La eliminación de Cr se aproximó a 100 % con la relación 3/1, la cual superó lo percibido en la solución modelo. La concentración de Zn menguó progresivamente con la escalada de la relación de dosificación situándose en 0.48 mg/L. La tendencia fue similar para Cu, Al, Cd y Ni que se eliminaron con éxito, exceptuando el Mn que permaneció poco más o menos constante desde la relación 1/1 hasta 5/1.

El propósito último comprendió la operación a escala piloto en un sitio industrial. El sistema que se acondicionó reunía 5 componentes principales: tanque de almacenamiento para agua residual, celdas de electrocoagulación con electrodos de acero dulce, tanque de mezcla rápida, tanque de mezcla lenta y tanque de sedimentación. El flujo volumétrico alimentado fue 0.5 m<sup>3</sup>/h. Aparte, el pH del agua tratada se adecuó a las cantidades 6, 7, 8 y 9 para advertir su efecto.

Los resultados fueron similares a los adquiridos en el laboratorio con el efluente industrial. La relación de dosificación 5/1 posicionó las concentraciones de Cr<sub>total</sub>, Cr<sup>6+</sup>, Cu, Zn, Al y Ni en <0.1, <0.1, 0.33, 1.07, 0.4, 35.6 mg/L, empezando desde 39.3, 29.8, 2.4, 4.9, 13.3 y 61.7 mg/L. Nuevamente, el Mn permaneció por poco invariable. El pH modificado a 9 en el efluente ocasionó que las concentraciones iniciales de todos los metales se minimizaran hasta <0.1 mg/L.

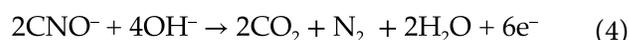
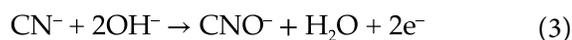
Chegeni *et al.* [40] planificaron realizar la electrocoagulación en tres circunstancias. La eliminación de cianuro, plomo, así como el conjunto de ambos en agua sintética y natural de una planta de procesamiento de oro se estudió bajo la incidencia del pH inicial, intensidad de corriente, tiempo de reacción y disposición de electrodos. Láminas de hierro y aluminio con dimensiones de 12 × 4 × 0.1 cm, distanciadas 2 cm, fueron destinadas como material electrodico. La concentración 198 y 168 mg/L de cianuro y plomo requerida para la generación del agua artificial se preparó con NaCN y Pb(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>.

Las intensidades de corriente contempladas para el cianuro fueron 100, 200 y 300 mA y, en cambio para el plomo 40, 80 y 120 mA. Por otro lado, 120, 180, 240 y 300 mA pertenecieron a la suma de cianuro con plomo. El tiempo explorado fue entre 10 a 60 minutos y el pH inicial de 2 a 13, según la especie de interés o el agrupamiento. Las aguas que contenían cianuro y plomo procedían de una de las minas de oro activas ubicadas en la provincia de Khorasan, Irán. Las muestras tenían 2850 µg/L, 102.09 µg/L, 81.88 µg/L y 0.15 mg/L de cianuro, mercurio, arsénico y plomo. La alteración que confirió el pH a la remoción de plomo se declaró desde un pH 2 ascendiendo hasta 8, lo que se tradujo en un remanente de 9 % utilizando la intensidad de corriente de 80 mA durante 10 min y Al-Fe como ánodo-cátodo. La simultánea de plomo y cianuro con Al-Fe indicaron que el mayor porcentaje retirado de plomo y cianuro a pH 9 fue de 79 % y 96 %, respectivamente.

En el efluente sintético, la intensidad de corriente se sostuvo por una hora para observar la aminoración del plomo. El remplazo de 40 a 80 mA aumentó la eficiencia de 84 a 91 % y 100 % con 120 mA al transcurrir 60 minutos. El acople ánodo-cátodo Fe-Al a pH 9 dedicado a la electrocoagulación paralela de cianuro y plomo reflejo el escalamiento de 69 a 86 % con la respectiva transición de 120 a 300 mA. La intención de comparar el rendimiento que conlleva tratar agua artificial contra efluentes de mina guio una prueba entre 120 a 300 mA, en la cual el porcentaje se elevó de 53 a 83 % en la eliminación de plomo del agua residual de la procesadora.

La colocación de electrodos cátodo-ánodo para menguar el plomo se investigó como Fe-Al, Al-Al, Fe-Fe y Al-Fe. Las ganancias en porcentaje fueron 90, 84, 67 y 45, respectivamente. Relativo a la reducción de la concentración de cianuro y plomo en el agua modelo en situación operativa óptima, pH = 10, 300 mA y 30 minutos, se consiguió 63 y 100 %, así como a 96 y 76 %, con cátodo-ánodo Fe-Al y Al-Fe, respectivamente, coincidente con cianuro y plomo cada uno. Un escenario igual de pH, intensidad de corriente, tiempo y posicionamiento electrodico para los experimentos con el efluente de la mina promovió disminuciones de 94 y 48 %, además de 60 y 85 %, correspondientes con plomo y cianuro.

Los investigadores propusieron que en el transcurso de la electrocoagulación, la producción de O<sub>2</sub> en el ánodo e iones hidroxilo en el cátodo promueven la oxidación de cianuro a ion cianato, el cual es ulteriormente oxidado a dióxido de carbono y nitrógeno:



Abdel-Shafy *et al.* [41] diseñaron una secuencia experimental cuya finalidad radicó en aminorar la cantidad de Ni, Cu y Zn en aguas de industria de galvanoplastia. Las etapas sucesivas fueron coagulación, electrocoagulación, un proceso continuo para enlazar ambas destinado primero al agua sintética y enseguida al agua residual real.

El agua se colectó de la planta de galvanoplastia de Candilars, El Cairo. Los metales Cu, Ni y Zn se detectaron en proporciones cambiantes. El medio acuoso sintético requirió NiCl<sub>2</sub>, NiSO<sub>4</sub>, CuSO<sub>4</sub> y ZnCl<sub>2</sub> para

tener 450, 90 y 75 mg/L de Ni, Cu y Zn en una solución de pH 2.

La coagulación se efectuó a través de la prueba de jarras en 6 recipientes con capacidad idéntica a 1000 mL. La duración se aseguró en 1, 20 y 30 minutos respecto al mezclado instantáneo, la floculación y la sedimentación, respectivamente. Los coagulantes probados fueron NaOH, alumbre, alumbre combinado con NaOH, cal y cal con  $\text{FeCl}_3$ .

Los componentes del reactor de electrocoagulación asociaban electrodos rectangulares de acero inoxidable, fuente de alimentación, voltiamperímetro, bomba eléctrica y cables. La geometría coincidía con un tanque rectangular de dimensiones 35, 18 y 22 cm de largo, ancho y alto. El volumen máximo de líquido que podía almacenar era de 10 L para permitir un flujo volumétrico de 100 mL/min. La unidad estaba seccionada en 6 cámaras, cinco de las cuales albergaban dos electrodos cada una. Los 10 conjuntos yacían alternados en la conexión hacia el ánodo y cátodo de las dos filas que eran perpendiculares a cada conjunto. Por tanto, se fomentó una orientación paralela de todos los pares de placas. La conexión entre ellas se estipuló por separado externamente suscitando una modalidad monopolar en serie. La cámara final permitió acumular el agua tratada. La manguera que tenía adherida funcionó como puerto de muestreo.

La coagulación impuesta en el medio acuso sintético descubrió que el coagulante de cal y  $\text{FeCl}_3$  fue el más eficiente. El Cu, Ni y Zn advirtieron una disminución de 96.1, 86.66 % y 80.0 %, lo que atañe a los residuales de 3.51, 60 y 15 mg/L. Seguidamente, la electrocoagulación se ejecutó 30 minutos con cuatro voltajes: 5, 10, 15 y 20 mV, con electrodos de hierro y acero inoxidable. En el material de hierro, la sustitución de 5 a 10 V perfeccionó las remociones desde 88, 85.0 y 87.2 % hasta 90.6, 89.2 y 89.8 % de Ni, Zn y Cu. El subsecuente incremento de voltaje deterioró la eliminación. El valor de 15 V demostró una decadencia de 0.4, 0.8 y 1.3 %, acen tuándose con 20 V de acuerdo con 0.8, 1.1 y 1.9 %. El óptimo para el acero inoxidable se estableció en 10 V tal como fue develado para Ni, Zn y Cu con 93.5, 89.8, 90.1 %. La migración a 15 V redujo esos porcentajes para presentar 87.1 %, 85.6 % y 86.0 %. La intensificación de

los voltios afectó negativamente las eficiencias, ya que 20 V devinieron en 85.5, 83.9 y 85.3 %.

Se analizó también la permanencia de contacto medida en los minutos 15, 30, 45 y 60 con 10 V dedicando el hierro y el acero inoxidable. La más alta remoción con el hierro ocurrió a los 30 minutos, alcanzándose 90.6, 89.2 y 89.8 % para Ni, Zn y Cu. El avance a 45 minutos lo desmejoró a 89.9, 88.4 y 88.8 %, en tanto que la extensión a 60 minutos llevó a 89.1, 88.1 y 87.9 %. Para el caso del acero, 30 minutos fueron suficientes para la destacada disminución del Ni, Zn y Cu a 93.5, 89.8 y 90.0 %, respectivamente. Los minutos sucesivos indujeron la reducción de esos porcentajes a 91.1, 88.1 y 86.0 % cumplidos 45 minutos, sustituida con 87.9, 85.6 y 85.3 % para la misma serie Ni, Zn y Cu con espera de 60 minutos.

El agua fabricada se sometió a un procedimiento continuo compuesto por coagulación con el conjugado de cal- $\text{FeCl}_3$  en primera instancia. Inmediatamente prosiguió la electrocoagulación sujeta a la corriente eléctrica de 10 mV, contacto de 30 minutos y electrodos de acero inoxidable. El equipo se diseñó con celdas divididas en 6 partes, cada una de las cuales constó de dos electrodos paralelos de acero inoxidable que están conectados vía monopolar en serie. El descenso de concentraciones de Ni, Zn y Cu llevó los porcentajes a 93.9, 90.3 y 91.1.

El efluente derivado de la planta de galvanoplastia exhibió niveles de Zn, Cu, Ni y Fe iguales a 25, 30, 150 y 2.9 mg/L en un medio no biodegradable, según la relación DBO-DQO, de pH 2. De forma similar, el acoplamiento de coagulación-electrocoagulación con las mismas restricciones que imperaron para el agua reconstituida causó un abatimiento de 98.9, 97.4 y 96.6 % para Ni, Zn y Cu. Finalmente, una distinción entre el enfoque de electrocoagulación por lotes y continuo se corroboró con las remociones de 92.1, 87.8 y 82.9 para Ni, Zn y Cu contra 92.4, 89 y 90.6 %, respectivamente. La correlación sugirió que el último fue más competente que el primero.

La [Tabla 1](#) recopila los mejores escenarios para la remoción de metales pesados expuestos en los artículos revisados en el presente manuscrito, además del tipo de agua residual tratada, real o artificial, en cada uno de ellos.

TABLA 1  
EFICIENCIA DE REMOCIÓN DE METALES PESADOS DEL AGUA RESIDUAL REAL O ARTIFICIAL POR ELECTROCOAGULACIÓN

AGUA RESIDUAL		MEJOR ESCENARIO PARA REMOCIÓN	EFICIENCIA	REF.
REAL	ARTIFICIAL			
X		pH = 3.5, $j = 73.5 \text{ A/m}^2$ , se = 1 cm, $t_R = 90 \text{ min}$ , electrodos = 4 de acero inoxidable 302.	Cr <sup>6+</sup> = 91.1 % Pb = 91.31 %	[32]
X		$j = 100 \text{ A/m}^2$ , pH = 12, electrodos = 2 de hierro, $t_R = 15 \text{ min}$ , se = 6 cm.	Cu = 66.4 % Ni = 61.6 % Cr <sub>total</sub> = 93.9 % Zn = 96 %	[33]
	X	CuSO <sub>4</sub> •5H <sub>2</sub> O y NiSO <sub>4</sub> •7H <sub>2</sub> O como sales de Cu <sup>2+</sup> y Ni <sup>2+</sup> , se = 0.5 cm, pH = 5.3-5.8 dependiendo de la concentración de las sales, $t_R = 60 \text{ min}$ , [Cu <sup>2+</sup> ] <sub>0</sub> y [Ni <sup>2+</sup> ] <sub>0</sub> = 100 mg/L, ánodo de aluminio, $j = 60 \text{ mA/cm}^2$ .	Cu <sup>2+</sup> = 100 % Ni <sup>2+</sup> = 100 %	[34]
	X	Electrodos = aluminio, [Ni <sup>2+</sup> ] <sub>0</sub> = 100 y 150 mg/L, se = 20 mm, $t_R = 40 \text{ min}$ , IRS = 750±40 W/m <sup>2</sup> , P = 30-90 W, modo monopolar. IRS = 610±40 W/m <sup>2</sup> , anión = 3.4 mmol/L de SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> , $t_R = 50 \text{ min}$ . [Ni <sup>2+</sup> ] <sub>0</sub> , electrodos, se, conexión = ídem.	Ni <sup>2+</sup> = 100 % Ni <sup>2+</sup> = 97.7 %	[35]
	X	Electrodos = Fe-Al, I = 0.8 A, A <sub>sup</sub> = 315 cm <sup>2</sup> , Cr <sup>3+</sup> = 280 mg/L, Cd <sup>2+</sup> = 400 mg/L, $t_R = 60 \text{ min}$ , pH = 8.4, se = 3.5 cm.	Cr <sup>3+</sup> = 95 % Cd <sup>2+</sup> = 100 %	[36]
	X	Monopolar, Cd <sup>2+</sup> = 100 mg/L, S/V = 13.6 m <sup>-1</sup> , se = 0.5 cm, T = 50 °C, $t_R = 60 \text{ min}$ , agitación = 300 rev/min, pH <sub>0</sub> = 7, electrodos = 2 aluminio, $j = 3.68 \text{ mA/cm}^2$ .	Cd <sup>2+</sup> = 99.5 %	[37]
X		pH <sub>0</sub> = 7, Cd <sup>2+</sup> = 2.83 mg/L, T <sub>0</sub> = 15 °C, V = 2.3 V, $t_R = 5 \text{ min}$ .	Cd <sup>2+</sup> = 100 %	
	X	A <sub>sup</sub> = 50 cm <sup>2</sup> , se = 2 cm, agitación = 150 rev/min, T = 25±0.5 °C, electrodos = Fe-Fe, pH = 7, Cd <sup>2+</sup> = 15 mg/L, Zn <sup>2+</sup> = 92 mg/L, Mn <sup>2+</sup> = 320 mg/L, $t_R = 60 \text{ min}$ , $j = 10 \text{ mA/cm}^2$ .  Simulación agua residual fundición. Ca <sup>2+</sup> = 10 mmol, Mg <sup>2+</sup> = 15 mmol, Cl <sup>-</sup> = 50 mmol, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> = 50 mmol, mezcla equimolar Cl <sup>-</sup> -SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> = 50 mmol, electrodos = Fe-Fe, $t_R = 60 \text{ min}$ .	Cd <sup>2+</sup> = 98.5 % Zn <sup>2+</sup> > 98.9 % Mn <sup>2+</sup> = 49.7 % <b>Residuales</b> Cd <sup>2+</sup> , SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> = 0.4 mg/L Zn <sup>2+</sup> < 0.5 mg/L Mn <sup>2+</sup> , Cl <sup>-</sup> = 155.6 mg/L	[38]
	X	Electrodos = tubos concéntricos Fe-acero, se = 6 mm, pH = 6, flujo = 40 L/h, Cr <sub>total</sub> inicial = 20 mg/L, conductividad = 500 µS/cm y $j = 19 \text{ mA/cm}^2$ .	Cr = 96.5 %	[39]
X		Cr = 20 mg/L, Zn = 6.09 mg/L, Cu = 1.68 mg/L, Al = 4.53 mg/L, Cd = 0.06 mg/L, Ni = 56.1 mg/L, relación Fe/Cr = 3/1 para Cr, relación Fe/Cr = 5/1 para el resto.	Cr próximo a 100 % Zn residual 0.48 mg/L Cu, Al, Cd y Ni = 100 %	
X		Escala piloto. Flujo = 0.5 m <sup>3</sup> /h, relación Fe/Cr = 5/1.	Cr <sub>total</sub> > 99.7 % Cr <sup>6+</sup> > 99.7 % Cu = 86.3 % Zn = 78 % Al = 99.7 % Ni = 42.3 %	
	X	A <sub>sup</sub> = 48 cm <sup>2</sup> , electrodos = Al-Fe ánodo cátodo, pH = 8, $t_R = 60 \text{ min}$ , I = 120 mA, se = 2 cm. Ánodo-cátodo Fe-Al, pH = 9, $t_R = 60 \text{ minutos}$ , I = 300 mA.	Pb <sup>2+</sup> = 100 % Cn <sup>-</sup> -Pb <sup>2+</sup> = 86 %	[40]
X		I = 300 mA, el resto ídem al caso Cn <sup>-</sup> - Pb <sup>2+</sup> .	Pb <sup>2+</sup> = 83 %	
X		Al-Fe ánodo cátodo, pH = 10, I = 300 mA, $t_R = 60 \text{ min}$ .	Pb <sup>2+</sup> = 94 %	
	X	Ni = 450 mg/L, Cu = 90 mg/L, Zn = 75 mg/L, electrodos = Fe y acero inoxidable, $t_R = 30 \text{ min}$ , V = 10 V, monopolar en serie, Q = 100 mL/min.	<b>Acero inoxidable</b> Ni = 93.5 % Zn = 89.8 % Cu = 90.1 % <b>Hierro</b> Ni = 90.6 % Zn = 89.2 % Cu = 89.8 %	[41]

TABLA 1 (CONT.)  
EFICIENCIA DE REMOCIÓN DE METALES PESADOS DEL AGUA RESIDUAL REAL O ARTIFICIAL POR ELECTROCOAGULACIÓN

AGUA RESIDUAL		MEJOR ESCENARIO PARA REMOCIÓN	EFICIENCIA	REF.
REAL	ARTIFICIAL			
	X	Tratamiento en secuencia coagulación-electrocoagulación. Electrodo = acero inoxidable, V = 10 mV, $t_R = 30$ min, monopolar en serie, Q = 100 mL/min.	Ni = 93.9 % Zn = 90.3 % Cu = 91.1 %	[41]
X		Ni = 150 mg/L, Cu = 30 mg/L, Zn = 25 mg/L, Fe = 2.9 mg/L, el resto ídem al acoplamiento coagulación-electrocoagulación.	Ni = 98.9 % Zn = 97.4 % Cu = 96.6 %	
X		Electrocoagulación por lotes y continua.	<b>Lotes</b> Ni = 92.1 % Zn = 87.8 % Cu = 82.9 % <b>Continua</b> Ni = 92.4 % Zn = 89 % Cu = 90.6 %	

Ref.: referencia,  $j$ : densidad de corriente,  $se$ : separación de electrodos,  $t_R$ : tiempo de reacción, IIS: intensidad de irradiación solar, P: potencia, I: intensidad de corriente,  $A_{sup}$ : área superficial,  $S/V$ : relación superficie eléctrica a volumen de agua, V: voltaje, Q: flujo volumétrico.

#### IV. CONCLUSIONES

La presente revisión pone de manifiesto que la electrocoagulación es un método importante para el tratamiento de aguas residuales con iones de metales pesados indistintamente de su procedencia. Las ventajas relevantes se enuncian a continuación:

- No requiere del suministro suplementario de algún compuesto químico en su concepción más básica. Consecuentemente, a diferencia de la coagulación genera menor cantidad de lodos. En la literatura revisada, el volumen se ha registrado como menor a 2 %. El ensamblaje es fácil con componentes simples y operación sencilla. Por otra parte, exige el remplazo del ánodo más frecuentemente cuanto más elevada sea la intensidad de corriente.
- La selección de los materiales electródicos y el acomodo dentro de la celda son relevantes para lograr resultados superiores. Los que se evalúan usualmente son hierro y aluminio, pero también se ha ponderado titanio y grafito como cátodo, aprovechando los iones hidroxilo que emanan.
- Las concentraciones residuales llegaron hasta 20 % o menos en periodos cumplidos de 5 a 60 minutos en varios experimentos bajo condiciones óptimas, lo que coincide con otros estudios realizados en efluentes que portan predominantemente contaminantes orgánicos.
- Una exploración minuciosa de variables fundamentales implicaría distancia entre electrodos, material, colocación anódica-catódica, conexión monopolar o bipolar, relación superficie/volumen, velocidad de agitación y temperatura, puesto que se ha comprobado su incidencia en la eficiencia de remoción, tiempo demandado de operación y consumo de energía y/o electródico.
- Los intentos de algunos autores por aproximarse a escenarios más complejos fructificaron sumando a las pruebas 1) iones sulfato, cloruro, calcio y magnesio, 2) remoción simultánea de dos metales pesados, 3) peróxido para limitar el hierro o aluminio en la solución, 4) electrocoagulación en plantas piloto con o sin pre o postratamiento y 5) práctica con aguas residuales reales, nombradas como naturales.
- El costo energético por cada metro cúbico de agua procesada expone a la electrocoagulación como un destacado método de tratamiento. No obstante, para no restringir demasiado los ensayos en laboratorio es importante que se haga un mayor número a escala piloto para promover con garantía de éxito el proceso en plantas de tratamiento pequeñas.

#### REFERENCIAS

- J. H. Duffus, ““Heavy metals”—a meaningless term?,” *Pure Appl. Chem.*, vol. 74, no. 5, pp. 793-807, may. 2002, doi: 10.1351/pac200274050793.

- [2] S. A. Razzak et al., “A comprehensive review on conventional and biological-driven heavy metals removal from industrial wastewater”, *Environmental Advances*, vol. 7, pp. 1-26, en. 2022, doi: [10.1016/j.envadv.2022.100168](https://doi.org/10.1016/j.envadv.2022.100168).
- [3] M. Jaishankar, T. Tseten, N. Anbalagan, B. B. Mathew y K. N. Beeregowda, “Toxicity, mechanism and health effects of some heavy metals”, *Interdiscip Toxicol*, vol. 7, no. 2, pp. 60-72, jun. 2014, doi: [10.2478/intox-2014-0009](https://doi.org/10.2478/intox-2014-0009).
- [4] J. Briffa, E. Sinagra y R. Blundell, “Heavy metal pollution in the environment and their toxicological effects on humans”, *Heliyon*, vol. 6, no. 9, p e04691, sept. 2020, doi: [10.1016/j.heliyon.2020.e04691](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04691).
- [5] M. Dey et al., “Assessment of contamination level, pollution risk and source apportionment of heavy metals in the Halda River water, Bangladesh”, *Heliyon*, vol. 7, no. 12, pp. 1-12, dic. 2021, doi: [10.1016/j.heliyon.2021.e08625](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e08625).
- [6] R. K. Gautam, S. K. Sharma, S. Mahiya y M. C. Chattopadhyaya, “Contamination of Heavy Metals in Aquatic Media: Transport, Toxicity and Technologies for Remediation”, en *Heavy Metals In Water: Presence, Removal and Safety*, S. K. Sharma, ed. Royal Society of Chemistry, sept. 2014, cap. 1, pp. 1-24, doi: [10.1039/9781782620174-00001](https://doi.org/10.1039/9781782620174-00001).
- [7] H. Ali y E. Khan, “What are heavy metals? Long-standing controversy over the scientific use of the term ‘heavy metals’ – proposal of a comprehensive definition”, *Toxicol Environ Chem*, vol. 100, no. 1, pp. 6-19, en. 2018, doi: [10.1080/02772248.2017.1413652](https://doi.org/10.1080/02772248.2017.1413652).
- [8] C. Zhang et al., “Effects of sediment geochemical properties on heavy metal bioavailability”, *Environ. Int.*, vol. 73, pp. 270-281, dic. 2014, doi: [10.1016/j.envint.2014.08.010](https://doi.org/10.1016/j.envint.2014.08.010).
- [9] G. Saxena, D. Purchase, S. I. Mulla, G. D. Saratale y R. N. Bharagava, “Phytoremediation of Heavy Metal-Contaminated Sites: Eco934 environmental Concerns, Field Studies, Sustainability Issues, and Future Prospects”, *Rev Environ Contam Toxicol*, vol. 249, pp. 71-131, feb. 2019, doi: [10.1007/398\\_2019\\_24](https://doi.org/10.1007/398_2019_24).
- [10] Z. Naderizadeh, H. Khademi y S. Ayoubi, “Biomonitoring of atmospheric heavy metals pollution using dust deposited on date palm leaves in southwestern Iran”, *Atmósfera*, vol. 29, no. 2, pp. 141-155, abr. 2016, doi: [10.20937/ATM.2016.29.02.04](https://doi.org/10.20937/ATM.2016.29.02.04).
- [11] M. M. Ali, D. Hossain, A. Imran, M. S. Khan, M. Begum y M. H. Osman, “Environmental Pollution with Heavy Metals: A Public Health Concern”, en *Heavy Metals. Their Environmental Impacts and Mitigation*, M. K. Nazal y H. Zhao, eds. Intechopen, jun. 2021, cap. 1, pp. 1-20, doi: [10.5772/intechopen.96805](https://doi.org/10.5772/intechopen.96805).
- [12] V. Antoniadis et al., “Trace elements in the soil-plant interface: Phytoavailability, translocation, and phytoremediation—A review”, *Earth-Science Reviews*, vol. 171, pp. 621-645, ag. 2017, doi: [10.1016/j.earscirev.2017.06.005](https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2017.06.005).
- [13] P. B. Tchounwou, C. G. Yedjou, A. K. Patlolla y D. J. Sutton, “Heavy Metal Toxicity and the Environment”, en *Molecular, Clinical and Environmental Toxicology (Experientia Supplementum*, vol. 101), A. Luch, ed. Berlín: Springer, abr. 2012, pp. 133-164, doi: [10.1007/978-3-7643-8340-4\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8340-4_6).
- [14] G. A. Engwa, P. U. Ferdinand, F. N. Nwalo y M. N. Unachukwu, “Mechanism and Health Effects of Heavy Metal Toxicity in Humans”, en *Poisoning in the Modern World. New Tricks for an Old Dog?*, O. Karcioglu y B. Arslan, eds. Intechopen, jun. 2019, cap. 5, pp. 1-23, doi: [10.5772/intechopen.82511](https://doi.org/10.5772/intechopen.82511).
- [15] K. H. Vardhan, P. S. Kumar y R. C. Panda, “A review on heavy metal pollution, toxicity and remedial measures: Current trends and future perspectives”, *J. Mol. Liq.*, vol. 290, pp. 1-22, sept. 2019, doi: [10.1016/j.molliq.2019.111197](https://doi.org/10.1016/j.molliq.2019.111197).
- [16] C. Zamora-Ledezma et al., “Heavy metal water pollution: A fresh look about hazards, novel and conventional remediation methods”, *Environ. Technol. Innov.*, vol. 22, pp. 1-26, may. 2021, doi: [10.1016/j.eti.2021.101504](https://doi.org/10.1016/j.eti.2021.101504).
- [17] H. I. Maarof, W. M. A. W. Daud y M. K. Aroua, “Recent trends in removal and recovery of heavy metals from wastewater by electrochemical technologies”, *Rev. Chem. Eng.*, vol. 33, no. 4, pp. 1-28, dic. 2016, doi: [10.1515/revce-2016-0021](https://doi.org/10.1515/revce-2016-0021).
- [18] D. Mills, “A new process for electrocoagulation”, *J Am Water Works Assoc*, vol. 92, no. 6, pp. 34-43, jun. 2000, doi: [10.1002/j.1551-8833.2000.tb08957.x](https://doi.org/10.1002/j.1551-8833.2000.tb08957.x).

- [19] T. Kim, T.-K. Kim y K.-D. Zoh, "Removal mechanism of heavy metal (Cu, Ni, Zn, and Cr) in the presence of cyanide during electrocoagulation using Fe and Al electrodes", *J. Water Process. Eng.*, vol. 33, pp. 1-9, feb. 2020, doi: [10.1016/j.jwpe.2019.101109](https://doi.org/10.1016/j.jwpe.2019.101109).
- [20] R. Rodaitė-Riševičienė, R. Saulė, V. Snitka y G. Saulis, "Release of Iron Ions From the Stainless Steel Anode Occurring During High-Voltage Pulses and Its Consequences for Cell Electroporation Technology", en *IEEE Trans. on Plasma Sci.*, vol. 42, no. 1, pp. 249-254, en. 2014, doi: [10.1109/TPS.2013.2287499](https://doi.org/10.1109/TPS.2013.2287499).
- [21] M. Y. A. Mollah, P. Morkovsky, J. A. G. Gomes, M. Kesmez, J. Parga y D. L. Cocke. "Fundamentals, present and future perspectives of electrocoagulation", *J. Hazard. Mater.*, vol. 114, no. 1-3, pp. 199-210, oct. 2004, doi: [10.1016/j.jhazmat.2004.08.009](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2004.08.009).
- [22] E. Bazrafshan, L. Mohammadi, A. Ansari-Moghaddam y A. H. Mahvi. "Heavy metals removal from aqueous environments by electrocoagulation process- a systematic review", *J. Environ. Health Sci. Eng.*, vol. 13, no. 74, pp. 1-16, oct. 2015, doi: [10.1186/s40201-015-0233-8](https://doi.org/10.1186/s40201-015-0233-8).
- [23] I. Kabdaşlı, I. Arslan-Alaton, T. Ölmez-Hancı y O. Tünay, "Electrocoagulation applications for industrial wastewaters: a critical review", *Environ. Technol. Rev.*, vol. 1, no. 1, pp. 2-45, nov. 2012, doi: [10.1080/21622515.2012.715390](https://doi.org/10.1080/21622515.2012.715390).
- [24] S. M. Didar-UI Islam, "Electrocoagulation (EC) technology for wastewater treatment and pollutants removal", *Sustain. Water Resour. Manag.*, vol. 5, pp. 359-380, jul. 2017, doi: [10.1007/s40899-017-0152-1](https://doi.org/10.1007/s40899-017-0152-1).
- [25] K. Rajaniemi, S. Tuomikoski y U. Lassi, "Electrocoagulation Sludge Valorization—A Review", *Resources*, vol. 10, no. 12, pp. 1-15, dic. 2021, doi: [10.3390/resources10120127](https://doi.org/10.3390/resources10120127).
- [26] N. K. Shammas, M.-F. Pouet y A. Grasmick, "Wastewater Treatment by Electrocoagulation- Flotation", en *Flotation Technology* (vol. 12), L. K. Wang, N. K. Shammas, W. A. Selke y D. B. Aulenbach eds. Totowa, NJ: Humana Press, abr. 2010, pp. 199-217, doi: [10.1007/978-1-60327-133-2\\_6](https://doi.org/10.1007/978-1-60327-133-2_6).
- [27] A. Dura y C. B. Breslin, "Electrocoagulation using stainless steel anodes: Simultaneous removal of phosphates, Orange II and zinc ions", *J. Hazard. Mater.*, vol. 374, pp. 152-158, jul. 2019, doi: [10.1016/j.jhazmat.2019.04.032](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2019.04.032).
- [28] J. R. Parga et al., "Characterization of Electrocoagulation for Removal of Chromium and Arsenic", *Chem Eng Technol.*, vol. 28, no. 5, pp. 605-612, abr. 2005, doi: [10.1002/ceat.200407035](https://doi.org/10.1002/ceat.200407035).
- [29] A. S. Naje, S. Chelliapan, Z. Zakaria, M. A. Ajeel y P. A. Alaba "A review of electrocoagulation technology for the treatment of textile wastewater", *Rev. Chem. Eng.*, vol. 33, no. 3, pp. 1-30, nov. 2016, doi: [10.1515/revce-2016-0019](https://doi.org/10.1515/revce-2016-0019).
- [30] S. Garcia-Segura, M. M. S. G. Eiband, J. V. de Melo y C. A. Martínez-Huitle, "Electrocoagulation and advanced electrocoagulation processes: A general review about the fundamentals, emerging applications and its association with other technologies", *J. Electroanal. Chem.*, vol. 801, pp. 267-299, sept. 2017, doi: [10.1016/j.jelechem.2017.07.047](https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2017.07.047).
- [31] M. Kobya, M. Bayramoglu y M. Eyvaz, "Techno-economical evaluation of electrocoagulation for the textile wastewater using different electrode connections", *J. Hazard. Mater.*, vol. 148, no. 1-2, pp. 311-318, sept. 2007, doi: [10.1016/j.jhazmat.2007.02.036](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2007.02.036).
- [32] D. Sharma, P. K. Chaudhari y A. K. Prajapati, "Removal of chromium (VI) and lead from electroplating effluent using electrocoagulation", *Sep Sci Technol.*, vol. 55, no. 2, pp. 321-331, en. 2019, doi: [10.1080/01496395.2018.1563157](https://doi.org/10.1080/01496395.2018.1563157).
- [33] F. Ilhan, K. Ulucan-Altuntas, Y. Avsar, U. Kurt y A. Saral, "Electrocoagulation process for the treatment of metal-plating wastewater: Kinetic modeling and energy consumption", *Front Environ Sci Eng.*, vol. 13, no. 73, pp. 1-8, sept. 2019, doi: [10.1007/s11783-019-1152-1](https://doi.org/10.1007/s11783-019-1152-1).
- [34] T. A. Kenova, I. S. Vasil'eva y V. L. Kornienko, "Removal of Heavy Metal Ions from Aqueous Solutions by Electrocoagulation Using Al and Fe Anodes", *Russ J Appl Chem.*, vol. 88, no. 4, pp. 646-651, jul. 2015, doi: [10.1134/S1070427215040242](https://doi.org/10.1134/S1070427215040242).
- [35] S. Zhang, X. Yang, Q. Cheng, M. Wang, C. Hu, B. Chai y J. Li, "Treatment of Wastewater Containing Nickel by Electrocoagulation Process Using Photovoltaic Energy", *Environ. Eng. Sci.*, vol. 35, no. 5, pp. 1-9, nov. 2017, doi: [10.1089/ees.2016.0621](https://doi.org/10.1089/ees.2016.0621).

- [36] H. ELKaramany, A. Elbaz, R. Wagdy y I. Mohamed, "Chromium and cadmium removal from synthetic wastewater by Electrocoagulation process", *JETT*, vol. 9, no. 2, pp. 375-382, dic. 2021, doi: [10.47277/JETT/9\(2\)382](https://doi.org/10.47277/JETT/9(2)382).
- [37] K. Brahmi, W. Bouguerra, B. Hamrouni, E. Elaloui, M. Loungou y Z. Tlili, "Investigation of electrocoagulation reactor design parameters effect on the removal of cadmium from synthetic and phosphate industrial wastewater", *Arab. J. Chem.*, vol. 12, no. 8, pp. 1848-1859, dic. 2019, doi: [10.1016/j.arabjc.2014.12.012](https://doi.org/10.1016/j.arabjc.2014.12.012).
- [38] L. Xu, G. Cao, X. Xu, S. Liu, Z. Duan, C. He, Y. Wang y Q. Huang, "Simultaneous removal of cadmium, zinc and manganese using electrocoagulation: Influence of operating parameters and electrolyte nature", *J. Environ. Manage.*, vol. 204, parte 1, pp. 394-403, dic. 2017, doi: [10.1016/j.jenvman.2017.09.020](https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2017.09.020).
- [39] P. Krystynik, P. Masin, Z. Krusinova y P. Kluson, "Application of electrocoagulation for removal of toxic metals from industrial effluents", *Int. J. Environ. Sci. Technol.*, vol. 16, pp. 4167-4172, oct. 2018, doi: [10.1007/s13762-018-2074-3](https://doi.org/10.1007/s13762-018-2074-3).
- [40] M. K. Chegeni, A. Shahedi, A. K. Darban, A. Jamshidi-Zanjani y M. Homae, "Simultaneous removal of lead and cyanide from the synthetic solution and effluents of gold processing plants using electrochemical method", *J. Water Process. Eng.*, vol. 43, pp. 1-11, oct. 2021, doi: [10.1016/j.jwpe.2021.102284](https://doi.org/10.1016/j.jwpe.2021.102284).
- [41] H. I. Abdel-Shafy, R. M. M. Morsy, M. A. I. Hewehy, T. M. A. Razeq y M. M. A. Hamid, "Treatment of industrial electroplating wastewater for metals removal via electrocoagulation continuous flow reactors", *Water Pract. Technol.*, vol. 17, no. 2, pp. 555-566, en. 2022, doi: [10.2166/wpt.2022.001](https://doi.org/10.2166/wpt.2022.001).

# Determinación de fuerza de agarre en operadores de producción de una industria médica de Ciudad Juárez

## *Determination of hand grip of production operators of a medical industry at Ciudad Juarez*

Javier Azael Ayala-Gutiérrez<sup>1</sup>, Karla Gabriela Gómez-Bull<sup>1</sup>✉, Juan Luis Hernández-Arellano<sup>1</sup>, María Marisela Vargas-Salgado<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Ciudad Juárez / Instituto de Ingeniería y Tecnología.

### RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo determinar la fuerza de agarre aplicada en los 5 niveles de abertura del dinamómetro hidráulico Jamar en operadores de producción de una industria médica en Ciudad Juárez, Chihuahua, México. La muestra se conformó por 54 participantes mayores de edad. Se obtuvieron medidas con un dinamómetro hidráulico de Jamar solo de la mano dominante. Para determinar diferencias significativas en los niveles de abertura se realizó un análisis ANOVA de un solo factor con el software Minitab 20, el cual dio como resultado un valor  $p$  menor que  $\alpha=0.05$ , con un nivel de confianza del 95 %. La abertura óptima en el que se obtuvo mayor aplicación de fuerza de agarre tanto en hombres como en mujeres fue en el nivel 2, obteniendo una media de 41.33 kgf para los hombres y 26.74 kgf para las mujeres, mientras que el nivel donde se obtuvo menor aplicación de fuerza fue el 5 para ambos géneros. Se concluyó que el nivel de abertura del dinamómetro influye de forma significativa sobre la aplicación de fuerza, por lo que es importante que estas consideraciones sean tomadas en cuenta al momento de diseñar herramientas manuales de trabajo.

**PALABRAS CLAVE:** fuerza de agarre; antropometría; biomecánica.

### ABSTRACT

The present research has as main purpose to determine the hand grip applied on the 5 levels opening of the Jamar's hydraulic dynamometer on production operator of the medical industry at Ciudad Juárez. The sample consisted by 54 participants, all of them adults. The averages were obtained with a Jamar's hydraulic dynamometer, only of the dominant hand. To obtain the significant differences on the opening levels, an ANOVA analysis was made of only one factor on the 20 Minitab software, which showed as result a  $p$  value less than  $\alpha=0.05$ , with a 95% of confidence level. The optimal opening in which the operators had the highest hand grip, as in men and as in women, was on level 2, obtaining an average of 41.33 kgf for men, and a 26.74 kgf for women. The level where the applied strength was lower, was the 5 for both genders. It was concluded that the opening level of the dynamometer influences significantly on the applied hand grip, consequently it is important that these considerations must be taken in count at the moment of designing working tools.

**KEYWORDS:** grip strength; anthropometry; biomechanics.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Karla Gabriela Gómez Bull  
**INSTITUCIÓN:** Universidad Autónoma de Ciudad Juárez / Instituto de Ingeniería y Tecnología / Depto. de Ingeniería Industrial y Manufactura  
**DIRECCIÓN:** Av. del Charro núm. 450 norte, col. Partido Romero, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México  
**CORREO ELECTRÓNICO:** karla.gomez@uacj.mx

**Fecha de recepción:** 29 de mayo de 2022. **Fecha de aceptación:** 27 de agosto de 2022. **Fecha de publicación:** 31 de agosto de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

Para el ser humano, las manos son herramientas de gran utilidad que sirven para realizar funciones mecánicas, sensitivas, de protección e incluso de comunicación [1]. Una de las principales funciones de la mano es la presión, la sujeción o el agarre de objetos tales como pasamanos, teléfonos, volantes y herramientas manuales [2]. Para estas actividades, se requiere *fuerza de agarre*, la cual ocurre cuando se sujeta un objeto entre el dedo pulgar y/o todos los dedos y la palma de la mano [3]. También puede ser definida como la capacidad cuantificable para ejercer presión con la mano y/o con los dedos [4], por tanto, es el resultado de un gran esfuerzo o el esfuerzo máximo aplicado por la mano [5].

Es importante integrar principios ergonómicos, especialmente en cuestiones de biomecánica, en el diseño de herramientas manuales, ya que a través de ellos se puede reducir la cantidad de fuerza muscular requerida durante los trabajos manuales [6] que se caracterizan por la capacidad de presión de agarre con las manos. La medición de la fuerza de agarre se lleva a cabo con el fin de diagnosticar o evaluar alteraciones en mano y muñeca en un periodo de tiempo determinado, tales como el Síndrome de Túnel Carpiano, que es un trastorno frecuentemente relacionado con trabajos repetitivos y la aplicación de fuerza, como los llevados a cabo en el ámbito laboral [7], [8].

La industria médica se caracteriza por la elaboración de productos para la salud y bienestar del ser humano. Dado que una gran parte de su producción es artesanal, con una naturaleza compleja que requiere una cantidad considerable de participantes involucrados en la manufactura, el reto de estas organizaciones es saber maximizar recursos y esfuerzos para así ser más eficientes y eficaces [9] en ramas tales como la farmacéutica, alimentos, suplementos nutricionales, dispositivos y biotecnología [10].

En este tipo de industrias, el personal de producción comúnmente hace uso de la fuerza de agarre durante el proceso de elaboración de ciertos productos, lo que, a su vez, combinado con movimientos constantes, en el transcurso del tiempo se puede generar una incomodidad, fatiga muscular o en algunos casos desarrollar trastornos músculo esqueléticos [3]. Últimamente, en gran cantidad de trabajos se aplica la fuerza de agarre para manipular herramientas [11].

Por esta razón, es importante llevar a cabo de manera frecuente un diagnóstico ergonómico del trabajador acerca de la forma en que utiliza las herramientas manuales y las lesiones que de ahí puedan derivarse. El dinamómetro de mano es un instrumento de fácil manejo que mide la fuerza ejercida por los músculos del antebrazo [12], misma que se ve influenciada por la postura, edad, sexo, determinadas características antropométricas [13] y la ocupación [11].

La presente investigación tiene como objetivo determinar la fuerza de agarre en una muestra de operadores de producción que laboran en una empresa líder en la manufactura de productos médicos en Ciudad Juárez, Chihuahua, México, lo cual permitirá evaluar sus capacidades máximas de aplicación de dicha fuerza y conocer sus limitaciones. Además, estos datos podrían servir de base para el diseño futuro de tareas o herramientas manuales que implican aplicación de fuerza de agarre para, de esta forma, prevenir la presencia de lesiones músculo esqueléticas.

## II. METODOLOGÍA

### MATERIALES

Los materiales utilizados en esta investigación fueron una hoja de consentimiento, en la cual se le informó al participante que el estudio no representaba ningún riesgo para su salud, y una serie de preguntas para identificar aquellos participantes que tuvieran antecedentes de lesiones en miembro superior.

Para medir las dimensiones antropométricas se utilizó el equipo de antropometría ErgoTech Mx (Figura 1), conformado por un antropómetro para las dimensiones de la mano, un cono de empuñadura para medir la circunferencia de agarre y un dinamómetro hidráulico marca Jamar, mismo que cuenta con 5 niveles de abertura (Figura 2).

### MÉTODO

En el área de producción de la empresa mencionada laboran 73 operadores. Para lograr que la muestra fuera significativa, se seleccionó un tamaño de 54 sujetos sin antecedentes de lesiones en miembros superiores y se consideró un nivel de confianza 95 %. La muestra fue obtenida en función de la disponibilidad de los trabajadores.

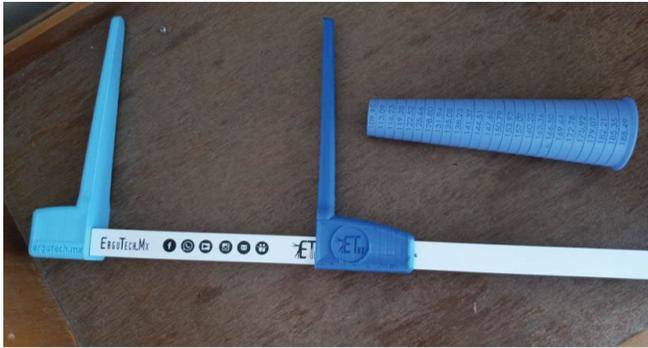


Figura 1. Equipo de antropometría ErgoTech Mx.

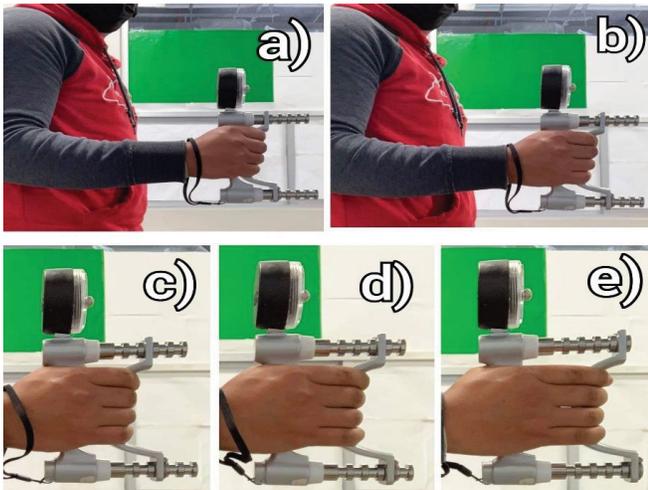


Figura 2. Niveles de apertura del dinamómetro hidráulico de Jamar; a) nivel 1, b) nivel 2, c) nivel 3, d) nivel 4, e) nivel 5.

Después de haber seleccionado la muestra, se reunió a los participantes para darles las indicaciones acerca del estudio a realizar, explicarles en qué consistía este, señalarles que no representaba ningún riesgo para su salud y que si aceptaban participar firmarían la hoja de consentimiento. Se descartaron aquellos que tuvieran lesiones músculo esqueléticas en la mano dominante y, al final, quedaron 54 participantes.

Para medir las dimensiones antropométricas: ancho máximo de la mano, ancho de la mano sin tomar en cuenta el dedo pulgar, se pidió a los participantes que extendieran su mano dominante (Figura 3).

Enseguida se midió la circunferencia de agarre con el cono de empuñadura, para lo cual se indicó a los participantes que unieran su dedo pulgar y dedo medio y se deslizara sobre el cono de empuñadura hasta que estos ya no pudieran permanecer unidos, como se muestra en la Figura 4.

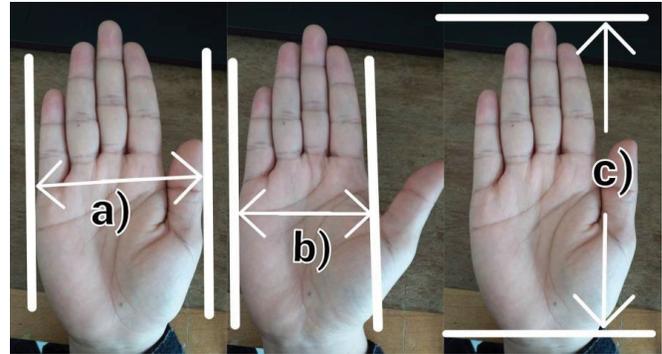


Figura 3. Mediciones antropométricas de la mano; a) ancho máximo, b) ancho de la mano, c) longitud de la mano.



Figura 4. Cono de medición de empuñadura ErgoTech Mx.

A continuación, se utilizó el dinamómetro hidráulico de Jamar, para lo cual se les explicó a los participantes el Protocolo de Caldwell, que consiste en ejercer fuerza de forma gradual durante 3 segundos y sostener dicha fuerza los siguientes 2 segundos [14]. La fuerza de agarre fue determinada mientras el participante se encontraba de pie, con la espalda erguida y codo flexionado a 90° y la muñeca entre 0 y 30° de extensión. La medición se realizó en tres ocasiones para cada nivel y se registró la mayor de estas. Este proceso se repitió para cada uno de los 5 niveles de apertura del dinamómetro, como se muestra en la Figura 2, con 2 minutos de recuperación entre cada intento.

Una vez obtenidos los resultados de la muestra en su totalidad, se elaboró una base de datos utilizando el software de análisis estadístico Minitab 20, con el cual se obtuvieron los estadísticos básicos descriptivos, media, desviación estándar, rango, valores máximos y mínimos. También se realizó un análisis ANOVA para determinar comparaciones estadísticas e identificar la presencia de diferencias significativas en la fuerza aplicada a partir del nivel de apertura del dinamómetro.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se seleccionó una muestra conformada por 54 operadores de producción de una industria médica de Ciudad Juárez que se encontraran disponibles para participar en el estudio, 27 del género femenino y 27 del masculino que voluntariamente accedieron a formar parte de la presente investigación.

Se consideró a quienes cumplieran con los siguientes criterios de inclusión: tener una edad de 18 a 50 años y no presentar enfermedades musculoesqueléticas en miembro superior, y se descartaron aquellos que recientemente se aplicaron la vacuna contra la COVID-19.

La **Tabla 1** contiene los datos antropométricos de la muestra de participantes, donde se puede observar que los hombres tienden a medidas más grandes que las mujeres y la media de longitud de la mano de los hombres es de 18.104 cm, en comparación de la media de las mujeres que es de 16.719 cm. Igualmente, los hombres presentan medidas mayores en el ancho de la mano, el ancho máximo de la mano y la circunferencia de agarre. Todas las medidas fueron tomadas de la mano dominante del trabajador.

TABLA 1  
DATOS ANTROPOMÉTRICOS DE LA MUESTRA

DIMENSIÓN ANTROPOMÉTRICA	HOMBRES		MUJERES	
	$\chi$	$\sigma$	$\chi$	$\sigma$
Longitud de la mano (cm)	18.104	0.768	16.719	1.042
Ancho de la mano (cm)	9.0889	0.5018	8.0	0.536
Ancho máximo de la mano (cm)	10.470	0.712	9.241	0.700
Circunferencia de agarre (mm)	149.16	10.58	140.79	11.06

Los resultados obtenidos para la fuerza de agarre se exponen en la **Tabla 2**. Ahí se encuentran separados por nivel de abertura, lo que permite analizar la fuerza ejercida en kgf en diferentes posiciones de abertura de la mano. Se observa que tanto los hombres como las mujeres presentaron mayor aplicación de fuerza en el nivel 2 del dinamómetro, con una media de 41.33 kgf y 26.74 kgf, respectivamente.

Por otra parte, se puede apreciar que el nivel de abertura del dinamómetro, en el que se aplicó menor cantidad de fuerza para ambos géneros fue el nivel 5, con 30.44 kgf en los hombres y 17.037 kgf en las mujeres.

TABLA 2  
RESULTADOS DE FUERZA DE AGARRE ENTRE HOMBRES Y MUJERES EN CADA NIVEL DE ABERTURA

NIVEL DE ABERTURA	HOMBRES		MUJERES	
	$\chi$	$\sigma$	$\chi$	$\sigma$
Nivel 1 (kgf)	33.96	8.46	22.89	5.42
Nivel 2 (kgf)	41.33	9.29	26.74	6.04
Nivel 3 (kgf)	39.48	9.87	23.59	6.20
Nivel 4 (kgf)	35.33	8.55	20.15	5.48
Nivel 5 (kgf)	30.44	7.31	17.037	4.603

En la **Figura 5** se muestra la fuerza de agarre obtenida por el total de los participantes en el estudio. En cada uno de los niveles de abertura del dinamómetro se puede observar que, en general, el nivel donde se aplicó mayor fuerza fue el nivel 2 con una media de 34.04 kgf, en comparación al nivel 5 que obtuvo la media más baja de 23.74 kgf.

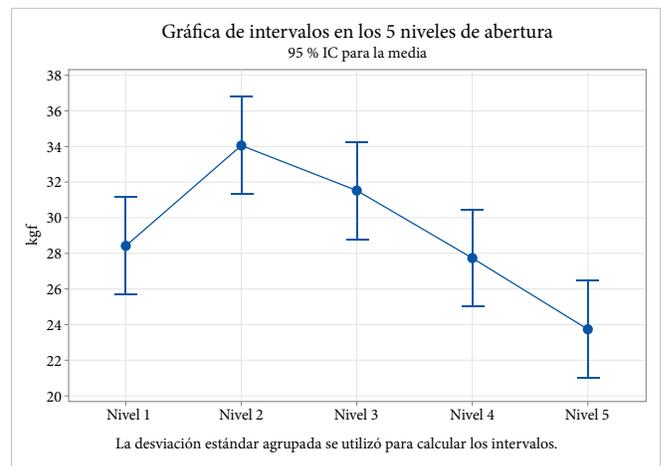


Figura 5. Diferencias de fuerza de agarre entre los cinco niveles de abertura.

Se realizó un análisis ANOVA de un solo factor de la fuerza aplicada por la muestra conformada por 54 operadores de producción a partir del nivel de abertura del dinamómetro para determinar la presencia de diferencias significativas en la aplicación de fuerza de agarre.

Los resultados se muestran en la **Tabla 3**. Se obtuvo un valor de  $p$  menor a 0.05, por lo tanto, se cuenta con suficiente evidencia para decir que existe diferencia significativa en la fuerza de agarre aplicada en los cinco niveles de abertura. Esto quiere decir que la abertura de la mano influye sobre la aplicación de fuerza de agarre.

TABLA 3  
ANÁLISIS DE VARIANZA

FUENTE	GL	SC AJUST.	MC AJUST.	VALOR F	VALOR <i>p</i>
Factor	4	3312	828.1	7.99	0.000
Error	265	27447	103.6		
Total	269	30759			

También se realizó una prueba de Tukey para hacer comparaciones múltiples y determinar los intervalos de

confianza para las diferencias entre los niveles del dinamómetro. En la [Tabla 4](#) se puede observar que existe diferencia significativa entre los niveles 2 con 1, 4 con 2, 5 con 2 y 5 con 3, ya que sus intervalos de confianza para las diferencias no incluyen al cero y el valor de *p* en estos es menor a 0.5, por lo tanto, se encontró suficiente evidencia para decir que existe diferencia significativa en la aplicación de fuerza de agarre en dichos niveles de abertura.

TABLA 4  
PRUEBAS SIMULTÁNEAS DE TUKEY PARA DIFERENCIAS DE LAS MEDIAS (NIVEL DE CONFIANZA INDIVIDUAL = 99.32 %)

DIFERENCIA DE NIVELES	DIFERENCIA DE LAS MEDIAS	EE DE DIFERENCIA	IC DE 95 %	VALOR T	VALOR <i>p</i> AJUSTADO
Nivel 2 - Nivel 1	5.61	1.96	(0.27, 10.96)	2.86	0.034
Nivel 3 - Nivel 1	3.11	1.96	(-2.23, 8.46)	1.59	0.505
Nivel 4 - Nivel 1	-0.69	1.96	(-6.03, 4.66)	-0.35	0.997
Nivel 5 - Nivel 1	-4.69	1.96	(-10.03, 0.66)	-2.39	0.117
Nivel 3 - Nivel 2	-2.50	1.96	(-7.85, 2.85)	-1.28	0.706
Nivel 4 - Nivel 2	-6.30	1.96	(-11.64, -0.95)	-3.21	0.011
Nivel 5 - Nivel 2	-10.30	1.96	(-15.64, -4.95)	-5.26	0.000
Nivel 4 - Nivel 3	-3.80	1.96	(-9.14, 1.55)	-1.94	0.297
Nivel 5 - Nivel 3	-7.80	1.96	(-13.14, -2.45)	-3.98	0.001
Nivel 5 - Nivel 4	-4.00	1.96	(-9.35, 1.35)	-2.04	0.246

#### IV. CONCLUSIONES

Este tipo de estudios de fuerza de agarre se utiliza con frecuencia para evaluar alteraciones físicas a nivel de mano-muñeca a través del tiempo, ya que se pueden presentar enfermedades musculoesqueléticas por movimientos constantes en ciertos procesos manuales. Por ello, se evaluó una muestra de 54 operadores de producción, hombres y mujeres, de una industria médica de Ciudad Juárez.

El objetivo principal de la presente investigación se cumplió y se obtuvieron resultados significativos. El propósito fue determinar la fuerza de agarre de la mano dominante. De acuerdo a los resultados, los hombres tienen medidas antropométricas más grandes que las mujeres en longitud, ancho, ancho máximo de la mano y circunferencia de agarre. Se concluyó que el nivel de abertura del dinamómetro hidráulico de Jamar donde se optimizó la aplicación de fuerza es el nivel 2 con una media de 34.04 kgf.

Además, en las comparaciones múltiples realizadas con la prueba de Tukey se concluyó que los resultados de

comparación entre niveles de abertura existen diferencias significativas en los niveles 1 y 2, 4 y 2, 5 y 2 y 5 y 3, estos niveles tienen un valor de *p* menor a  $\alpha=0.05$ . En comparación con los demás niveles de abertura, el nivel 5 es el que presenta una tasa de medición más baja con una media general de 23.74 kgf.

Los hallazgos de este trabajo son una importante contribución para el campo de la ergonomía, específicamente en la biomecánica, ya que amplían la información relacionada con las capacidades de aplicación de fuerza de agarre de trabajadores. A su vez, estos datos son de relevancia para la industria, ya que pueden generarse guías de diseño para herramientas y actividades que involucren la fuerza de agarre, de manera que establezcan límites para aplicar dicha fuerza y se eviten las lesiones músculo esqueléticas en miembro superior.

Dado que es de suma importancia continuar con estudios futuros de determinación de fuerza de agarre, es recomendable que se tomen muestras más grandes y se incluya a otros sectores laborales, como la rama automotriz, química, textil, siderúrgica, militar, turís-

tica y alimentaria. Es importante mencionar que estos ejercicios se pueden llevar a cabo con diferentes tipos de fuerza utilizada para ensambles manuales en la industria, tales como fuerza de pinzamiento, también conocida como agarre de precisión o agarre en forma de pellizco, y de torque o rotación.

## REFERENCIAS

- [1] M. G. Coronel, H. Hernández y I. Hernández, "Determinación de la fuerza isométrica de prensión manual gruesa en población en edad laboral con dinamometría obtenida con el equipo terapéutico Baltimore", *Rev Mex Med Fis Rehab*, vol. 30, no. 1-2, pp. 5-11, 2018.
- [2] I. Halim, R. Z. Radin, M. S. Syed, N. Ahmad, A. Saptari y V. Padmanathan, "The Influence of Hand Tool Design on Hand Grip Strength: A Review", *Int. J. Integr. Eng.*, vol. 11, no. 6, pp. 53-69, 2019. doi: 10.30880/ijie.2019.11.06.007.
- [3] P. L. Barraza, V. H. Herrera, J. Macías, M. S. Espinal y K. G. Gómez. (2019). Determinación de fuerza de agarre y antropometría de la mano en una muestra de estudiantes universitarios. Presentado en el Congreso Internacional de Investigación Academia Journals, Oaxaca. [En línea]. Disponible en: <http://cathi.uacj.mx/20.500.11961/8076>
- [4] I. N. Salinas, C. E. Vargas, C. Aveytia y G. Ibarra. (May. 5-8, 2010). Determinación del nivel óptimo de abertura de dinamómetro hidráulico manual para la medición de fuerza máxima de agarre. XIII Congr. Int. de Ergonomía SEMAC, Ciudad Juárez. [En línea]. Disponible en: <http://www.semec.org.mx/images/stories/Congreso2010/we3.pdf>
- [5] R. Jain, M. Lal, M. Kumar y G. Sharan, "Impact of posture and upper-limb muscle activity on grip strength", *Int J Occup Saf Ergon*, vol. 25, no. 4, pp. 614-620, 2018, doi: 10.1080/10803548.2018.1501972.
- [6] S. N. Imrhan y K. Farahmand, "Male torque strength in simulated oil rig tasks: the effects of grease-smear gloves and handle length, diameter and orientation", *Appl Ergon*, vol. 30, no. 5, pp. 455-462, 1999, doi: 10.1016/S0003-6870(98)00054-4.
- [7] P. C. Ramírez y A. Angarita, "Fuerza de agarre en trabajadores sanos de Manizales", *Rev. Col. Reh.*, vol. 8, no. 1, pp. 109-118, 2009.
- [8] B. Wollesen et al., "Influences of Neck and/or Wrist Pain on Hand Grip Strength of Industrial Quality Proofing Workers", *Saf Health Work*, vol. 11, no. 4, pp. 458-465, dic. 2020, doi: 10.1016/j.shaw.2020.06.008.
- [9] L. E. Macías, F. A. Bribiescas, H. S. Lee, J. Barojas y R. Ramírez, "Las competencias del diseñador industrial en la industria médica", *CULCYT*, vol. 52, no. esp. 1, p. 20, 2016, disponible en: <https://revistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/870>.
- [10] G. Genta-Mesa y I. D. Flores, "Relación médico-industria y los conflictos de interés: aspectos históricos y normativos, impactos negativos y propuestas", *IATREIA*, vol. 32, no. 4, pp. 298-310, 2019, doi: 10.17533/udea.iatreia.16.
- [11] M. Saremi y S. Rostamzadeh, "Hand Dimensions and Grip Strength: A Comparison of Manual and Non-manual Workers", en *Proc. of the 20th Congr. of the Int. Ergonomics Association (IEA 2018)*, S. Bagnara, R. Tartaglia, S. Albolino, T. Alexander y Y. Fujita, eds. 2019, pp. 520-529, doi: 10.1007/978-3-319-96065-4\_56.
- [12] J. G. Hernández-Martínez, C. Anguita-Vera, P. Asenjo-Flores, M. Solís-Millaguín y C. Asenjo-Paredes, "Niveles de fuerza de agarre de mano y composición corporal de mujeres mayores chilenas", *EFDeportes*, vol. 24, no. 256, pp. 46-58, 2019, disponible en: <https://efdeportes.com/efdeportes/index.php/EFDeportes/article/view/951/908>.
- [13] M. A. Vera-Villavicencio, "Comparación de la Fuerza Mediante el Dinamómetro y las Flexiones de Codo en Personal Militar", *Polo del conocimiento*, vol. 7, no. 67, pp. 263-281, 2022.
- [14] L. Caldwell et al., "A proposed standard procedure for static muscle strength testing", *Am. Ind. Hyg. Assoc. J.*, vol. 35, no. 4, pp. 201-206, 1974, doi: 10.1080/0002889748507023.

## RECONOCIMIENTOS

Se agradece a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, que puso a disposición el equipo de medición de fuerza de agarre, a ErgoTech México, que proporcionó el equipo para la toma de mediciones antropométricas, y al personal de la industria de elaboración de productos médicos que participó de forma voluntaria en la presente investigación.

Edición especial

# La simbiosis en el puente cognitivo entre la física y las matemáticas

La edición especial “La simbiosis en el puente cognitivo entre la física y las matemáticas” de CULCYT tiene como objetivo exponer la innovación, la investigación y la difusión de las mejores prácticas emergentes del vínculo intrínseco entre ambas disciplinas. Estas comunidades científicas han convivido desde el nacimiento de la ciencia misma y han transitado a lo largo del tiempo entre sucesos históricos, sociales y políticos, producto de una sociedad cada vez más interesada en la aplicación científica y tecnológica.

La Asociación Americana de Profesores de Física -Sección México (AAPT-MX), que celebra su XV aniversario en 2022, tiene la misión de promover las mejores prácticas de enseñanza de la física centradas en los estudiantes y fomenta la formación de redes de colaboración entre docentes de todos los niveles educativos para impulsar la investigación y promover la actualización profesional y la mejora continua del aprendizaje de la física, que es base de los programas de ingeniería.

La física ha sido reconocida tradicionalmente como una ciencia atenta a las necesidades de la sociedad. Para ello se ha reflejado en las aplicaciones ingenieriles, con sus procesos de mejora y percepción de utilidad hacia la sociedad que, de manera alterna o evolutiva, ha

permeado en la tecnología y su innovación constante. Conscientes de estas dimensiones, esta edición se convierte en un espacio de comunicación de la comunidad educativa en física y matemáticas.

Los artículos de esta edición especial abordan varios aspectos relevantes en la formación de la cultura científica, tecnológica y profesional. Entre los trabajos, se expone cómo utilizar una técnica aleatoria para acotar la incertidumbre de variables conjeturadas, con el fin de obtener la mejor medición de cantidades físicas como la fuerza. También, se trata sobre la interpretación de modelos matemáticos y su relación con cantidades físicas. Además de narrar las experiencias en la presentación de demostraciones y experimentos, se discute el estímulo a las capacidades del aprendizaje imaginativo, las cuales están relacionadas con las habilidades blandas necesarias en la formación integral. Finalmente, se muestra un ejemplo de la aplicación de conceptos de la física para evaluar la generación de energía eléctrica mediante un diseño de ingeniería que toma en consideración las condiciones locales para valorar la factibilidad de la implementación.

Dr. Jesús Manuel Sáenz Villela  
*Editor invitado*

# Videoanálisis y técnica Monte Carlo para calcular la cota máxima de la fuerza de una patada

## *Video-analysis and Monte Carlo technique to calculate the maximum force of a kick*

Dr. Vicente Torres-Zúñiga<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Medicina, Licenciatura en Ciencia Forense.

### RESUMEN

En este estudio, se analizó la videograbación casual de un testigo, donde un luchador profesional patea a un adversario y, complementando con información pública, se estimó la fuerza de las piernas al dar el golpe. Sin embargo, siendo los datos obtenidos de una fuente secundaria, las ecuaciones deterministas por sí solas son inadecuadas para calcular la incertidumbre asociada, por lo que se utilizó un proceso de cálculo aleatorio. Programando las peores condiciones tolerables, se obtuvo una gran coherencia (es decir, correlación:  $R^2 = 0.991$ , y una diferencia de error de 10 %) entre la simulación numérica y un modelo estadístico y además se determinó la fuerza promedio de las piernas y su desviación estándar:  $98 \pm 27$  N (error porcentual: 28 %), de modo que la fuerza máxima de las piernas (y de baja probabilidad) es de  $3\sigma = 182$  N. Así, considerando la masa neta, la fuerza máxima del movimiento es 758 N. Esta información se contrastó, sin contradicción, con la literatura sobre deportes de contacto. Se muestra a detalle que una adecuada acotación de números aleatorios en una ecuación determinística permite enmendar la falta de información en casos videograbados, de modo que se puede optimizar la estimación del intervalo de incertidumbre cuando los datos de medición son poco confiables.

**PALABRAS CLAVE:** ciencia forense; golpe; método Monte Carlo; videoanálisis.

### ABSTRACT

In this study, a casual video recording of a witness, where a professional wrestler kicks an opponent, was analyzed and supplemented with public information, the strength of the legs when striking was estimated. However, being the data obtained from a secondary source, the deterministic equations by themselves are inadequate to calculate the associated uncertainty, so it was used a random calculation process. Programming the worst tolerable conditions, an excellent coherence (i.e., correlation:  $R^2 = 0.991$  and an error difference of 10%) between the numerical simulation and a statistical model were obtained. Also, the average strength of the legs and its standard deviation:  $98 \pm 27$  N (percentage error: 28%) was determined. So the maximum force of the legs (and of low probability) is  $3\sigma = 182$  N. Thus, considering the net mass, the maximum force of the movement is 758 N. This information was contrasted, without contradiction, with the literature on contact sports. It is shown in detail that an adequate dimensioning of random numbers in a deterministic equation makes it possible to correct the lack of information in videotaped cases; so that the estimation of the uncertainty interval can be optimized when the measurement data is unreliable.

**KEYWORDS:** forensic science; wrestling; Monte Carlo method; video analysis.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Vicente Torres Zúñiga.

**INSTITUCIÓN:** Facultad de Medicina, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Av. Universidad 3000, C. P. 04510, Ciudad de México.

**CORREO ELECTRÓNICO:** vicentz@gmail.com

**Fecha de recepción:** 8 de abril de 2022. **Fecha de aceptación:** 17 de junio de 2022. **Fecha de publicación:** 30 de junio de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

La tendencia es clara: cada día se tiene más acceso a grabaciones captadas por testigos casuales, es decir, filmes que no son producto de un experimento o una acción controlada en un laboratorio. Muchos de esos vídeos despiertan preguntas del ámbito de la física, por lo cual son adecuados para presentarse a los alumnos. En la literatura especializada hay ejemplos notables de la utilización de vídeos casuales para desarrollar un tema de física [1], [2], [3]. Con todo, apenas se ha explorado las ventajas que presentan estos vídeos en la didáctica de la física, pues permiten construir puentes entre los conceptos teóricos, las habilidades de investigación y casos reales de interés para los estudiantes. Uno de los problemas que ha limitado su uso en las aulas es que estas películas son el producto de una fuente secundaria, por lo que se carece de información primaria y trascendental para realizar una medición, p. ej. datos relacionados con testigos métricos, velocidad entre fotogramas, masas de los objetos en la película y otros valores deben ser recabados a través de otros medios, de modo que, en general, el resultado se circunscribe en una estimación con alta incertidumbre.

Así, estos vídeos son adecuados para realizar análisis Monte Carlo, pues ante la falta de certeza, la valoración probabilística de escenarios es propicia para alcanzar conclusiones. Por lo general, los planes de estudio de física, ingeniería y química tratan el tema Monte Carlo para resolver problemas relacionados con la interacción materia-radiación [4]. Sin embargo, aquí se plantea que también pueden ser útiles para el desarrollo de un tema de mecánica clásica.

En particular, en este estudio se analizó un vídeo casual y el método Monte Carlo para obtener la máxima fuerza de un luchador profesional al ejecutar una patada. Los deportes de contacto son un tópico recurrente y atractivo para consolidar conocimientos de física mecánica y ciencias de la salud [5], [6], [7]. Sin embargo, poco se ha publicado sobre el desempeño en los movimientos de los luchadores profesionales, pese a su gran popularidad internacional en especial en México, Japón y los Estados Unidos [8]. Finalmente, el vídeo analizado cuenta con una componente de polémica, pues se observa que la patada se ejecutó sobre un luchador que al poco tiempo pierde el conocimiento y luego la vida. De este modo, hasta donde se sabe, este es el primer reporte de un análisis de la fuerza asociada a una patada entre luchadores, en condiciones fuera del laboratorio, combinando el es-

tudio de imágenes y método Monte Carlo, todo asistido por herramientas de software libre.

La organización del artículo es la siguiente: primero se trata un poco sobre la aplicación del concepto de incertidumbre en investigaciones forenses; después se describen las características y fuente del objeto de estudio (el vídeo); luego se detalla cómo se analizaron las imágenes; a continuación se plantea el contexto físico-matemático para obtener la medida y su incertidumbre asociada por cálculo diferencial. También se muestra cómo implantar la técnica Monte Carlo, presentando la validez del modelo estadístico y su implicación en el significado de la medida (detallando los alcances de las técnicas utilizadas); a continuación se presenta una interpretación de tal medición al compararla con la fuerza asociada a patadas en otro deporte de contacto y, finalmente, se exponen las conclusiones y perspectiva de este trabajo.

## II. METODOLOGÍA

### A. IMPORTANCIA DEL CÁLCULO DE INCERTIDUMBRE EN LA CIENCIA FORENSE

Una reconstrucción forense verosímil requiere la articulación de argumentos científicos, donde se muestra la causalidad de los sucesos. Pero la conclusión final siempre estará limitada por un error de cierta magnitud, que es robustecido por las suposiciones, alcances de los instrumentos de medición y las técnicas empleadas en los análisis. Es decir, se obtiene la incertidumbre final de la propagación de errores. Hoy en día, este tópico es objeto de mucha atención entre los profesionales de la ciencia aplicada en los tribunales [9].

En aquellas periciales donde se utilizan o determinan parámetros físicos, tales como fuerza, velocidad, o distancia, suele obtenerse la incertidumbre por medio de técnicas de cálculo diferencial [10]. Tal proceder supone una confianza en los datos medios, que implica el control en la variabilidad de los parámetros, o sea, disminución de la contribución aleatoria [10]. Sin embargo, por las características del objeto de estudio forense esta situación es difícil de obtener: la variabilidad, la ausencia o la degradación de la fuente de los datos es frecuente, dificultando conseguir medidas asociadas a cotas factibles.

Cuando la incertidumbre es obtenida únicamente por medios deterministas (p. ej., cálculo diferencial), se espera que los datos de entrada sean confiables y no especu-

laciones. En este caso, la distribución de la incertidumbre es constante, es decir, todos los valores contenidos entre los extremos de la incertidumbre cuentan con la misma probabilidad de suceder. Para su valoración, en general solo es suficiente conocer la incertidumbre relativa: incertidumbre dividida entre el valor de la medición.

Sin embargo, cuando uno o varios datos de entrada son conjeturas, se requiere establecer un intervalo lógico y utilizar la mejor información documentada. Entonces, la combinación de casos mostrará respuestas más frecuentes que otras, a las que se asocian mayor verosimilitud y probabilidad de suceder. Las respuestas menos frecuentes serán posibles, pero con baja probabilidad de suceder. De acuerdo con el teorema del límite central, esta función de distribución se aproximará a la distribución normal, la cual permite valorar la relación entre una medición y un intervalo de probabilidad de la incertidumbre asociada. Esa es la esencia y utilidad del método Monte Carlo en la ciencia forense.

Esta contribución se apoya en una técnica Monte Carlo para encontrar la cota máxima de la fuerza neta de las piernas cuando un luchador profesional pateo a su rival, quien después de unos minutos de caer sobre las cuerdas, fallece a causa de una lesión cervical [11], [12]. Este caso forense atrajo la atención de los medios de comunicación y redes sociales, surgiendo preguntas sobre la intensidad con la que estos deportistas se golpean y sufren lesiones. Este es un tema biomecánico poco estudiado, pese a la importancia cultural que muestra la lucha libre en México y otros países [8]. Mediante un teléfono celular, un aficionado fijó el momento de la patada, por lo que un videoanálisis permitió obtener una medida preliminar de la fuerza del golpe y el método Monte Carlo contribuyó para conseguir la cota máxima posible.

## B. EL VIDEO Y SU ANÁLISIS

La noche del 21 de marzo de 2015, en el Auditorio Municipal de Tijuana, México, el luchador llamado *Rey Misterio* realizó un movimiento habitual de este deporte-espectáculo, conocido como “patada de canguro”, consistente en un salto de frente y que conecta las piernas sobre su rival en turno, en este caso Pedro Aguayo Ramírez, llamado el *Hijo del Perro Aguayo* [12]. Al ser impactado cayó sobre las cuerdas, al poco tiempo perdió la vida como resultado de una lesión cervical. Aunque *Rey Misterio* fue liberado de cargos, el deportista fue vituperado en los medios públicos [12]. Un aficionado

videograbó frontalmente el encuentro y lo instaló en el sitio YouTube (Figura 1) [13]. La información de tales imágenes es el objeto de estudio de este artículo. La videograbación es adecuada para realizar un proceso y así obtener la fuerza del golpe. Los pies impactados sobre el hombro producen una traslación pequeña y casi paralela al plano de la escena. Sin embargo, en las imágenes se requiere establecer testigos métricos y correcciones por el movimiento de la cámara.



Figura 1. Fotograma del momento donde el luchador profesional *Rey Misterio* conecta una “patada de canguro” a su rival el *Hijo del Perro Aguayo*. Fuente: video público en la plataforma YouTube.

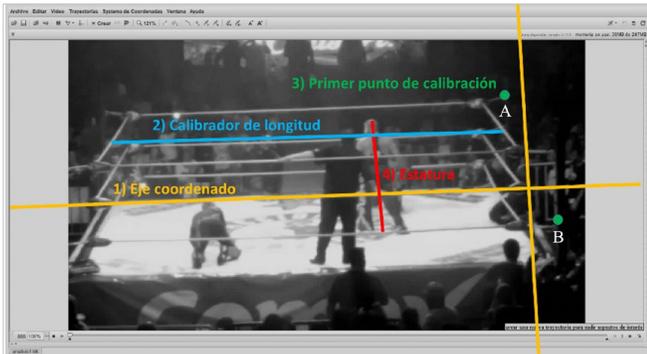
Así, con el propósito de iniciar el estudio de la escena, se descargó el video a una computadora personal. Para analizar el filme se utilizó el programa de distribución libre Tracker-physics, el cual es multiplataforma, lo que implica que se puede ejecutar desde cualquier sistema operativo [14]. En otras publicaciones se ha utilizado este software por su conveniencia pedagógica y utilización en al área de la física forense. Después de abrir la película en el programa Tracker, se realizaron las siguientes acciones.

**1) Preselección de los fotogramas relevantes.** El video tiene una duración de 14:13 minutos, por lo que se realizó una selección preliminar de los cuadros de interés, antes de que *Rey* iniciara el salto y un poco después de que *Aguayo* se encontrara en las cuerdas. Se seleccionaron entre los fotogramas marcados como 11 431 a 11 561, que representan 130 imágenes en un tiempo de 5 s.

**2) Instalación del eje coordinado.** El salto completo de *Rey Misterio* es casi paralelo al plano de la cámara, por lo que se instaló el eje coordinado de modo que coincidiera con el plano que describe el salto, con origen sobre la lona del cuadrilátero y del lado derecho de la escena, donde la horizontal (eje-x) es paralela a la cuerda intermedia del cuadrilátero, de modo que se asegura la orientación correcta del sistema (Figura 2).

**3) Colocación del testigo métrico.** Por reglamento, la distancia entre las cuerdas opuestas al cuadrilátero es de 6 m [15]. Este fue el testigo métrico y se colocó al nivel de los hombros de ambos luchadores; situarlo en una posición delantera o posterior conduciría a un error de perspectiva. A modo de comprobación de la conveniencia de la posición y dimensión del testigo, como se muestra en la *Figura 2*, se midió la estatura de *Rey Misterio* (quien se encontraba en posición erguida) obteniendo un valor de 1.67 m (99 % de su estatura reportada por la WWE, una compañía de lucha libre profesional donde ha trabajado el luchador) [16].

**4) Corrección del movimiento de la cámara.** Se utilizaron puntos de calibración para corregir las rotaciones y traslaciones de las imágenes en el plano de la escena. Aunque son imperceptibles los efectos de acercamiento/alejamiento, este proceder también permite su corrección. Los puntos de calibración consisten en señalar dos puntos físicamente fijos que se presenten en las imágenes y las coordenadas relativas entre ellos posibilitan rectificar la posición del eje coordenado y el testigo métrico. Aquí, los puntos seleccionados fueron: A) la intersección visual entre el esquinero de la tercera cuerda y el poste superior derecho y B) la esquina donde se intersecan las líneas del poste inferior y la reja de contención a la derecha de la imagen (*Figura 2*).



*Figura 2.* Captura de pantalla del video estudiado en el programa Tracker. Se marcó con colores: 1) el eje coordenado, 2) el calibrador de longitud, 3) el primer y segundo punto de calibración y 4) la estatura del luchador *Rey Misterio*.

**5) Demarcación de la distancia y tiempo de contacto.** Utilizando la herramienta de *zoom*, marcamos manualmente las coordenadas donde los pies de *Rey Misterio* contactan con el hombro de su rival; entonces, la distancia de contacto fue de 0.05 m en un tiempo de 0.1 s. Esta información es significativa para estimar la fuerza neta en la colisión.

### C. CÁLCULO DE LA FUERZA ASOCIADA AL IMPACTO

En la colisión de un objeto puntal, la fuerza es representada como una función impulsiva  $F(t)$ . Es decir, la fuerza varía en un intervalo temporal (en que sucede el contacto) desde un valor cero a un máximo único y finalmente regresa a cero cuando se pierde el contacto, pero tal comportamiento puede sustituirse numéricamente por una fuerza neta y constante en ese lapso. Por la resolución y la frecuencia de registro del video estudiado, esta simplificación es adecuada. Por tanto, suponiendo que la velocidad inicial es cero, la fuerza neta del impacto  $F$  se puede obtener multiplicando la masa de las piernas  $m$  por la distancia de contacto entre los cuerpos  $L$ , dividiendo entre el cuadrado del tiempo de contacto  $t$ :

$$F = \frac{mL}{t^2} \quad (1)$$

En esas fechas, de acuerdo con compañías que contrataron al luchador, la masa de *Rey Misterio* era de 79 kg, aunque, como se observa en el video, únicamente las piernas son impulsadas para golpear el cuerpo de su rival. Los brazos, el torso y la cabeza, entre otras partes, no participan en el impacto. De acuerdo a la literatura de antropología, las piernas representan ~24.43% de la masa corporal total [17]. Con la magnitud de la masa recificada, la distancia y el tiempo de contacto se puede estimar la fuerza neta del impacto.

### D. ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ERRORES POR CÁLCULO DETERMINISTA

Si la fuerza neta en el impacto es obtenida por la Ecuación (1), de acuerdo con la teoría de propagación de incertidumbres [10], el error relativo del cálculo de la fuerza es la suma de las contriciones relativas de las componentes, es decir:

$$\frac{\partial F}{|F|} = \frac{\partial m}{|\Delta m|} + \frac{\partial L}{|L|} + 2 \frac{\partial t}{|t|} \quad (2)$$

donde  $\partial x$  representa la incertidumbre asociada al parámetro  $x$ . Aquí, el desplazamiento de los píxeles  $L_p$  es transformado en desplazamiento métrico  $L$  mediante una función lineal que utiliza la calibración entre píxeles  $C_p$  y el testigo métrico en el video  $C$ , obteniéndose:

$$\frac{\partial F}{|F|} = \frac{\partial m}{|\Delta m|} + \frac{\partial L_p}{|L_p|} + \frac{\partial C_p}{|C_p|} + \frac{\partial C}{|C|} + 2 \frac{\partial t}{|t|} \quad (3)$$

En el caso estudiado, si la fuente de medición fuera primaria, se utilizarían balanzas convencionales (con incertidumbres típicas de  $\pm 0.5$  kg), y flexómetros estándar ( $\pm 0.005$  m). Entonces, sus contribuciones en la propagación de errores serían menores del 1 %, pero considerando que el vídeo se constituye a 30 fps ( $\pm 0.0165$  s), el tiempo es la principal fuente de error, aportando un 33 % a la fuerza neta medida. Entonces, se calculó que la fuerza es  $136 \pm 46$  N (incertidumbre relativa de 33.7 %), lo que implica que la máxima fuerza posible es 182 N.

Retomando, la Ecuación (3) permite calcular las cotas asociadas a la fuerza neta y es mayor que la incertidumbre, considerando independencia estadística entre parámetros. Además, permite analizar por partes la importancia de los parámetros para obtener la fuerza. Por ejemplo, suponiendo que se controlen los parámetros de esta ecuación, se prefiriera utilizar una masa mayor y un instrumento con mayor precisión para atenuar el efecto de la propagación de incertidumbre. Los errores relativos a la calibración se pueden disminuir seleccionando dentro de las imágenes del vídeo un testigo métrico preciso en longitud, es decir, de varias cifras significativas, y que abarquen una distancia amplia entre píxeles. En comparación con el resto de los parámetros, el tiempo es el doble de susceptible de propagar el error. Para mejorar este parámetro sería conveniente contar con cámaras de mayor velocidad para que disminuya la incertidumbre relativa del tiempo.

Lamentablemente, en muchas investigaciones donde se carece de control en las variables (p. ej., ciencias de la reconstrucción del pasado, tales como paleontología o física forense) tales parámetros son incontrolables. De hecho, presentan algunos problemas en la exactitud y vigencia de la información obtenida, p. ej., en relación con la obtención del valor de la masa por medio de fuentes secundarias: el deportista puede variar de peso desde que fue medido, la medición entre las cuerdas metálicas del cuadrilátero puede diferir en un par de centímetros. Además, la distancia y tiempo de impacto pueden ser medidos de modo ligeramente distinto por otros in-

vestigadores. Finalmente, representa un problema conceptual el hecho de que todos los valores dentro de la cota obtenida por la Ecuación (3) cuentan con la misma indefinición en la probabilidad de suceder, por lo que siempre es preferible reportar un valor extremo que el central y, dependiendo de la causa, puede ser la magnitud mínima en lugar del máximo. De este modo, para este caso se desea conocer la fuerza máxima que pudo desarrollarse en estas llamadas “patadas de canguro”.

El cálculo de la incertidumbre asociada a la media por cálculo determinista es adecuado cuando se hace la medición mediante fuentes primarias y el error aleatorio es pequeño. Pero en varias situaciones de videograbaciones fortuitas se requiere considerar la variabilidad en la medición y por ello se utiliza la técnica Monte Carlo para simular el registro de distintas medidas y observar cómo esta variabilidad afecta al valor promedio.

#### E. IMPLEMENTACIÓN DE LA TÉCNICA MONTE CARLO

Existen varias propuestas para aplicar el método Monte Carlo. En este trabajo se eligió una aplicación intuitiva y sencilla de programar. El valor de referencia y central  $x$  es acotado por  $\pm x_n$ , valor que será físicamente aceptable pero descomunal y, además, en una etapa del proceso de cálculo este valor se multiplicará aleatoriamente por un valor entre  $-1$  y  $1$ . En la [Tabla 1](#) se muestra los parámetros utilizados. Entonces, se emplearon como valores centrales los calculados preliminarmente mediante el videoanálisis.

Se consideró que la masa puede variar diez kilogramos, que la distancia de contacto fluctúa centímetros y que el tiempo oscila medio fotograma. Todos estos parámetros de entrada implican valores de salida muy altos (la [Tabla 1](#) resume estas estimaciones). Así, empleando la Ecuación (2), el error porcentual de la fuerza neta será de 106 %. Por esto se emplea líneas arriba la palabra “descomunal”, pero se espera que el proceso aleatorio compense esta cota extrema.

TABLA 1  
VALORES PARA ESTIMAR LA FUERZA DE IMPACTO, VALORES DE TOLERANCIA PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA Y SU ERROR PORCENTUAL ASOCIADO

VARIABLE	X	$\pm X_A$	ERROR PORCENTUAL, $100(X_A/X)$
Masa, m (kg)	79	10	13 %
Longitud, L (m)	0.05	0.03	60 %
Tiempo, t (s)	0.1	0.0165	16.5 %

De tal modo, la Ecuación (1) adquiere la siguiente estructura:

$$F_{MC} = MC_N \left[ \frac{(m \pm m_a)(L \pm L_a)}{(t \pm t_a)^2} \right] \quad (4)$$

$MC_N$  representa el proceso aleatorio que se repetiría  $N$  veces que en este caso equivale a un millón de ciclos ejecutados durante 2.5 s en una computadora convencional (Dell Inspiron 13, serie 7000, 8 GB de memoria, 2.3 GHz).  $F_{MC}$  es una distribución estadística de la fuerza; su análisis permite obtener valores representativos y cotas asociadas.

En el Apéndice A se presenta el código fuente escrito para Octave, que es un software gratuito con versiones multiplataforma. El núcleo de la técnica Monte Carlo consiste en multiplicar el valor de tolerancia por (*rand-rand*), donde *rand* es la función de Octave que genera un número aleatorio entre 0 y 1 en cada ciclo, es decir, se produce un número aleatorio que es restado por otro número aleatorio que puede ser diferente (de la operación se espera un número entre -1 y 1). Este resultado se multiplicó por el valor de tolerancia y se sumó al valor estimado en el videoanálisis. Finalmente, del millón de valores de fuerza neta se hizo una agrupación de 100 parcelas para realizar el análisis estadístico. Este algoritmo fue el óptimo para lograr la mayor precisión entre los datos simulados y el modelo estadístico de distribución normal. Así, la función de ajuste fue la campana de Gauss:

$$F_{MC} \approx Ae^{\frac{(F - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

donde  $A$  es directamente proporcional al máximo de la distribución,  $F$  es la fuerza de impacto,  $\mu$  es el promedio en los datos distribuidos y  $\sigma$  es la desviación estándar.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### A. EFECTO DE LOS PARÁMETROS ALEATORIOS

La Figura 3 muestra la acción de las variables por separado. El uso de (*rand-rand*) es evidente, pues se muestran distribuciones lineales monótono-crecientes, luego un valor máximo y finalmente un comportamiento lineal decreciente, formando una función de distribución delimitada. Es decir, una figura con alta simetría alrededor del eje con el valor de la fuerza de 96 y de 97 N para A)

y B), respectivamente. En contraste, para C) es notoria la falta de comportamiento lineal y de simetría sobre el eje vertical, por lo que su distribución muestra una morfología que asemeja a una aleta de tiburón (o algún tipo de función de impulso), con máximo en 97 N, como consecuencia del efecto de la función no lineal  $1/t^2$ , de modo que el incremento en la tolerancia en el parámetro temporal causa una mayor discrepancia con el modelo estadístico gaussiano, pues esta función presenta simetría axial.

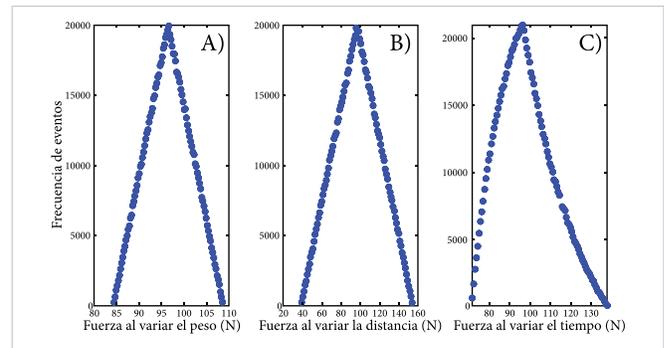


Figura 3. Frecuencia de eventos en función de la fuerza con un parámetro variable. El resto de parámetros se mantiene constante. Observe que los dos primeros casos son más simétricos que el tercero.

#### B. EVALUACIÓN DEL MODELO

Se encontró que el modelo gaussiano se ajusta adecuadamente a los datos simulados. Cuenta con una correlación de  $R^2 = 0.991$  (Figura 4 A), la cual es aceptable. De hecho, como muestra la Figura 4 B, el apareamiento del modelo y los datos simulados puede ajustarse con una línea recta, obteniendo una pendiente  $m = 0.986$  (el valor ideal es 1.000) y el parámetro independiente  $b = 0.003$  (el valor ideal es 0.000) y una correlación por el ajuste lineal de 0.985, suficientemente cercana a la unidad, el valor ideal. Completando, se obtuvo una diferencia máxima de 10 % entre cada punto del modelo y los datos simulados (Figura 4 C), disminuyendo notablemente la diferencia (menor al 4 %) entre puntos para valores altos de la fuerza. En otras palabras, es aceptable utilizar el modelo gaussiano para representar la tendencia de los datos simulados.

#### C. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN DEL MODELO ESTADÍSTICO

Aunque originalmente se inició con una cota de error neto de 106 %, el proceso Monte Carlo permitió obtener una desviación estándar de 29 %, alrededor de 98 N. Pero en este caso, el interés se centró en calcular la fuer-

za máxima y probable, por lo que se puede utilizar hasta  $3\sigma = 182$  N, coincidiendo con el valor de incertidumbre por la Ecuación (2). Esta fuerza es congruente dado que es menor al límite impuesto por la cota de tolerancia de 207 N, es decir, el modelo utilizado es una función continua, pero no puede adquirir valores de fuerza infinitos. De hecho, la fuerza estimada es acotada por los valores de la tolerancia. Valores de la fuerza más allá del intervalo de tolerancia, son incongruentes (Figura 5).

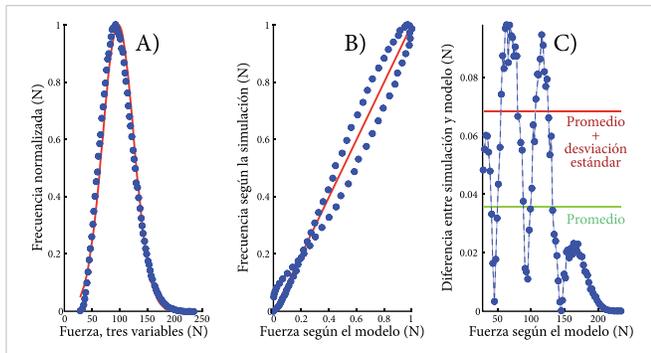


Figura 4. A) Modelo gaussiano ajustado a los datos simulados, B) ajuste entre modelo y los datos simulados a una línea recta, C) diferencia entre modelo y datos simulados (línea verde promedio, línea roja cota de una sigma).

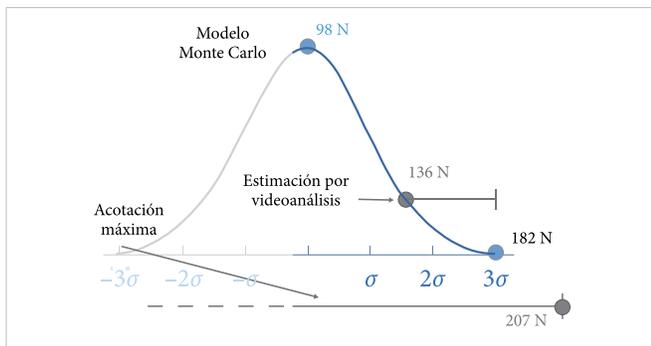


Figura 5. Infografía donde se muestran los límites de la simulación, el valor de  $3\sigma$  (máxima fuerza asociada), la medición determinista y el promedio de la fuerza obtenida por Monte Carlo.

#### D. COMPARACIÓN DE LA FUERZA MÁXIMA ESTIMADA Y OTROS CASOS DEPORTIVOS

Se realizó una rectificación de la fuerza calculada para contrastarla con otra investigación donde se considera la masa neta de practicantes de artes marciales. En tal estudio se empleó un sistema electromecánico para medir la fuerza de patadas frontales rectas [18]. Así, en el caso estudiado, la fuerza neta máxima de toda la masa en movimiento es de 758 N y en la medición de la literatura se registró que la máxima fuerza entre los participantes oscilaba entre 714 a 1986 N. De tal modo, se

encontró congruencia entre la fuerza máxima calculada por técnica Monte Carlo y la literatura que más se asemeja a este trabajo. Comparaciones con fuerzas desarrolladas en otras disciplinas deportivas pueden ser menos adecuadas, pero se debe considerar que existen pocos reportes sobre el desempeño de luchadores profesionales y menos de un movimiento específico, como es la “patada de canguro”.

#### E. DISCUSIÓN E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

La mayoría de las asignaturas del área de ciencias, en especial en física, se enfatiza sobre la importancia de obtener la incertidumbre de la medición. La incertidumbre no es un sinónimo de equivocación, es establecer los alcances con los que se cuenta para realizar una afirmación sobre la realidad. De hecho, en algunos casos la medida central puede ser menos importante que los valores y la longitud de la cota. Cotas pequeñas brindan seguridad en la medición, más grandes permiten la posibilidad de que el valor de otras mediciones se encuentre entre sus límites, de modo que determinan un plan de investigación mejorado. Los valores específicos del máximo y mínimo de la cota, aunque lleguen a mostrar pequeña probabilidad, pueden determinar la siguiente acción para establecer el peor y mejor escenario posible. Por ello, la incertidumbre de la medición es muy importante en la ciencia.

El método Monte Carlo es una alternativa para obtener las cotas de incertidumbre, además de su probabilidad asociada. Su funcionamiento se puede explicar mediante una metáfora. Imagínese que se mide la longitud de una mesa con un flexómetro; la incertidumbre de la medida es la mitad del valor mínimo en la escala del instrumento. Así, es fácil obtener el binomio: medida y error asociado. Ahora, supóngase que se carece de un instrumento de medida. Es factible estimar por inspección la longitud de la mesa; si se tuvieran colegas, aportarían su longitud estimada y, posteriormente, una longitud promedio y su desviación estándar. Pues bien, mediante la técnica Monte Carlo se obtienen las estimaciones mediante un proceso aleatorio que permite contar con muestras muy grandes, limitadas por la capacidad de los instrumentos de cómputo y paciencia del programador. Para realizar adecuadamente el proceso, primero debe definirse la tolerancia, donde el valor fluctúe de modo plausible, después plantear la ecuación determinista de trabajo y un método para obtener los números aleatorios. A continuación, después de muchos ciclos, el ordenador calcula el valor de la medida

estimada. Así, se obtiene una distribución que es modelable con una función probabilística y de ella se extraen el valor más probable y su error asociado. En esencia, esto es el método Monte Carlo.

En resumen, cuando se confía en todas las mediciones y sus incertidumbres para calcular una medición derivada y su intervalo de confianza, es innecesario utilizar el método Monte Carlo. Pero, si es poco fiable un solo dato de entrada, como sucede en el quehacer forense, se deben establecer los intervalos de tolerancia que emulan a las incertidumbres instrumentales o experimentales y luego aplicar un muestreo. El valor máximo puede no ser importante para el investigador o el juzgador, pero sí una cifra circundante, definida por el promedio, la desviación estándar y la tendencia de la campana de Gauss. Ese puede ser el caso al sancionar multas de tránsito por exceso de velocidad o en el presente ejemplo al buscar la fuerza máxima probable en las “patadas de canguro”.

#### IV. CONCLUSIONES

Se utilizó el videoanálisis para estimar la fuerza de una patada. Después de considerar que las fuentes de datos pueden presentar variabilidad, se empleó la técnica Monte Carlo para mejorar el cálculo e interpretación del resultado. A partir de una ecuación determinista, numéricamente se simuló fluctuaciones en los parámetros, de donde se obtuvo una distribución ajustada adecuadamente a una función normal de la que se consiguió un valor promedio y una desviación estándar. La adición del promedio y tres veces sigma corresponde al intervalo que cubre alrededor de 99.7 % de los casos simulados que, aunque es un valor de baja probabilidad, debe considerarse. De modo que se calculó que la máxima fuerza neta ejercida (por tan solo las piernas) fue de 182 N, que coincide con el valor extremo del análisis determinista de la Ecuación (2). Después de comparar la fuerza neta (de todo el cuerpo) con otra disciplina deportiva, resulta que se encuentra en el intervalo de intensidad no peligroso. Por tanto, no se encontraron elementos para afirmar que esta patada causara la lesión que produjo el desvanecimiento y posterior fallecimiento del luchador el *Hijo del Perro Aguayo*.

El enfoque del método Monte Carlo es viable de implementar mediante cualquier ordenador moderno, ayuda a compensar la falta de certeza en datos específicos y, además cuenta con la ventaja de presentar resultados claros, sin embargo, requiere más difusión. Algunas

áreas de la física utilizan poco este enfoque que puede enriquecer ciertos proyectos de estudio, como puede ser el área forense donde las videograbaciones de testigos casuales abundan y las mediciones directas de la fuente puede ser difíciles de obtener. Por ello, académicamente es menester aplicar esta propuesta en otras situaciones y realizar más pruebas sobre la confiabilidad de la técnica Monte Carlo, especialmente comparándola con experimentos, p. ej., videograbar colisiones lineales entre dos cuerpos o que los estudiantes conjeturen la masa y utilicen el principio de conservación de momento para observar la congruencia entre las fuerzas calculadas; después, emplear el método Monte Carlo para obtener campanas de Gauss que revelen la distribución de los valores posibles y, finalmente, comparar las respuestas con el resultado del valor exacto de la masa.

#### REFERENCIAS

- [1] R. Allain, *Physics and video analysis*. Morgan & Claypool Publishers, 2016.
- [2] V. Torres y J. G. Bañuelos, “Modelos físicos y numéricos para la reconstrucción de hechos en ciencia forense: derrumbe de edificios”, *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, vol. 11, no. 2, jun. 2017. [En línea]. Disponible: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6353427.pdf>
- [3] V. Torres-Zúñiga, “Video-análisis por software-libre para obtener la velocidad de un automotor al impactar a un peatón”, *Rev. cienc. forenses Honduras*, vol. 3, no. 1, pp. 10-18, 2017.
- [4] C. L. Guatelli, “Transferring advanced physics research tools to education: how to teach simulation tools used in radiation physics research to university students”, en *INTED2010 Proceedings CD*, España, pp. 3546-3556, 2010.
- [5] J. Wąsik, “Kinematics and kinetics of taekwon-do side kick”, *J Hum Kinet*, vol. 30, no. 1, pp. 13-20, 2011, doi: [10.2478/v10078-011-0068-z](https://doi.org/10.2478/v10078-011-0068-z).
- [6] B. Baker, *Science in the Arena: Explanations and Analyses of Performances and Phenomena in Sport*. San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers, 2019.
- [7] B. W. Nuryadin e I. Hindawan, “Impulse measurement and analysis using a smartphone accelerometer”, *Phys Educ*, vol. 54, no. 1, p. 015024, 2019.

- [8] D. Glenday, “Professional wrestling as culturally embedded spectacles in five core countries: the USA, Canada, Great Britain, Mexico and Japan”, *Revue de recherche en civilisation américaine*, vol. 4, pp. 1-15, 2013.
- [9] S. Wang, X. Wang, P. Ye, Y. Yuan, S. Liu y F. -Y. Wang, “Parallel Crime Scene Analysis Based on ACP Approach”, en *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 244-255, mar. 2018, doi: 10.1109/TCSS.2017.2782008.
- [10] J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*. Sausalito, CA: University Science Books, 1997.
- [11] “¿Qué lesión mató al hijo del Perro Aguayo?”, *Excélsior*, mar. 23, 2015 [En línea]. Disponible: <https://www.excelsior.com.mx/adrenalina/2015/03/23/1015043#:~:text=Tras el fallecimiento de Pedro,al cuello y fractura cervical> (acceso: ag. 15, 2021).
- [12] “¿Quién mató al Hijo de Perro Aguayo?”, *Telemundo52*, mar. 25, 2015 [En línea]. Disponible: <https://www.telemundo52.com/deportes/Quien-mato-al-Hijo-de-Perro-Aguayo-297410321.html> (acceso: feb. 14, 2018).
- [13] E. Vázquez, “la muerte del hijo del perro aguayo”, *YouTube*, mar. 21, 2015. [Archivo de vídeo]. Disponible: <https://www.youtube.com/watch?v=AmieRklWdaE&t=15s> (acceso: feb. 14, 2018).
- [14] *Tracker physics* (2020), D. Brown, W. Christian, R. M. Hanson. Acceso: ag. 20, 2020. Disponible: <https://physlets.org/tracker/>
- [15] Departamento del Distrito Federal. (1994, nov. 4). *Reglamento interior de la Comisión de Lucha libre Profesional del Distrito Federal*. [En línea]. Disponible: [https://indeporte.cdmx.gob.mx/storage/app/media/SIPOT/2017/SIPOT-HIPERVINCULOS/121-f-I/art121-1-reg/REGLAMENTO\\_INTERIOR\\_DE\\_LA\\_COMISION\\_DE\\_LUCHA\\_LIBRE\\_PROFESIONAL\\_DEL\\_DISTRITO\\_FEDERAL.pdf](https://indeporte.cdmx.gob.mx/storage/app/media/SIPOT/2017/SIPOT-HIPERVINCULOS/121-f-I/art121-1-reg/REGLAMENTO_INTERIOR_DE_LA_COMISION_DE_LUCHA_LIBRE_PROFESIONAL_DEL_DISTRITO_FEDERAL.pdf) (acceso: feb.15, 2018).
- [16] “Rey misterio”, *WWE.com*, <http://espanol.wwe.com/superstars/reymysterio> (acceso: feb. 14. 2018).
- [17] R. Drillis, R. Contini y M. Bluestein, “Body segment parameters; a survey of measurment techniques”, *Artif Limbs*, vol. 8, pp, 44-46, 1964.
- [18] K. R. Ramakrishnan, H. Wang, K. Shankar y A. Fien, “A new method for the measurement and analysis of biomechanical energy delivered by kicking”, *Sports Eng*, vol. 21, no. 1, pp. 53-62, 2018, doi: 10.1007/s12283-017-0244-z.

## RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha recibido el apoyo económico de la Universidad Nacional Autónoma de México mediante el proyecto UNAM-PAPIME-PE115519 y carece de conflicto de intereses. Los autores agradecen los comentarios de Mtro. José Guadalupe Bañuelos Muñetón.

## APÉNDICE A: CÓDIGO EN OCTAVE

```
%% Guion, sin acentos, para utilizar el
método Montercarlo para calcular la fuerza
promedio de la masa de piernas durante la
distancia y el tiempo de neto de contacto
durante el impacto.
%% Autor: Vicente Torres Zúñiga; Fecha: 19-
dic-2017
%
tic % inicia el reloj
clc; clear; close all %% Limpieza de memoria
%
%% DATOS DE ENTRADA
N = 1e6; % Número de ciclos.
%
peso_Rey_Misterio =79; % kilogramos
tolerancia_peso = 10; % kilogramos, casi
13% de error
Masa_piernas = 24.43/100; % Masa porcentual
de las piernas: 24.43% del peso corporal ,
% “Body Segment Parameters, A Survey of
Measurement Techniques”, Drillis, Contini, y
Bluestein.
distancia_contacto = 0.05; %metros
tolerancia_distancia = 0.03; %metros, 0.03
60% de error
%
tiempo_contacto = 0.1; % segundo
tolerancia_tiempo = 0.0165; % segundos,
0.0165 16.5% de error
%
% CALCULOS
error_deriv = (tolerancia_peso/peso_Rey_
Misterio) + ...
(tolerancia_distancia/distancia_contacto)+
```

```
2*(tolerancia_tiempo/tiempo_contacto);
% Error asociado por derivadas: "An
introduction to error analysis", John R.
Taylor
% Vector Monte Carlo
peso = peso_Rey_Misterio + tolerancia_
peso*(rand(N,1) - rand(N,1)); % funcion rand:
[0,1]
distancia = distancia_contacto + tolerancia_
distancia*(rand(N,1) - rand(N,1));
tiempo = tiempo_contacto + tolerancia_
tiempo*(rand(N,1) - rand(N,1));
%
% Considerando el efecto de una sola variable
actuante
Fuerza_peso = Masa_piernas*peso*distancia_
contacto./(tiempo_contacto.^2);
Fuerza_distancia = Masa_piernas*peso_Rey_
Misterio*distancia./(tiempo_contacto.^2);
Fuerza_tiempo = Masa_piernas*peso_Rey_
Misterio*distancia_contacto./(tiempo.^2);
%
% Considerando el efecto de las tres
variables
Fuerza = Masa_piernas.*peso.*distancia./
(tiempo.^2);
%
[frec, fuerza] = hist(Fuerza, 100); %
parcelando datos
%
%%VISUALIZACIÓN DE LOS EFECTOS DE UNA
VARIABLE
subplot (1, 3, 1); [frec_peso, fuerza_peso]
= hist(Fuerza_peso, 100);
plot(fuerza_peso, frec_peso, 'ob')
ylabel("frecuencia de eventos"); xlabel
("Fuerza al variar el peso (N)");
%
subplot (1, 3, 2); [frec_distancia, fuerza_
distancia] = hist(Fuerza_distancia, 100);
plot(fuerza_distancia, frec_distancia, 'ob')
xlabel ("Fuerza al variar la distancia (N)");
%
subplot (1, 3, 3); [frec_tiempo, fuerza_
tiempo] = hist(Fuerza_tiempo, 100);
plot(fuerza_tiempo, frec_tiempo, 'ob')
xlabel ("Fuerza al variar el tiempo (N)");
%
%%CALCULOS Y VISUALIZACIÓN
Promedio = mean(Fuerza);
Desviacion_S = std(Fuerza);
%
Modelo = (50*max(frec)/
(Desviacion_S*sqrt(2*pi)))*exp(-((fuerza -
Promedio).^2)/(2*Desviacion_S^2)); % modelo
de función gaussiana.
Modelo = Modelo/max(Modelo); %normalizacion
frec = frec/max(frec);
%
diferencia = abs(frec - Modelo);
prom_dif = mean(diferencia);
std_dif =std(diferencia);
%
figure
subplot (1, 3, 1); plot(fuerza, frec, 'ob',
fuerza, Modelo, '-r') % grafica de los puntos
obtenidos
ylabel ("Frecuencia normalizada (N)"); xlabel
("Fuerza, tres variables (N)");
%
subplot (1, 3, 2); plot(frec, Modelo, 'xb',
frec, frec, '-r') % en el caso ideal debe
coincidir con la linea recta identidad
ylabel("Fuerza segun la simulacion (N)");
xlabel("Fuerza segun el modelo (N)");
%
subplot (1, 3, 3); plot(fuerza, diferencia,
'-ob', fuerza, prom_dif*ones(size(frec)),
'-g', fuerza, (prom_dif+std_
dif)*ones(size(frec)), '-r')
ylabel("Diferencia entre simulacion y modelo
(N)"); xlabel("Fuerza segun el modelo (N)");
%
%% CALCULOS PARA GENERAR TABLAS DE
COMPARACION
Min3 = Promedio - 3*Desviacion_S; %
intervalo con casi el 99.7% de datos
Max3 = Promedio + 3*Desviacion_S;
%
%Cotas inferior y superior donde funciona el
algoritmo, es un sinsentido 4 sigma
Fuerza_minima = Masa_piernas*(peso_Rey_
Misterio-tolerancia_peso)*(distancia_
contacto-tolerancia_tiempo)/((tiempo_
contacto+tolerancia_tiempo)^2); % Fuerza
minima con las condiciones de tolerancia
Fuerza_maxima = Masa_piernas*(peso_Rey_
Misterio+tolerancia_peso)*(distancia_contac_
to+tolerancia_tiempo)/((tiempo_contacto-to_
lerancia_tiempo)^2); % Fuerza maxima con las
```

```
condiciones de tolerancia
%
% Salida de Valores
disp("VALIDEZ DEL MODELO")
disp("Correlacion entre datos simulados y
modelo:")
Correlacion = corr(frec, Modelo) %
correlacion entre los puntos obtenidos y la
gaussiana modelada
disp("Error porcentual neto y el error
porcentual estadistico:")
[100*error_deriv, 100*Desviacion_S/Promedio]

%
disp("COTAS CALCULADAS")
disp("El promedio y la desviacion estandar
son:")
[Promedio, Desviacion_S]
%
disp("Fuerza min, -3sigma, Promedio, +3sigma
, Fuerza max:")
[Fuerza_minima, Min3, Promedio, Max3,
Fuerza_maxima]
%
toc % se imprime el reloj
% FIN DE GUION
```

# Aproximación interdisciplinaria STEM con recursos tecnológicos para el tratamiento de conceptos de física y matemáticas

## *Interdisciplinary STEM approach with technological resources for the treatment of physics and mathematics concepts*

Elvia Rosa Ruiz-Ledezma<sup>1</sup>✉, Fermín Acosta-Magallanes<sup>2</sup>, María del Socorro Valero-Cázarez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Politécnico Nacional / CECyT 11 Wilfrido Massieu.

<sup>2</sup>Instituto Politécnico Nacional / Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnología Avanzada (UPIITA).

<sup>3</sup>Centro de Bachillerato Tecnológico, Industrial y de Servicios 164, Ciudad Madero, Tamaulipas.

### RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo el tratamiento e interpretación de modelos matemáticos mediante el diseño de experimentación, partiendo de conceptos físicos en una aproximación de integración interdisciplinaria STEM (siglas en inglés de Science, Technology, Engineering, and Mathematics) con estudiantes de nivel medio superior. Como resultado, estos recuperaron, a través de la modelación utilizada como herramienta indagatoria, expresiones algebraicas trabajadas desde la matemática, las cuales, si bien no comprendieron su utilidad al aplicarlas a un contexto de problemas de física, relacionan las distintas variables (distancia, velocidad y tiempo) y adquieren un significado más claro. Asimismo, se concluyó que un dispositivo digital basado en las tecnologías abiertas Arduino, NetLogo, Microsoft Excel y GeoGebra facilitó a los estudiantes indagar y argumentar sobre el comportamiento gráfico del experimento. Por otro lado, integraron conocimientos referidos por dos disciplinas (matemáticas y física) en diferente grado de integración entrelazando la ingeniería, entendida como el diseño desde la perspectiva de la definición de las necesidades y los límites de un problema.

**PALABRAS CLAVE:** STEM; integración interdisciplinaria; Arduino; modelación; NetLogo.

### ABSTRACT

This research aims to treat and interpret mathematical models through experimental design, based on physical concepts in an interdisciplinary integration approach STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) with high school students. As a result, they recovered, through the modeling used as an investigative tool, algebraic expressions worked from mathematics, which, although they did not understand their usefulness when applied to a context of physics problems, were able to relate the different variables (distance, speed and time) and take on a clearer meaning. Likewise, it was concluded that a digital device based on the open technologies Arduino, NetLogo, Microsoft Excel and GeoGebra made it easier for students to investigate and argue about the graphic behavior of the experiment. On the other hand, they integrated knowledge referred to by two disciplines (mathematics and physics) in different degrees of integration, intertwining engineering, understood as design from the perspective of defining the needs and limits of a problem.

**KEYWORDS:** STEM; interdisciplinary integration; Arduino; modeling; NetLogo.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Elvia Rosa Ruiz Ledezma.

**INSTITUCIÓN:** Av. de los Maestros 217, col. Casco de Santo Tomás, C. P. 11340, Ciudad de México, México.

**CORREO ELECTRÓNICO:** ruizelvia@hotmail.com

**Fecha de recepción:** 19 de abril de 2022. **Fecha de aceptación:** 2 de agosto de 2022. **Fecha de publicación:** 17 de agosto de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

En este siglo se han considerado nuevas formas en la adaptación del uso de software en el diseño de prácticas para el aprendizaje de las ciencias en las clases, por lo que se ha incrementado su uso y más profesores están conscientes de que la ciencia no es solo hechos <sup>[1]</sup>, sino se deben tomar en cuenta los procesos de observación, investigación, toma de datos y gestación de conclusiones <sup>[2]</sup>. Haciendo referencia al uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que sigue dando mucho de qué hablar tanto en propuestas didácticas como en su uso cotidiano, se observan beneficios como la conexión a redes, la interacción en las comunidades de práctica y la generación de actividades dinámicas, entre otros.

La intención de este artículo es presentar cómo un laboratorio de aprendizaje (espacio de experimentación virtual donde se contextualiza la ciencia) llevado al aula, desde la modelación como herramienta de indagación, facilita la construcción de conceptos a través del desarrollo e implementación de una práctica desde la educación STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) en una aproximación de integración interdisciplinaria. Por lo tanto, se planteó el objetivo “Diseño, interpretación y modelaje de experimentación a través de prácticas en el tratamiento de conceptos físicos, con una aproximación de integración interdisciplinaria, con estudiantes de nivel medio superior correspondiente al nivel K-12 (grado doce)”.

Se utilizó el pensamiento computacional (del inglés Computational Thinking, CT) en el enfoque basado en la creación de artefactos lógicos que externalizan y reedifican ideas humanas que pueden ser interpretadas y ejecutadas en la computadora <sup>[3]</sup>, permitiendo la exploración, la construcción de conjeturas, las suposiciones informadas y la discusión de hallazgos por los sujetos al trabajar con prácticas en laboratorios de aprendizaje <sup>[4]</sup>.

Wing <sup>[3]</sup> definió pensamiento computacional para indicar un proceso de pensamiento involucrado en la formulación de problemas, en el sentido de que sus procesos de solución estén representados para que puedan ser realizados efectivamente por un agente de procesamiento de información. El CT se ha relacionado con el hecho de programar, pero es mucho más amplia su acción, ya que se enfoca no en la sintaxis de la programación computacional sino en los procesos mentales del

acercamiento a la informática. De esta manera, en el CT se agrupan tanto habilidades cognitivas (descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción y diseño algorítmico) como habilidades blandas (persistencia, autoconfianza, tolerancia a la ambigüedad, creatividad y trabajo colaborativo) <sup>[5]</sup>.

Recientemente, CT ha sido reconocido como un marco para desarrollar la alfabetización informática y sus respectivas habilidades entre las comunidades de ciencias de la computación hasta el grado doce (K-12) y STEM <sup>[6, sec. 12.1]</sup>, puesto que CT puede beneficiar el aprendizaje de los estudiantes de K-12 en otros dominios, como las matemáticas y las ciencias, ya que resuelven problemas mientras piensan como un informático <sup>[3, sec. 1.1]</sup>. Además, Brennan y Resnick <sup>[7]</sup>, señalan que CT incluye prácticas de diseño de artefactos (por ejemplo, construir modelos de fenómenos STEM), lo que ayuda a los estudiantes a desarrollar perspectivas del mundo que los rodea. El reconocimiento de los beneficios mencionados ha conducido a su inclusión en los planes de estudio K-12 STEM, por ejemplo, en los Estados Unidos los Estándares de Ciencias para la Próxima Generación (NGSS, por sus siglas en inglés) incluyen el CT como principal práctica científica.

Por otro lado, desde este enfoque Swanson *et al.* <sup>[8]</sup> desarrollaron una definición de pensamiento computacional en aulas STEM (CT-STEM) como un conjunto de prácticas vinculadas a la educación STEM y organizadas bajo la clasificación propuesta por Weintrop *et al.* <sup>[9]</sup>, que incluye cuatro áreas: utilización de los datos, prácticas de modelado y simulación, prácticas que incluyen resolución de problemas computacionales y prácticas sobre el pensamiento sistémico.

Para Vasquez, Sneider y Comer <sup>[1, p. 4]</sup>, “La educación STEM es un acercamiento interdisciplinario al aprendizaje que remueve las barreras tradicionales de las cuatro disciplinas Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas y las integra al mundo real con experiencias rigurosas y relevantes para los estudiantes”.

La educación STEM tiene tres propósitos principales:

- Desarrollar una sociedad instruida en STEM.
- Desarrollar una sociedad eminentemente tecnológica.
- Desarrollar una fuerza laboral enfocada en la innovación y el emprendimiento.

Con referencia a las nuevas prácticas sugeridas en los estándares de Ciencias para la Próxima Generación, la propuesta está centrada en prácticas de ciencia, ingeniería y tecnología donde el rol de la ingeniería y tecnología es esencial y conforman un marco en el cual los estudiantes pueden medir su nivel de conocimiento y aplicarlo a los problemas prácticos <sup>[10]</sup>. Por tanto, en estas prácticas se comienza con un problema que debe ser resuelto. El papel de la ingeniería en la educación STEM se apoya fuertemente en los modelos de procesos de diseño, cuyas fases fundamentales son definición del problema, desarrollo de soluciones y optimización de recursos. Las prácticas en STEM son hábitos del pensamiento que se obtienen durante el recorrido por los niveles escolares, desde los grados iniciales hasta el grado duodécimo.

La educación STEM representa un enfoque fundamentalmente diferente para organizar el plan de estudios escolar. Como tal, plantea una serie de cuestiones prácticas como la instrucción de ingeniería en el aula de clases para relacionar los conocimientos con otras áreas de las ciencias. Se reconoce que la integración en el currículo no es una idea nueva. Drake y Burns <sup>[1, cap. 8]</sup> desarrollaron mayormente este concepto abocándose a tres enfoques de integración que posteriormente han retomado Vasquez, Sneider y Comer <sup>[1]</sup>, considerándolos adecuados para describir tres niveles diferentes de integración STEM: multidisciplinaria o integración temática, integración interdisciplinaria e integración transdisciplinaria. Con base en estos niveles es importante que se tenga claridad de que la integración no significa hacer de lado los estándares curriculares, al contrario, el currículo debe abogar por cumplir alguno de los niveles. Además, es fundamental el cumplimiento de las metas de la educación STEM integrada, permitiendo a estudiantes y docentes abordar articuladamente los conocimientos disciplinares.

Dentro de los elementos teóricos implementados cabe destacar el acto de modelar como una actividad de diseño que involucra la selección de aspectos del fenómeno a modelar, como son identificar variables y desarrollar representaciones verificándolas y validándolas <sup>[11]</sup>, por lo que desarrollar un modelo computacional de un fenómeno físico involucra aspectos fundamentales del pensamiento computacional que ha mencionado Wing <sup>[3]</sup>, esto es, identificando abstracciones, como el uso de las matemáticas, métodos computacionales, representaciones e interfaces que conducen el comportamiento de los objetos.

En este marco, los complejos artefactos matemáticos y científicos, así como los gestos y el discurso dinámico, son considerados como un medio de intercambio y expresión permanente. Durante la modelación, los estudiantes controlan los artefactos y también utilizan estrategias de conexión donde se perciben gestos mediados electrónicamente, como pulsar botones, rectificar mediaciones entre el dispositivo y la computadora o la recolección de datos resultado de la experimentación. En otros momentos se perciben gestos físicos, como señalar o manipular objetos físicos. Los gestos electrónicos y físicos se encuentran entre las “abreviaturas” altamente comunicativas que apoyan el diseño de grupos generativos y capacidades asociadas con las redes de aulas de próxima generación. Así, el uso del gesto como signo externo se reconstruye fundamentalmente a medida que se entiende como un acto comunicativo <sup>[12]</sup>.

Un artefacto se está entendiendo como un producto de la actividad humana, usado por un sujeto para transformar un tipo de tareas. La mediación del uso de los artefactos hacia la generación de gestos guio el trabajo del dispositivo digital después de efectuar la experimentación relacionando la actividad con la interfaz y los resultados obtenidos tanto gráficos como en otras representaciones y permitiendo a los estudiantes hacer construcciones. Por lo que respecta a la experimentación con tecnología, actualmente juega un papel primordial en la educación matemática y científica bajo los supuestos ya indicados. Asimismo, el hecho de la producción de gestos para la presente propuesta representa conexiones con un dispositivo en un entorno experimental, donde estas acciones de mediación pueden dar lugar a la generación de conjeturas, reconocimiento de patrones y abstracciones, entre otras.

## II. METODOLOGÍA

La metodología utilizada en este trabajo es de corte cualitativo experimental, basada en el diseño de un laboratorio de aprendizaje con prácticas en la aproximación de integración interdisciplinaria.

### A. CONTEXTO DE TRABAJO

El escenario de esta investigación fue el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios núm. 164, que se ubica en la zona conurbada sur Tampico-Madero-Altamira del estado de Tamaulipas, México.

## B. POBLACIÓN

Se implementó con 20 estudiantes del cuarto semestre de bachillerato tecnológico que cursaban Cálculo Diferencial en el semestre enero-junio de 2019. Son estudiantes entre 16 y 19 años y provienen de familias con un nivel socioeconómico que se ubica en el rango de bajo a muy bajo. La institución es receptora de jóvenes que no pudieron acceder a otros planteles por sus bajos promedios de secundaria. De ahí la necesidad de diseñar propuestas de aprendizaje con prácticas en diferentes niveles de integración aplicadas en laboratorios de aprendizaje atractivos y significativos para la población.

## C. EL PROGRAMA DE ESTUDIO

En el cuarto semestre de esta modalidad del nivel medio superior se imparte la asignatura de Física I como ciencia básica y experimental. En el caso de la asignatura de Cálculo Diferencial, se ubica dentro del cuarto semestre del bachillerato tecnológico. Se consideró la propuesta del programa, en referencia al desarrollo de competencias a través de la transversalidad de los aprendizajes, donde esta se aborda articulando contenidos del mismo semestre de estudio con el diseño de actividades y proyectos que motiven a los estudiantes, compartiendo contenidos para evitar repeticiones innecesarias <sup>[13]</sup>.

## D. DISEÑO TECNOLÓGICO DEL DISPOSITIVO

El dispositivo digital utilizado en este trabajo, que fue armado por los autores (Figura 1), contiene cinco módulos enlazados a un microcontrolador Arduino Mega que recolecta información proveniente de los sensores de *posición*, *temperatura* y *voltaje* (el voltaje lo mide por defecto), posteriormente se envía a un programa llamado NetLogo con el fin de graficarla y generar información numérica en las tablas correspondientes para luego ser analizada por una hoja de cálculo o por GeoGebra, hacia la modelación matemática, donde su comportamiento se aproxima a la información en tiempo real obtenida del sensor específico <sup>[14]</sup>.

## E. ACTIVIDADES DE LA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Particularmente, este documento presenta y revisa el trabajo con el módulo ultrasónico (sensor de movimiento) para el estudio de funciones polinomiales de  $s(t)$  distancia contra tiempo ( $t$ ), así como  $v(t)$  velocidad contra tiempo ( $t$ ). Además, se revisaron los conceptos fi-

sicos de movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

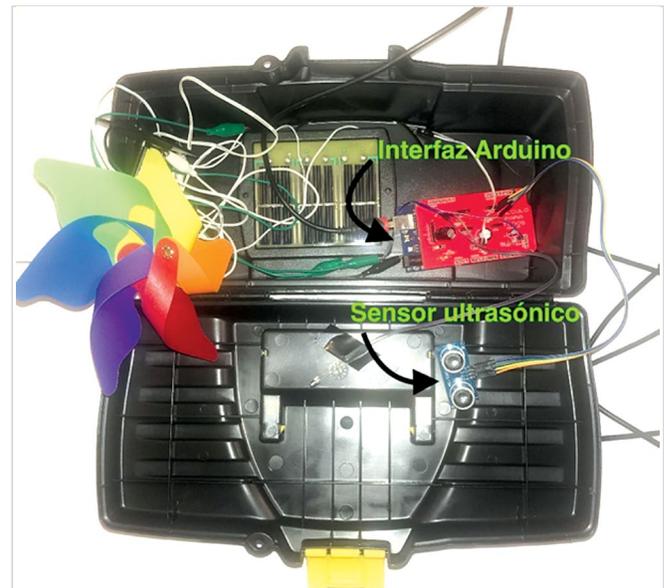


Figura 1. Dispositivo digital armado por los autores.

Durante la realización de la práctica, los estudiantes hicieron lo siguiente:

- 1) Conectaron el dispositivo de prácticas a la computadora.
- 2) Realizaron los experimentos señalados en la práctica para coleccionar datos (Figura 2).
- 3) Obtuvieron el gráfico cartesiano correspondiente usando NetLogo.
- 4) Exportaron datos a la hoja de cálculo y, según el comportamiento de estos, obtuvieron el modelo matemático con la misma hoja de cálculo o con GeoGebra.
- 5) Contestaron las preguntas de su práctica.

Todo lo anterior lo desarrollaron en grupos de cuatro integrantes.

## F. AMBIENTE DIGITAL

Los componentes principales que integran el sistema Arduino son un ambiente de programación, orientado a la implementación práctica de esquemas de automatización para procesos físicos y la tarjeta electrónica, con varios modelos. En este caso, el dispositivo usado fue Arduino Mega 2560.



Figura 2. Los estudiantes realizando la práctica.

NetLogo proporciona una herramienta de desarrollo de modelos de simulación, es de código abierto y está disponible gratuitamente en el sitio <https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>. En la práctica, mostrada en el Apéndice A, el código fue desarrollado por el Dr. Corey Brady (profesor asistente, Educación Matemática, Departamento de Enseñanza y Aprendizaje en el Peabody College de la Universidad de Vanderbilt), el cual se trabajó como el archivo “arduinoVoltaje.nlogo”. NetLogo permitió graficar la recolección de datos en tiempo real y al guardarlos se generó un archivo de bloc de notas que se puede abrir en una hoja de cálculo, en este caso, Microsoft Excel.

GeoGebra es un software dinámico de matemáticas: álgebra, geometría, estadística y cálculo en registros gráficos.

### G. UNIDAD INTERDISCIPLINAR

Una unidad interdisciplinaria es un plan compuesto por un concepto clave integrador que comparten dos o más disciplinas, representadas en un diagrama en orden cíclico de derecha a izquierda y con preguntas que relacionan de dos en dos las disciplinas que lo integran (Figura 3). En este trabajo, el concepto clave que comparten las cuatro disciplinas integradas es el estudio del movimiento.

En el lado derecho de la Figura 3, entre los círculos de física y matemáticas, hay un concepto clave sobre la representación del desplazamiento, la velocidad y la aceleración del objeto. Estos conceptos enriquecen la comprensión de los estudiantes sobre el MRU y el MRUA. En la parte superior del diagrama está el concepto clave de cómo la tecnología aumenta el entendimiento

to a través del uso del dispositivo digital que engloba programación, sensores e interfaces. El lado izquierdo del diagrama identifica lo que el modelo revela sobre la detección del movimiento de un objeto a partir del uso de sensores como concepto clave. De la misma forma, por lo que respecta a las matemáticas, el concepto clave hace referencia al tratamiento del concepto de función, del que se parte para el estudio de muchos otros que se abordan en matemáticas superiores, como es el caso del cálculo, cuya idea central es matematizar diversas situaciones del mundo observable [15].

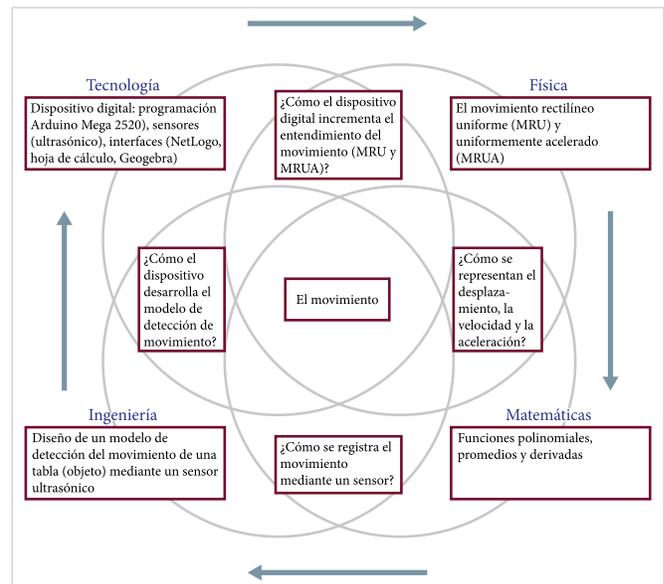


Figura 3. Unidad interdisciplinaria sobre el movimiento. Adaptada de [1].

### H. INTERVENCIÓN, RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS

La práctica se llevó a cabo en dos sesiones de hora y media cada una. En la sesión 1 se efectuaron los apartados uno y dos y en la sesión 2 el apartado tres en conjunto con la institucionalización de los resultados obtenidos por los equipos. Se formaron cinco equipos de cuatro estudiantes cada uno, designándose con las letras A, B, C, D y E. Cada equipo escogió a un integrante para que registrara las observaciones del experimento y fuera contestando la práctica con el lápiz y el papel que se les proporcionó.

Específicamente, acorde con el marco conceptual y con los niveles del pensamiento sistémico, las acciones realizadas por los estudiantes fueron clasificadas como sigue:

- Acciones de hechos y pautas de conducta. Cuando el estudiante utiliza los artefactos (dispositivo,

Arduino, NetLogo, hoja de cálculo) para generar, dibujar, obtener datos y graficar.

- Acciones de estructura y modelos mentales. Cuando el estudiante experimenta, indaga, propone soluciones y usa sus conocimientos anteriores, construyendo nuevos conocimientos.

En ambas acciones se presentan gestos electrónicos y físicos y se muestran en el [Apéndice B](#).

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los 20 estudiantes distribuidos en 5 equipos de 4 alumnos revisaron las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas cuando trabajaron con el sensor ultrasónico (de movimiento). Utilizando la estrategia “antes y después”, se les pidió que antes de que obtuvieran con la computadora la gráfica de la rapidez de cambio bosquejaran la gráfica, basándose en el hecho que ya habían observado desde el principio “si la función crece su velocidad es positiva y si la función decrece la velocidad es negativa”.

Los 20 estudiantes comentaron, al realizar el experimento de alejar la tabla del sensor y observar el comportamiento de los datos colectados en NetLogo, que “el modelo matemático es una recta creciente”. Solo 4 de ellos indicaron que “el inicio de la recta representa la distancia a la que se había colocado la tabla para su desplazamiento”. Los 20 estudiantes graficaron la recta creciente partiendo de los datos recolectados, situando el tiempo en el eje de las abscisas; 4 estudiantes colocaron la distancia en el eje de las ordenadas, partiendo de un valor que representa la distancia de la tabla al sensor; y 8 estudiantes también establecieron la distancia en el eje de las ordenadas pero partieron de cero.

Asimismo, los 20 estudiantes comentaron que “cuando acerca la tabla al sensor, se representa con una recta decreciente” y solo 3 dijeron que “esta recta tiene pendiente negativa”. Los 20 estudiantes graficaron una recta con pendiente negativa.

Cuando se lanzó la tabla hacia arriba, los 20 estudiantes comentaron que “su gráfica no es una recta”, 8 estudiantes dijeron que “se observa en una porción del gráfico como una parábola hacia abajo y lo demás es muy irregular”, todo lo anterior al haber observado el comportamiento de los datos colectados en NetLogo.

En el apartado de modelación matemática, los 20 estudiantes comentaron que “cuando la tabla se aleja el valor de  $s(t)$  crece y es una recta creciente y su velocidad es constante, pero no pudieron relacionar qué tipo de gráfica representaba a  $v(t)$ ”.

Los 20 estudiantes comentaron que “cuando la tabla se acerca al sensor,  $s(t)$  es una recta decreciente”, pero no pudieron indicar cómo representar gráficamente  $v(t)$ .

Es importante mencionar que para obtener el gráfico de la rapidez de cambio, los estudiantes tuvieron que calcular las razones de cambio para varios puntos, solo que contextualizadas al experimento, con el uso de Microsoft Excel. Aquí deben mencionarse dos cosas: en primer lugar, desde el curso de Geometría Analítica estos jóvenes, en el estudio de la línea recta, se familiarizaron con tal expresión para calcular la pendiente y, secundariamente, para el estudio de la función lineal en Cálculo recuperaron la expresión pero la aplicaron en el contexto de la física, relacionando las variables distancia, velocidad y tiempo. En este proceso, los 20 estudiantes utilizaron Microsoft Excel y comprobaron gráficamente la derivada y además relacionaron las expresiones algebraicas resultantes con el uso de ajuste de curva que está incluido en este software.

En el tercer apartado de la práctica se solicitó que describieran el tipo de movimiento en términos de su desplazamiento, velocidad y aceleración. Los 20 estudiantes comentaron que “en el movimiento rectilíneo uniforme, se desplaza un objeto a velocidad constante y esto se presenta cuando la tabla se acerca o aleja del sensor”. Dos estudiantes señalaron que no había aceleración en este caso de acercar o alejar la tabla del sensor. Solo 10 estudiantes dijeron “y cuando se lanza la tabla hacia arriba, describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, con una aceleración constante”. Respecto a la velocidad indicaron que era variable. En general pudieron describir las variables y constantes que aparecen en las ecuaciones de los citados movimientos y relacionarlas con los comportamientos gráficos del apartado uno de la práctica.

Estos resultados son una aportación a los estudios realizados con la metodología STEM que en México son minoría en comparación con países donde sus currículos trabajan la interdisciplinariedad y han apostado por los estándares de ciencias para la próxima generación. Por lo que respecta a la modelación, existe una gran diver-

sidad de investigaciones en este aspecto y con el empleo de diversos artefactos, pero la mayoría se han trabajado descontextualizadamente, por lo que la riqueza del modelado en nuestras clases no se hace extensivo a un conjunto de unidades de aprendizaje que de alguna manera aportan contenidos que pueden abordarse transversalmente como proyectos aula STEM.

#### IV. CONCLUSIONES

La práctica que involucra funciones polinomiales permitió que los alumnos apuntalaran las funciones estudiadas en los anteriores cursos en un marco experimental que los condujo a la graficación de la derivada. Asimismo, los movimientos corresponsales de la física fueron tratados en sus características algebraicas y gráficas, interconectando los dos registros representacionales.

Por lo general, en los cursos de cálculo diferencial las primeras aproximaciones a la derivada se recargan en procesos algebraicos, partiendo de la definición y continuando con el uso del formulario, sin un significado para el sujeto. El uso de este dispositivo en un ambiente informático permitió a los estudiantes hacer observaciones del comportamiento de la información, manipularla, vaciarla en un sistema tabular y gráfico, conjeturar y conceptualizar los objetos físicos y matemáticos, relacionando las variables de la física: desplazamiento, velocidad y aceleración, rectificando los movimientos con los movimientos (MRU y MRUA).

El dispositivo digital resignificó el modelaje, iniciando con la toma de información, por lo que los alumnos pudieron indagar, argumentar y analizar, hacia los modelos con el inicio experimental de la función derivada que se obtuvo gráficamente. Por otro lado, integraron conocimientos referidos por dos disciplinas en diferente grado de integración, entrelazando la ingeniería, entendida como el diseño desde la perspectiva de la definición de las necesidades y los límites de un problema.

Se considera seguir desarrollando e implementando actividades que permitan involucrar los conocimientos en los tres tipos de aproximación de integración en el sentido de la transversalidad que los nuevos programas de estudio del componente básico del marco curricular común de la educación media superior proponen y que también los estándares de ciencias de nueva generación para el grado K-12 rectifican en la inclusión mundial STEM.

#### REFERENCIAS

- [1] J. Vasquez, C. Sneider y M. Comer, *STEM lesson essentials, grades 3–8: Integrating science, technology, engineering, and mathematics*. Portsmouth, NH, EUA: Heinemann, 2013.
- [2] National Research Council, *Report of a workshop on the scope and nature of computational thinking*. Washington, DC, EUA: The National Academies Press, 2010.
- [3] H. Ulrich y S. Werneburg, “Computational Thinking—More Than a Variant of Scientific Inquiry!”, en *Computational Thinking Education*, S.-C. Kong y H. Abelson eds. Singapur: Springer, 2019, pp. 13-30.
- [4] P. M. Senge, A. Kleiner, C. Roberts, R. B. Ross y B. J. Smith, *La quinta disciplina en la práctica*. Buenos Aires: Granica, 2014.
- [5] M. Román-González, J. Moreno-León y G. Robles, “Combining Assessment Tools for a Comprehensive Evaluation of Computational Thinking Interventions”, en *Computational Thinking Education*, S. C. Kong y H. Abelson, eds. Singapur: Springer, 2019, cap. 6, pp. 79-98, doi: [10.1007/978-981-13-6528-7\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-13-6528-7_6).
- [6] N. Zhang y G. Biswas, “Defining and Assessing Students’ Computational Thinking in a Learning by Modeling Environment”, en *Computational Thinking Education*, S.-C. Kong y H. Abelson, eds. Singapur: Springer, 2019, cap. 12, pp. 203-221, doi: [10.1007/978-981-13-6528-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-6528-7_12).
- [7] K. Brennan y M. Resnick, “New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking”, en *Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA’12)*, Canada, 2012.
- [8] H. Swanson, G. Anton, C. Bain, M. Horn y U. Wilensky, “Introducing and Assessing Computational Thinking in the Secondary Science Classroom”, en *Computational Thinking Education*, S.-C. Kong y H. Abelson, eds. Singapur: Springer, 2019, cap. 7, pp. 99-117, doi: [10.1007/978-981-13-6528-7\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-13-6528-7_6).
- [9] D. Weintrop et al., “Defining computational thinking for mathematics and science classrooms”, *J Sci Educ Technol*, vol. 25, no. 1, pp. 127-147, 2016, doi: [10.1007/s10956-015-9581-5](https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5).

- [10] National Research Council, *A Framework for K 12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas*. Washington, DC: National Academy Press, 2012, doi: 10.17226/13165.
- [11] P. Sengupta y A. V. Farris, “Learning kinematics in elementary grades using agent-based computational modeling: A visual programming based approach”. *Proc. of the 11th Int. Conf. on Interaction Design & Children*, Bremen, Alemania, jun. 12-15, 2012, pp. 78-87, doi: 10.1145/2307096.2307106.
- [12] W. M. Stroup, N. Ares, A. C. Hurford y R. Lesh, “Diversity by Design: Generativity in Next-Generation Classroom Networks”, en *Foundations for the Future in Mathematics Education*, R. A. Lesh, E. Hamilton y J. J. Kaput, eds. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Publishing Company, 2007, cap. 19, pp. 367-393.
- [13] Secretaría de Educación Pública, *Física 1*, 2018. [En línea]. Disponible: [http://www.cbtequixquiac.edu.mx/library/4sem/BT\\_FISICA\\_I.pdf](http://www.cbtequixquiac.edu.mx/library/4sem/BT_FISICA_I.pdf). Consulta: mar. 25, 2019.
- [14] M. S. Valero, *Cálculo aplicado a la física con un recurso didáctico* (Serie Prácticas Innovadoras). México: INEE, 2017.
- [15] E. R. Ruiz, F. Acosta y A. R. Villagómez, *Estudiando funciones racionales: Actividades de funciones racionales con Excel*. Saarbrücken: Editorial Académica Española, 2017.
2. Iniciando a una distancia de aproximadamente 10 cm del sensor, aléjala a velocidad constante. Todo esto con duración 5 segundos.
2. Ahora con la misma distancia anterior. Acerca la tabla al sensor, en un tiempo de 5 segundos.
3. Iniciando aproximadamente a 20 cm, primero aleja la tabla del sensor por 5 segundos y después acércala con duración de 5 segundos.
4. Ahora, lanza verticalmente la tabla hacia arriba iniciando a unos 10 centímetros del sensor. Debes tomarla en su caída antes que golpee el sensor.
5. Elabora una gráfica:  $s(t)$  vs.  $t$ ,  $v(t)$  vs.  $t$ , para cada uno de los anteriores movimientos.

## II. Modelación matemática

Después de realizar varios movimientos, analiza cada una de las gráficas obtenidas, anotando las características que se solicitan.

1. En las gráficas correspondientes a las funciones  $s(t)$ . ¿Qué le sucede al valor de  $s(t)$  cuando la tabla se aleja del sensor? ¿Cómo es su gráfica? ¿Cómo es la gráfica de  $v(t)$ ?

2. Examina cada gráfica de las funciones  $s(t)$ . ¿Qué le sucede al valor de  $s(t)$  cuando la tabla se acerca al sensor? ¿Cómo es su gráfica? ¿Cómo es la gráfica de  $v(t)$ ?

## III. El movimiento

Describe diferentes tipos de movimiento en términos de su desplazamiento, velocidad y aceleración.

1. Si alejas la tabla del sensor en un determinado tiempo.  
- ¿Qué tipo de movimiento se está efectuando?

## APÉNDICE A

### Práctica. El movimiento y las funciones polinomiales

Instrucciones. Realiza lo que se solicita en cada uno de los siguientes tres apartados.

### I. Experimento

Realiza el experimento con el dispositivo digital.

1. Mueve verticalmente la tabla tomándola con tus manos en sus extremos, iniciando a una mínima distancia del sensor y alejándola a velocidad constante.

- Exprésalo con la ecuación correspondiente.
  - ¿Cómo es la velocidad y aceleración en este tipo de movimiento?
  - ¿Cómo expresas el desplazamiento de la ecuación y de qué depende que pueda tomar diferentes valores?
2. Si lanzas la tabla hacia arriba.
- ¿Qué tipo de movimiento se está efectuando?
  - Exprésalo con la ecuación correspondiente.
  - ¿Qué variables y constantes intervienen en la ecuación?
  - ¿Cómo es la velocidad y aceleración en este tipo de movimiento?
  - ¿Cómo expresas el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en la ecuación?

## APÉNDICE B

### *Acciones de hechos y pautas de conducta del equipo C*

Ingresaron al software Arduino y seleccionaron el tipo de microcontrolador a usar: Arduino Mega 2560.

Abrieron el programa CPT\_Sensor\_ultrasónico.ino y comprobaron que el programa no tenía errores.

Cargaron las instrucciones que se encuentran en el programa al microcontrolador Arduino Mega.

Comprobaron la conexión de la placa Arduino al puerto USB de la computadora.

Ingresaron a NetLogo y abrieron el archivo arduinoVoltaje.nlogo.

Seleccionaron el puerto en el que se encuentra conectada la placa Arduino.

Realizaron el experimento con el movimiento de la tabla, graficando al oprimir el botón graficar.

Revisaron el comportamiento de la gráfica,

al modificar el intervalo de graficación con la opción Edit.

Realizaron nuevamente el experimento, colectando los datos en tiempo real, donde su comportamiento fue graficado.

Guardaron los datos, seleccionando la opción Export y con su respectivo nombre, incluyéndolo en una carpeta.

Abrieron en Excel el archivo que generaron con NetLogo.

Se percataron que los datos están explicitados en dos columnas A y B.

Graficaron con Excel, utilizando la opción gráficos de dispersión.

Modelaron matemáticamente, seleccionando la opción Agregar línea de tendencia.

Obtuvieron la expresión algebraica correspondiente.

En otra columna de Excel explicitaron los valores correspondientes a la fórmula de la pendiente revisada en el curso de geometría analítica. Ecuación (1).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Graficaron agregando los valores anteriores vs. tiempo a la gráfica que ya habían obtenido.

### *Acciones de estructura y modelos mentales*

Para destacar los comentarios de los 4 estudiantes del equipo C, se escriben entrecomillados.

Comentaron, en el primer acercamiento con NetLogo, que “el gráfico crece”.

Cuando modificaron la ventana de graficación, observaron que no era exactamente una recta, pero comentaron “sigue creciendo”.

En Excel revisaron los datos de las dos columnas, se les cuestionó qué representaba cada columna y dijeron “A representa a  $x$  y B a  $y$ ”.

Se les solicitó que relacionaran las variables con el experimento de la tabla. Comentaron que “en eje X están los tiempos y en eje Y, son distancias”.

Se les solicitó que comentaran sobre las magnitudes de las variables distancia y tiempo. Comentaron, al desplazar la tabla, que “el tiempo está en segundos y la distancia en centímetros”.

Al revisar los datos en las columnas A y B, ratificaron que los datos estaban aumentando y por eso la gráfica crecía, se parecía a una recta, pero tenía ligeras disminuciones de decimales en la columna B perteneciente a las distancias.

Con Excel obtuvieron una expresión algebraica para la gráfica, corroborando que sí era una recta.

Se les solicitó que explicaran los parámetros de la función que obtuvieron. Comentaron que “el valor que acompaña a la  $x$  es la pendiente, más bien que multiplica a  $x$ ”. Dijeron, que “el valor que está sumando es la ordenada al origen”. No supieron qué representaba este valor, pero sí dijeron que “la pendiente representa la inclinación”.

Al graficar la columna de la pendiente, obtuvieron una recta horizontal, entonces se preguntaron “por qué la gráfica es una recta horizontal”.

Se les solicitó que comentaran qué variables, acorde con el experimento, se estaban graficando. Comentaron que “en el eje X, está el tiempo”, respecto al eje Y tuvieron muchas dudas de la variable representada. Para esto se les indicó que revisaran nuevamente el enunciado uno de la práctica, donde se les solicita que alejen la tabla a velocidad constante. El integrante del equipo que estaba registrando las observaciones comentó que “es la velocidad constante”, pero no pudo relacionar el comportamiento gráfico.

Posteriormente se les solicitó que revisaran los valores de la columna  $m$  y comentaron que “el valor es el mismo en las celdas de esa columna”, por lo que concluyeron que “ese comportamiento significa que es constante”.

Después de la modelación, se solicitó que compararan sus predicciones (se les requería al utilizar NetLogo) con los resultados y explicaran por qué había una diferencia, si es que la había, y en qué medida los sorprendió.

Este ejercicio de antes y después se considera fundamental para el proceso de aprendizaje y mantiene al equipo en la frecuencia de modo de indagación.

# El Circo de la Física: Actividades lúdicas en la divulgación de la física

## *The Physics Circus: Physics outreach playful activities*

Karen Yael Castrejón-Parga<sup>1</sup>✉, Jesús Manuel Sáenz-Villela<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

### RESUMEN

Este trabajo describe de una manera cualitativa cómo se presentan los conceptos y demostraciones físicas en El Circo de la Física, uno de los ejemplos a nivel mundial de este tipo de actividad de divulgación científica. También se discuten la filosofía y la manera en la que se conducen las actividades, así como algunas de las problemáticas en la introducción de conceptos de la física. Este trabajo describe cómo se facilita la comprensión de los conceptos al presentar aproximaciones, en lugar de ser abordados de forma rigurosa dada la gran diversidad de edades y niveles educativos del público. Se dan algunos ejemplos de las demostraciones y algunas sugerencias para su implementación. También, se describen las experiencias adquiridas en base a las aportaciones usuales de los asistentes que han participado en alguna de las presentaciones llevadas a cabo a lo largo de más de veinte años en México. Finalmente, se discute el trabajo a futuro para evaluar actividades de divulgación de este tipo.

**PALABRAS CLAVE:** demostraciones; experimentos; divulgación.

### ABSTRACT

This work describes in a qualitative way how physical concepts and demonstrations are presented in The Physics Circus, one of the worldwide examples of this type of scientific outreach activity. The philosophy and how the activities are conducted are also discussed, and some of the problems in the introduction of physics concepts. This work describes how the understanding of the concepts is facilitated by presenting approximations instead of being approached rigorously, given the great diversity of ages and educational levels of the public. Some examples of the proofs and some suggestions for their implementation are given. Also, the experiences acquired are described based on the usual contributions of the attendees who have participated in some of the presentations carried out for over more than twenty years in Mexico. Finally, future work to evaluate dissemination activities of this type is discussed.

**KEYWORDS:** demonstrations; experiments; outreach.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Karen Yael Castrejón Parga  
**INSTITUCIÓN:** Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
**DIRECCIÓN:** Av. del Charro núm. 450 norte, col. Partido Romero, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México  
**CORREO ELECTRÓNICO:** kcastrej@uacj.mx

**Fecha de recepción:** 7 de abril de 2022. **Fecha de aceptación:** 26 de agosto de 2022. **Fecha de publicación:** 31 de agosto de 2022.



## I. INTRODUCCIÓN

Hay Circo de la Física en diversas partes del mundo: en la Universidad de California en Santa Bárbara <sup>[1]</sup>, en la Universidad de Texas <sup>[2], [3]</sup> o en la Universidad de Minnesota <sup>[4]</sup>, por mencionar algunos ejemplos. En este trabajo se aborda uno de estos eventos, que es una actividad de divulgación científica que se ha presentado en México a nivel nacional y que tiene ya más de 20 años de experiencia. El Circo de la Física se presentó por primera vez en 1999 dentro de un evento de promoción de programas educativos, en donde los estudiantes de escuelas preparatorias presenciaron experimentos llamativos que tenían tanto el fin de demostrar diversos conceptos de la física como de divertir al público.

Dentro de la inspiración original de lo que con los años se convertiría en una actividad de divulgación científica en México, se tiene que la primera actividad similar que tuvieron los autores del presente artículo fue en una presentación de experimentos en la Universidad de Texas en El Paso (UTEP). La forma de exposición no ha cambiado en esencia; se sigue manteniendo cierto suspenso al presentar experimentos que parecen desafiar las expectativas del público, cuyas edades van de preescolar hasta la tercera edad. Los experimentos originales presentados en UTEP también fueron inspirados a su vez en otras universidades y otros medios, como el libro de Jearl Walker <sup>[5]</sup>, en donde se enfatiza la exploración de los conceptos de la física a través de situaciones de la vida común.

Como todo acto circense, El Circo de la Física fue evolucionando con los años. Aunque algunos de sus experimentos pueden llamarse clásicos porque son los más frecuentemente presentados, con el tiempo se han modificado unos y agregado otros, desde los sencillos hasta los más complicados. Inicialmente se daba una serie de demostraciones alrededor de los conceptos de presión y temperatura usando nitrógeno, lo que da un buen impacto al momento de la presentación, pero a la larga se volvió poco sostenible debido a la constante necesidad de la adquisición de consumibles. Sin embargo, lo que realmente ha dictado la evolución de los experimentos es la necesidad de acercar el conocimiento científico a un número creciente de participantes. Es así como las reacciones, participaciones y comentarios de los miembros del público permiten evaluar cualitativamente el impacto que tiene la actividad en favor de la divulgación científica entre niños y jóvenes, además del público en general de México.

A partir de 2012 se ha tenido un incremento importante en el número de presentaciones de El Circo de la Física a nivel nacional, a través de la participación en el programa Domingos en la Ciencia de la Academia Mexicana de Ciencias (AMC), a la que las diversas sedes pueden solicitar exhibiciones. Se han vuelto cada vez más comunes las llamadas giras de presentaciones. Por ejemplo, se tuvo un taller de El Circo de la Física en la Biblioteca Central Estatal Wigberto Jiménez en abril de 2017 en León, Guanajuato; una gira por el estado de Tamaulipas dentro del marco del Tercer Día del Investigador organizado por la Universidad Autónoma de Tamaulipas en septiembre de 2017, en donde se dieron presentaciones desde la inauguración del evento en Ciudad Victoria hasta su clausura en Tampico, y más recientemente una gira de verano para la Subsecretaría de Desarrollo Social Zona Norte del Estado de Chihuahua en junio y julio de 2019, en Ciudad Juárez, en la cual se contó con la participación de más de 700 niños en los 15 centros comunitarios a cargo del Gobierno del Estado en esta frontera.

Luego de celebrar el XX aniversario en 2019, El Circo de la Física se ha convertido en una de las actividades emblemáticas de divulgación científica y para esto se ha tenido que adoptar un estilo de trabajo que ofrece una experiencia de aprendizaje que busca adaptarse siempre a los muy diversos factores: número y edad del grupo participante, nivel educativo, condiciones físicas del escenario, clima al momento de la presentación, posibles desperfectos y fallas del equipo y, desde luego, a la reacción del público ante los resultados del experimento. Es así como el público se convierte en el actor principal en esta actividad de ciencia-espectáculo.

## II. METODOLOGÍA

En la Reunión Anual de Asociación Americana de Profesores de Física Capítulo México (AAPT-MX) en 2019, en Ciudad Juárez, Chihuahua, se presentó una introducción a la filosofía y metodología seguida en las actividades de El Circo de la Física. Como se ha mencionado, uno de los pilares fundamentales de esta actividad de divulgación es la participación de los asistentes para facilitar la comprensión de los conceptos, a la vez que se estimulan distintas capacidades. Así es como se han adoptado las capacidades para el aprendizaje o pensamiento imaginativo de Lincoln Center Education (LCE) <sup>[6]</sup>, que se emplean en programas académicos de nivel preparatoria en las llamadas New Visions Charter Highschools

[7], en las cuales no solo se estimula el aprendizaje de las humanidades a través de la experiencia de los estudiantes con actividades artísticas y culturales a cargo de artistas profesionales, sino también es posible incorporar el desarrollo de las capacidades de pensamiento creativo de los estudiantes en los programas académicos que incluyen asignaturas de matemáticas y física [7].

Algunos autores, como Van der Veen [8], han explorado las artes como un posible facilitador para la comprensión y visualización de conceptos de la física, así como para mejorar la perspectiva *a priori* que los estudiantes tienen al respecto. Además, Colletti [9] establece que la educación en ciencia y en arte, ambas pueden apoyarse mutuamente al ofrecer un método de enseñanza a través de pinturas famosas. Así, las actividades de El Circo de la Física se desarrollan con el espíritu de ofrecer una charla-espectáculo en vez de una lección formal, lo cual no debe ser preocupante; en [10] se establece que en las situaciones de aprendizaje en las que el rigor y los tecnicismos no son aplicables, una aproximación a los conceptos de la física puede ser útil dada la estimulación de las habilidades y capacidades de pensamiento y de resolución de problemas mediante demostraciones amenas, sobre todo en aquellos estudiantes que están inclinados a diversas disciplinas no necesariamente conectadas con las de STEM (siglas en inglés de Science, Technology, Engineering, and Mathematics), y más aún si el público se compone de familias, como ocurre comúnmente en las presentaciones de El Circo de la Física. White [11] también ha explorado la complejidad del arte-ciencia de la enseñanza en la física.

De acuerdo con el Lincoln Center Education (LCE), las capacidades de pensamiento creativo son: “Observa a fondo, exprésate, plantea preguntas, identifica patrones, establece conexiones, muestra empatía, acepta la ambigüedad, encuentra sentido, actúa y reflexiona/evalúa” [12]. Nótese que algunas de las capacidades descritas son completamente compatibles con lo que se espera de una actividad de aprendizaje basada en demostraciones. Ciertamente, quien participa observa lo que ocurre antes y después de una demostración, plantea preguntas acerca de cierto experimento, identifica patrones entre experimentos y/o conceptos, puede llegar a establecer conexiones entre cómo un concepto o experimento conduce a otro y puede actuar en base a los conocimientos aprendidos al reproducir alguno de los experimentos demostrados. Precisamente por esto, en El Circo de la Física siempre se debe tener un programa de experimen-

tos llamados números o actos. Se debe buscar la manera de ir de lo sencillo a lo complejo. La manera específica del cómo se establece un programa de experimentos para la presentación se discute con mayor detalle en la siguiente sección. Lo anterior obedece a lo que ya se mencionó respecto a las condiciones del escenario; no es lo mismo hacer una presentación al aire libre con participantes de pie, que una en un auditorio con 300 o más personas cómodamente sentadas.

Ahora bien, las capacidades de aceptación de la ambigüedad y de sentir empatía están directamente conectadas con la experiencia que el espectador debe tener en cualquier presentación de El Circo de la Física. Con “mostrar empatía”, la metodología del LCE se refiere a fomentar un ambiente de participación y comunicación efectiva entre los asistentes y ponentes, usualmente profesores y alumnos del Programa de Ingeniería Física de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, en donde la diversidad de perspectivas, respuestas e ideas acerca de un concepto o experimento sean escuchadas con atención y respeto. Usualmente, no es de esperarse que todos entiendan exactamente lo mismo de igual manera y al mismo tiempo. Por esta razón, una parte fundamental de las actividades es que son desarrolladas en un ambiente donde se fomenta la participación del público, ya sea activa o verbal, que comúnmente aplaude al terminar un experimento, lo que de cierta manera brinda una medición cualitativa del grado de aceptación de las actividades. Como ya se mencionó, crear este ambiente de participación depende de muchos factores.

En la filosofía de LCE, la capacidad de aceptar la ambigüedad puede interpretarse como que las actividades deben dar a entender que puede haber explicaciones que no cumplan con el rigor al que se hizo referencia en un párrafo anterior. Esto es algo que comúnmente se puede manifestar en miembros del público que ya conocen los conceptos o las demostraciones, como educadores de física de nivel medio superior o superior. Debe quedar claro de una manera natural para el grupo de participantes que las explicaciones en muchas situaciones no serán completas o rigurosas, sobre todo en presentaciones para el público en general. En este trabajo se discuten algunos de los inconvenientes encontrados para presentar formalmente algún concepto.

La filosofía del LCE respecto al desarrollo y estimulación de las capacidades de pensamiento creativo establece que la capacidad de reflexión/actuación no solo se da

al final de una experiencia de aprendizaje, sino que debe aprovecharse como herramienta para adquirir habilidades y conocimientos nuevos. Es así como las capacidades de crear significados y emprender acciones impulsan al grupo participante a buscar interpretaciones del conocimiento en situaciones fuera de los experimentos de El Circo de la Física, pero en las cuales se puede poner a prueba las ideas presentes en las demostraciones. Resulta difícil establecer una jerarquía de las capacidades de pensamiento creativo de la filosofía del LCE ya todas pueden tener impacto en el grupo de participantes. Por lo anterior, El Circo de la Física puede presentarse de manera amena y divertida, al estilo de un *performance*.

Se pueden establecer actividades de aprendizaje basado en demostraciones y experimentos, las cuales tengan el objetivo de estimular un conjunto de las capacidades propuestas en la metodología de LCE, de acuerdo con las características del grupo participante y del escenario. Para el público de corta edad se han desarrollado actividades de expresión corporal o vocalización para representar y visualizar algunos conceptos como la propagación de ondas, el sonido y la electricidad, entre otros. Así pues, El Circo de la Física es una opción de divulgación científica donde las actividades grupales e individuales se conjugan con los conceptos de la física para ofrecer posibilidades de aprendizaje y de desarrollo de habilidades de pensamiento científico y creativo. En la siguiente sección se detallan algunos de los ejemplos de estas actividades en la presentación de El Circo de la Física, así como los resultados de su implementación. La [Figura 1](#) muestra el esquema de las capacidades de pensamiento imaginativo de la metodología de LCE.



Figura 1. Diagrama de las capacidades de pensamiento imaginativo del Lincoln Center Education. Adaptada de <sup>[13]</sup>.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A lo largo de los años se han presentado experimentos relativamente complicados con nitrógeno líquido, se han diseñado un par de los llamados tubos de Rubens, se han presentado diversas versiones de las figuras de Lissajous, se tiene un dispositivo de levitación acústica, se han presentado varias versiones de la placa de Chladni y se han tenido varias camas de clavos. Como se mencionó, se pretende que los temas se presenten en un contexto en que los asistentes puedan relacionarlos con vivencias o experiencias familiares, como experimentar una pequeña descarga eléctrica cuando se toca algún objeto metálico. En este sentido, la presentación de El Circo de la Física en la Reunión Anual de la AAPT-MX de 2019 puede considerarse como una de las funciones clásicas en cuanto al programa de experimentos relativamente más sencillos, mostrados como ejemplos de las actividades relacionadas con las capacidades de pensamiento científico-imaginativo.

En la siguiente sección se describen algunos de los experimentos de El Circo de la Física, de acuerdo con la metodología LCE, para los temas de electricidad y magnetismo, luz y sonido, pero pueden diseñarse actividades similares para los demás temas. También se reseñan las experiencias a partir de la percepción y participación de los asistentes.

#### A. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Para empezar la función, comúnmente se inicia con una actividad interactiva en la que participa un grupo de chicos o grandes (la edad no importa y el efecto didáctico es el mismo) en el experimento llamado “circuito humano”. Se usa un tubo de acrílico cuyo interior tiene un circuito conectado a tres diodos emisores de luz (LED) de color rojo, azul y verde y una pequeña bocina. Estos dispositivos son llamados comercialmente *energy tubes* o tubos de energía. En los extremos del tubo se tienen dos bandas metálicas que sirven como conductores. La idea es mostrar que las personas son capaces de conducir una corriente eléctrica para accionar el tubo.

Antes de iniciar la actividad se le pregunta al público si alguna vez han tenido alguna experiencia con una pequeña descarga eléctrica; comúnmente se tienen participaciones alrededor de los términos “descarga”, “electrostática”, “toques” y similares. Las respuestas pueden parecer variadas, pero se sitúan en el mismo contexto,

en que dentro del grupo participante se pueda tener una idea o experiencia con el concepto físico de electricidad.

Ya en la participación, se invita a algunos a ser parte activa del experimento una vez que se han discutido algunas ideas. Se les pide que se tomen de las manos o, incluso, a manera de juego pueden tocarse la oreja o la punta de la nariz o la mejilla. En este momento ocurre una de las asociaciones que se tienen con el concepto de electricidad; justo antes de tomar los extremos del tubo de acrílico, algunos participantes simplemente se sueltan de las manos o se niegan a tomar los extremos de este teniendo una descarga eléctrica. Es en este punto en donde se enfatiza que el espíritu de El Circo de la Física debe ser uno de aprendizaje en un ambiente seguro, por lo que siempre se opta por mostrar experimentos y demostraciones que sean relativamente seguros.



Figura 2. Demostración sobre circuito humano y tubo de energía. Los estudiantes activan el tubo de energía al completar un circuito humano. Imagen propia.

Una vez que se les convence de no romper el circuito y tomar los extremos del tubo de acrílico, la reacción de los asistentes es de sorpresa al presenciar cómo al momento de hacer la conexión o cerrar el circuito, el tubo se acciona emitiendo luz y sonido. De aquí se tiene que en muchas ocasiones los participantes toman la iniciativa al soltarse de las manos y volver a tomarse de ellas para comprobar si efectivamente son responsables de cerrar o abrir el circuito. La parte divertida es cuando se les invita a que, en vez de las manos, ahora se toquen la punta de la nariz.

En este momento se pueden introducir los conceptos de materiales aislantes y conductores. Incluso se puede

hacer experimentos literalmente con lo que se tenga en el auditorio. También es común pedirles que se tomen de la ropa o del cabello para investigar cómo los distintos materiales interrumpen la corriente. Esta actividad puede durar unos 10 minutos y naturalmente depende de las características del público cuánto se profundiza en los conceptos. Si se ayuda a estudiantes de nivel básico a asociar la actividad física con la deshidratación y los electrolitos, quizá resulte más fácil explicarles el porqué el cuerpo humano puede conducir la corriente.

Una vez que se ha iniciado con la actividad, se puede presentar las maneras en las que se genera la carga eléctrica de una forma que les resulte familiar, asociándolas con la experiencia de quitarse un suéter de lana. Luego de escuchar las participaciones del público, se puede hacer la demostración de la lata de aluminio con la piel de conejo antes de usar un generador electrostático de Van de Graaf. En este punto, la participación es un poco más usual en el sentido de que se invita a un miembro del público para que se le ericen los cabellos y no debe sorprender que la reacción es de asombro. Dependiendo de las condiciones del lugar, se puede seguir explorando las ideas iniciales sobre materiales conductores, aislantes y corriente eléctrica. En este sentido, se le pide a un participante que se tome de la esfera de Van de Graaff, pero estando de pie o sentado en un banco de madera. Normalmente la carga debe irse a tierra cuando no se usa el banco, por lo que se les recuerda el experimento con el tubo de acrílico. Esta es la manera como pueden irse estableciendo conexiones entre los conceptos, de acuerdo con la metodología LCE.



Figura 3. Demostración con el generador electrostático de Van de Graaf. Imagen propia.

En esta demostración es común dar algunas instrucciones de seguridad antes de iniciar y se debe ser siempre claro de que existe la posibilidad de experimentar una descarga eléctrica inofensiva, claro está, pero se opta por recomendar que los más pequeños no participen. También es común hacer la demostración del generador de Van de Graaff con unas tiras de papel de China pegadas a la esfera para dar una primera aproximación al efecto. Al ver que las tiras de papel se levantan alejándose por la repulsión eléctrica, el grupo participante puede hacer una conexión de lo que pasará si una persona se toma de la esfera de Van de Graaf. Debe mencionarse que, de acuerdo con la experiencia adquirida en las presentaciones, nunca se debe asumir que el público ya conoce algún concepto o que ya ha visto alguna de las demostraciones.

También, como parte de los experimentos de electrostática, es muy común cerrar esta parte con el experimento llamado “espada de la ciencia”, que es un generador de Van de Graaf portátil capaz de generar carga eléctrica de una manera equivalente a frotar una vara de plástico con pelo de conejo. La diferencia radica en que la carga generada es la suficiente para hacer levitar objetos pequeños, como confeti, o trocitos de papel o poliestireno. Normalmente se usan unos aros de papel plástico que toman formas llamativas mientras levitan en el aire una vez que son cargados eléctricamente con la misma vara.

Usualmente se puede hacer referencia al diagrama de cuerpo libre asociado al objeto; la fuerza de gravedad actúa hacia abajo mientras que la repulsión eléctrica entre el objeto y la vara puede actuar hacia arriba. En general, la dirección de repulsión actúa en determinado sentido según se coloque la vara alrededor del objeto. Esta es una demostración que ha funcionado excelentemente. El efecto de ver levitar eléctricamente un objeto ha sido siempre muy llamativo; es una de las demostraciones que más le gusta al público. Es también muy común explicar el mismo experimento usando un globo inflado que ha sido frotado con lana. El efecto es el mismo y los materiales son muy fáciles de conseguir.

Uno de los experimentos que frecuentemente siguen a estas actividades es la bobina de Tesla, cuyos detalles de diseño y operación típicamente rebasan a los objetivos de las actividades en general. Sin embargo, es una buena demostración para dar una introducción al campo electromagnético, término que en ocasiones se limita a “energía eléctrica”, dependiendo de las edades de los

asistentes. Se pueden tener participaciones iniciales respecto a si el público conoce el concepto del campo magnético que rodea nuestro planeta, protegiéndolo de la radiación solar, o si han escuchado acerca de las auroras boreales, por mencionar algunas ideas. En este tema, una de las actividades de estimulación de las capacidades es volver a usar el tubo de acrílico y acercarlo lentamente a la bobina. A cierta distancia, el tubo emitirá luz y sonido, pero en esta ocasión no hay circuito cerrado; nadie ni nada está cerrando el circuito con los extremos de las bandas metálicas del tubo de acrílico como se tiene en el caso anterior, por lo que se estimula la capacidad de pensamiento científico-imaginativo respecto a la tolerancia de la ambigüedad, dado que la explicación del circuito cerrado no se aplica en este caso.

Así pues, los conceptos de campo electromagnético y diferencia de potencial pueden ser explorados ante una nueva situación presentada con el uso de la bobina de Tesla. En este caso, si se acerca el tubo a la bobina a cierta distancia, solo el LED rojo se enciende. Si se acerca un poco más, se activa el verde y acercándolo un poco más, finalmente se activa el azul, por lo que puede presentarse la idea de alcance radial respecto al eje de la bobina. Nótese que con esta idea se puede establecer una relación, si bien indirecta, entre la intensidad de campo electromagnético requerida por el LED particular para encenderse y la distancia con respecto al eje de la bobina. Claramente, una explicación detallada de la operación y diseño de la bobina de Tesla requiere de mucho más tiempo y es completamente dependiente de los conceptos que el público tenga. Usualmente se reservan este tipo de explicaciones para demostraciones dentro de una clase de nivel superior, aunque pueden adaptarse bien para el nivel medio superior.

Las demostraciones de electricidad y magnetismo han resultado ser una buena manera de iniciar las funciones de *El Circo de la Física*, ya que ofrecen oportunidades para estimular las capacidades de pensamiento imaginativo de manera divertida y educativa y en un lenguaje accesible que puede adaptarse de acuerdo con las edades y características del público.

### B. LUZ

Una vez que se exploran los conceptos relacionados con la bobina de Tesla, se puede pasar a las ideas relacionadas con la luz. Se usan tubos espectrales que contienen diferentes gases a bajas presiones, como mercurio,

vapor de agua, neón, argón y helio. Al acercarlos a la bobina, como resultado se obtiene que los tubos emiten luz de ciertos colores específicos.

Generalmente se inicia la demostración con uno de los tubos que emite una luz tenue, como en el caso del aire, donde el efecto puede ser no muy espectacular a primera vista y en donde se emite luz de color morado pálido. Sin embargo, se pueden estimular las capacidades mencionadas al hacer preguntas abiertas al público, como “¿De qué color debe verse el tubo de vapor de agua?”, a lo cual muy frecuentemente responden de manera intuitiva que debe ser de color “azul”. Es en este momento que, con cierto espíritu circense, se hace la demostración para señalar que el vapor de agua emite una luz muy similar a la del tubo de aire. Entonces se pueden hacer la pregunta sobre cuáles son las similitudes entre estas dos sustancias. Posteriormente, el grupo de participantes hace suposiciones acerca del color de la luz de los demás tubos al estar en presencia del campo electromagnético producido por la bobina de Tesla. Usualmente se deja hasta el último el tubo de neón que emite luz roja brillante que siempre causa sorpresa.

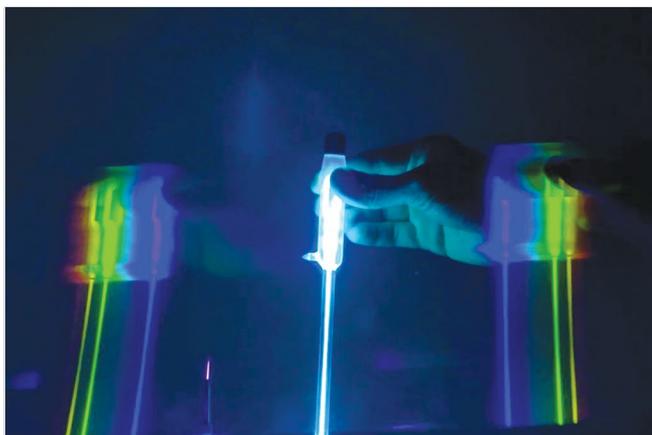


Figura 4. Demostración con la bobina de Tesla y los tubos espectrales. Fotografía tomada a través de una película de difracción. Imagen propia.

Nótese que las ideas asociadas con la demostración de los tubos espectrales y la bobina de Tesla ya abarca temas relacionados con el espectro de luz emitida por los átomos del gas confinado en los tubos. Para el público en general, este concepto puede ser presentado mediante el concepto de la luz solar y el arcoíris. Se tiene ya la idea entre los asistentes de que la luz es la composición de varios colores, lo que, quizá, si las condiciones lo permiten ayude a introducir los conceptos de “frecuencia” o “longitud de onda”.

Para explorar el concepto del espectro de la luz visible, se puede hacer el experimento clásico de pasar la luz de una lámpara de mercurio a través de un prisma. O bien, se pueden usar los lentes de rejilla de difracción, que normalmente se reparten entre todos los asistentes para que vean las líneas espectrales de cada tubo, las cuales se combinan para producir el color apreciado a simple vista.

Cuando ya se han presentado algunas ideas acerca de la luz, se procede a hacer demostraciones con láseres. Típicamente se usan tres: azul, verde y rojo, los cuales, de acuerdo con el fabricante, tienen una longitud de onda de 405, 523 y 605 nm aproximadamente, y con una potencia de 5 mW, la que los hace razonablemente seguros.

Luego de algunas recomendaciones de seguridad, se procede a cuestionar los participantes sobre algunas de las características de los haces. Se les pregunta cuál es el más intenso, a lo que típicamente responden que es el de color verde. De la misma manera, identifican que los láseres rojo y azul son menos intensos que el verde. Esto se hace antes de la introducción del concepto de energía de la luz.

Una variante frecuentemente con los láseres es utilizar un gas en aerosol usado para efectos especiales de neblina. Aunque estas sustancias no son tóxicas, son inflamables, por lo que tienen que usarse tomando las debidas precauciones. El efecto de neblina es especialmente efectivo en una sala a media luz; los láseres interactúan con las partículas del gas, por lo que se dispersan mostrando claramente la trayectoria recta del láser, especialmente del verde, al que previamente ya el público ha identificado como el más intenso. Es una demostración sumamente sencilla que siempre cautiva el interés del público.

Como es de suponerse, suelen usarse las demostraciones más llamativas luego de las otras que no lo son tanto. La manera de presentar las ideas de la trayectoria que sigue la luz típicamente comienza con hacer una pregunta de hasta dónde llegaría el haz de luz. Algunas respuestas son: “En el techo del lugar” o “En las nubes”. Esto indica que ya se tiene una idea previa de que la luz es dispersada por los objetos, a lo cual los presentadores indican que la luz choca con los objetos. En este sentido, se usa también un guía de luz que consiste en un pedazo de acrílico transparente de forma curva, por el

cual, mediante reflexión total interna, la luz cambia de dirección al incidir sobre la superficie interna de la guía. Esta es una excelente demostración útil para presentar los dispositivos de fibra óptica. Como alternativa, la demostración puede llevarse a cabo usando un cable de audio de fibra óptica.

Cuando ya se han discutido los temas e ideas de la luz, se procede a hacer una demostración sobre la combinación de colores. Se usa un dispositivo que tiene LED rojo, verde y azul y cuya luz puede ser proyectada sobre una pantalla. Se procede a hacer combinaciones de colores, con rojo y azul, cuya combinación produce el magenta. Esta demostración sirve para presentar el concepto de colores primarios.

En las funciones de El Circo de la Física se definen como colores primarios al rojo, verde y azul (RGB), los cuales son los primarios aditivos. Es de especial interés darse cuenta de que algunas de las participaciones de los asistentes coinciden en que en alguna clase de educación artística se les dio la definición de cian, magenta y amarillo (CMY) como colores primarios. Se enfatiza en las presentaciones que ambas definiciones son válidas, pero se aclara que se puede hacer referencia a los colores primarios aditivos para RGB y a los primarios sustractivos para CMY, lo cual reduce la ambigüedad de la definición y sirve como evidencia adicional de que las experiencias con el arte pueden ser encaminadas para presentar conceptos de la física. Como es de esperarse, al final de la demostración se activan los tres LED para producir luz blanca. Originalmente, esta demostración se hacía usando un disco de Newton.

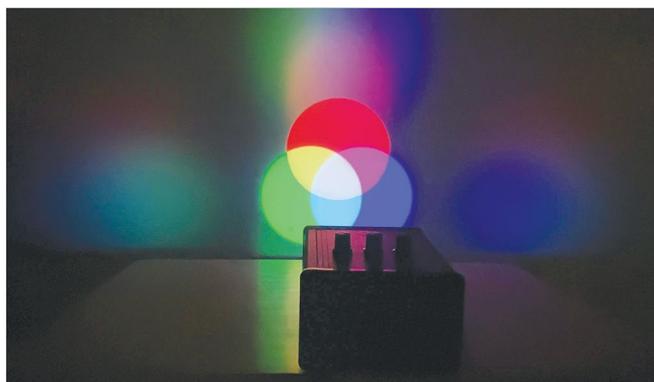


Figura 5. Demostración sobre colores primarios. Imagen propia.

Luego de presentar las ideas sobre los colores, se procede a hacer demostraciones de fluorescencia y de fosforescencia. En el caso de la primera, se usa como de-

mostración inicial una botella con agua tónica o agua quina, que es una bebida carbonatada a la que se le agrega quinina, dándole un sabor amargo. La quinina es fluorescente y emite luz de longitud de onda de unos 450 nm, como se describe en [14]. La fluorescencia de la quinina se debe a la incidencia de la luz del láser azul, y no responde a la luz de los láseres rojo y azul, por lo que precisamente se usan al inicio de la demostración. Si se usa una lámpara de luz negra se consigue que toda la botella de agua quina emita luz, produciendo un efecto sumamente llamativo. Si los conocimientos de los asistentes lo permiten, se exploran los conceptos de longitud de onda y energía de la luz, siendo la energía más baja para el color rojo que para el verde y el azul, respectivamente, por lo que puede hacerse la distinción entre intensidad de la luz y energía de la luz.

Recientemente se han incorporado a la demostración más líquidos fluorescentes; se tiene un set de tinturas fluorescentes que emiten luz en varias longitudes de onda. El concepto de fluorescencia es quizá uno de los que tienen una mayor difusión previa entre el público, ya que se tiene conocimiento de los llamados marcadores fluorescentes o algunos otros objetos similares.

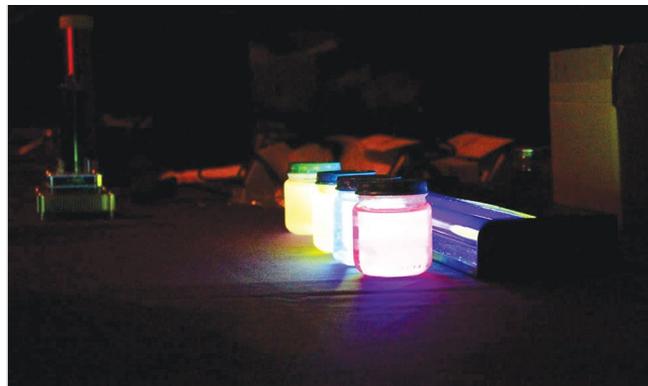


Figura 6. Demostración sobre fluorescencia con diversas sustancias con pigmentos fluorescentes usando una lámpara de luz violeta. Imagen propia.

Una vez que se establece el concepto de sustancias fluorescentes, se puede hacer la demostración de fosforescencia. En el mercado se puede conseguir hojas de papel de fósforo, el cual responde emitiendo luz verde ante la estimulación con luz azul. Es usual referirse a los experimentos con algún título llamativo. Se tiene un ejemplo en la demostración de fosforescencia, la cual suele ser llamada “pintando con luz”. La dinámica consiste en hacer incidir la luz de los láseres rojo, verde y finalmente azul sobre el papel de fósforo. Lo que resulta siempre

sorprendente para los asistentes es que en la fosforescencia la emisión es prolongada en comparación con la fluorescencia del agua tónica. En este caso, las figuras trazadas por el haz de luz azul siguen brillando en luz verde por algunos segundos, por lo que efectivamente alguien puede hacer un dibujo o escribir su nombre con luz. Se usa este tiempo de emisión para distinguir cualitativamente a la fluorescencia de la fosforescencia. En [14] se explica que la fluorescencia tiene un tiempo de duración del orden de 10 ns mientras que la fosforescencia tiene una duración típica que va de los milisegundos a los segundos. Explorar con más detalle los conceptos de la física relacionados con las propiedades de la materia respecto a la fluorescencia o fosforescencia, quizás sea más apropiado en alguna demostración dentro de una asignatura de preparatoria o licenciatura.



Figura 7. Demostración de fosforescencia con láseres, rojo, verde y violeta sobre papel de fósforo en la sesión “pintando con luz”. Imagen propia.

Las demostraciones con luz suelen ser de las más llamativas. Para asegurar una mejor presentación, se suele pedir a las sedes, en medida de lo posible, que se asigne un espacio donde las luces de la sala puedan ser prendidas y apagadas. Similarmente, se les pide que se cubran las ventanas aunque sea con papel periódico. Esta sencilla preparación previa hace mucho más efectivas las sesiones. Naturalmente, si el lugar de la función ha de desarrollarse al aire libre, durante el día no se programa ningunos de los experimentos de luz. Este tipo de condiciones no siempre son conocidas por los presentadores de antemano, por lo que se tienen que diseñar programas de experimentos alternos.

### C. SONIDO

Una vez que se han discutido los temas de electricidad y magnetismo y de luz, en los cuales la participación de

los asistentes es pieza fundamental de una función de El Circo de la Física, se procede a explorar las ideas que el público tiene acerca del sonido. Se describen a continuación algunas de las demostraciones.

Es común referirse al sonido como una onda, concepto que puede ser difícil de comprender para los más pequeños. Es por esto que se desarrolla la idea a partir de la participación de los asistentes; se les pide: “Formen una ola”, lo cual es familiar para todos y funciona especialmente bien en auditorios donde el número de asistentes no solamente requiere de la participación para mantener el interés, sino que sirve además como una primera aproximación al concepto de onda transversal, la cual puede usarse para distinguirla de una onda longitudinal. Es común hacer ejercicios de vocalización para dar algunas ideas acerca de tono, volumen y timbre del sonido. Esta dinámica grupal funciona bien porque se adopta el lenguaje de la música y, en este sentido, por un momento los participantes son integrantes de “la orquesta del circo” y hay un “director o directora de la orquesta”. Nótese que estos roles no solo son divertidos, sino que también tienen el propósito de reforzar el control del grupo, dado que se procede literalmente a hacer ruidos y sonidos de diferentes maneras.

Una vez que los asistentes se han familiarizado con algunas definiciones elementales sobre el sonido, o quizá un tanto más avanzadas si las características del grupo lo permiten, se hace la demostración del llamado *whirly tube*, que es un tubo de plástico corrugado flexible que se agita dándole vueltas en el aire para producir sonido. La teoría del principio físico es descrita por Crawford [15] y más recientemente por Ruiz y Berls [16]. Sin embargo, en las actividades primero se pregunta si conocen el tubo. De manera intuitiva, las participaciones van frecuentemente en el sentido de que el dispositivo “suena” de alguna manera, sin embargo, no se dan instrucciones de su funcionamiento, por sencillas que sean. Lo que se refuerza con esta actividad es que el público contribuya con ideas. Algunas respuestas comunes a la pregunta sobre cómo se produce el sonido son: “Se sopla”, “Se golpea”, “Se raspa”. Todas estas ideas son correctas, pero no son la mejor respuesta. Sin embargo, en el espíritu de la actividad, nunca se les corrige sino que se les guía en la dirección correcta, ya que de ninguna manera se debe desalentar la participación del público. Finalmente, el grupo ve que al darle vueltas rápidamente el tubo emite sonido.



Figura 8. Los tubos corrugados en movimiento. Imagen propia.

El experimento descrito del tubo corrugado es uno de los claros ejemplos del cómo intentar dar una explicación completa puede llegar a ser contraproducente, más aun si el objetivo de la actividad es el de dar una aproximación al concepto físico. En principio, se podrían tratar los conceptos de frecuencia fundamental y sobretonos producidos por el tubo corrugado en función de la rapidez rotacional del tubo. Serafin y Kojs proponen un modelo físico que simula el efecto [17]. Sin embargo, una explicación detallada sería apta en una clase donde se aborden los temas mencionados sobre sonido y la acústica de los tubos corrugados. En este caso, podría usarse un espectrograma como el mostrado en la Figura 9, que se genera con una grabación simple de una de las notas producidas por la rotación del tubo corrugado. El espectrograma es similar a los sonogramas mostrados en [17].

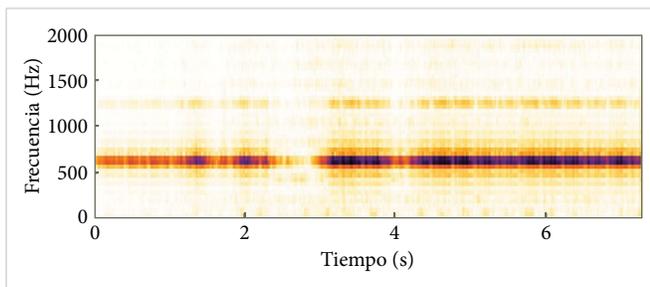


Figura 9. Espectrograma del tubo corrugado usado en la demostración de sonido en donde se muestra una nota base con una frecuencia arriba de los 650 Hz y un sobretono a los 1250 Hz, aproximadamente. Imagen propia.

La manera en que comúnmente se describen los sonidos producidos por la rotación del tubo corrugado se limitan a “grave” o “agudo”, es decir, quizá sin mencionar el concepto de frecuencia si el grupo de participantes no

está familiarizado con este. Adviértase que, de acuerdo con las notas producidas y a los conocimientos previos de público, se podrían usar los conceptos de nota fundamental, octavas, cuartas y demás intervalos musicales, como el que se muestra en el espectrograma de la Figura 9. En la presentación se decide reducir la carga cognitiva, dado que la explicación completa del sonido producido por el tubo corrugado es más complicada, como se muestra en la Figura 10, donde se expone el periodograma que resulta del archivo de audio grabado. Es la gráfica en decibeles de la transformada discreta de Fourier de la señal de audio.

Las Figuras 9 y 10 muestran que el contenido armónico del sonido producido por la agitación a cierta rapidez del tubo corrugado es un tanto complicado. Sin embargo, la Figura 10 muestra también una frecuencia que sobresale de las demás (a unos 650 Hz), por lo que efectivamente se puede simplificar la explicación al decir que se emite una nota en vez de que se tiene la nota con contenido armónico que le da el timbre al sonido del tubo corrugado.

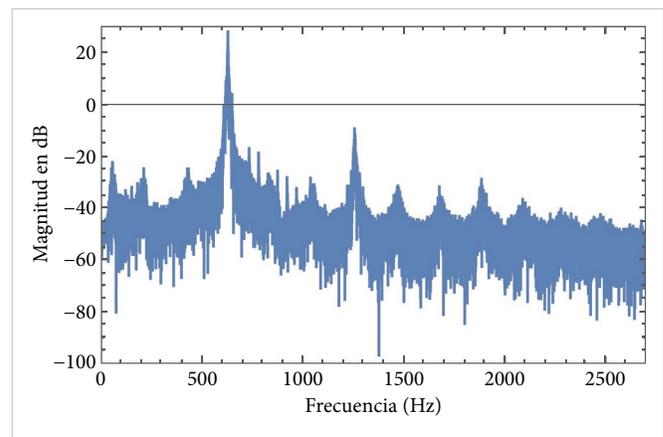


Figura 10. Periodograma del tubo corrugado usado en la demostración de sonido. Imagen propia.

Como se discutió en el experimento del tubo corrugado, las notas musicales pueden ser una estrategia didáctica para presentar otros conceptos, tales como el sonido producido por los tubos de resonancia llamados comercialmente *boomwhackers*, los cuales son un set de tubos de plástico flexibles de ciertas longitudes, pero del mismo diámetro, de tal forma que se tenga una escala musical completa, como la de do mayor usada en las demostraciones de El Circo de la Física. Ruiz [18] trata algunos conceptos sobre la matemática de las escalas musicales producidas por los *boomwhackers*.



Figura 11. Los tubos de resonancia en acción. Imagen propia.

De la misma manera que en el caso del tubo corrugado, la demostración comienza presentándole los tubos de resonancia al público y al cuestionarles sobre el mecanismo para producir sonido las respuestas usuales son que se gira de la misma manera en que se hace con el tubo corrugado. Se invita al grupo a intentarlo y descubren que no funciona. En ese momento es común que lo golpeen contra algún objeto, por lo que producen una nota de acuerdo con la longitud del tubo.

La dinámica de los *boomwhackers* consiste en tener ocho participantes para cada nota de la escala de do mayor. La actividad consiste en golpear el tubo contra la mano para producir la escala musical.

Es común explorar los conceptos de intervalos, escalas o acordes producidos al golpear los tubos que corresponden a las notas de do, mi y sol para producir el acorde de do mayor. Con algo de práctica, los *boomwhackers* son usados para tocar alguna pieza sencilla, en el tono de do mayor o en cualquier otro si se tienen tubos con diversas afinaciones. Uno de los proyectos pendientes de El Circo de la Física es montar una presentación en la que se use un mayor número de tubos con el objetivo de poder tocar una pieza de dificultad moderada.

Otra de las demostraciones comunes sobre sonido es la famosa placa de Chladni. A lo largo de los años se han usados diversas versiones, comenzando con una simple placa cuadrada metálica perforada en el centro para sujetarla firmemente a un soporte. Se frota con un arco de cello alguna de las orillas y se producen notas debido a la resonancia de la placa. Para visualizar el efecto, se

espolvorea sal o algo similar sobre la placa para que se acumule en los nodos. Es un experimento que siempre llama la atención, pero que requiere algo de práctica.

Los patrones de Chladni de la membrana vibrante o de la placa del experimento se obtienen de la solución de la ecuación de onda para una región. Claro está, los detalles de la solución de la ecuación diferencial escapan a los objetivos de El Circo de la Física y son quizá aptos solamente para estudiantes de nivel licenciatura. La demostración de Chladni pudiera ser incluso más complicada si se usara una placa de forma irregular; en [19] se muestra un método numérico para obtener las soluciones de la ecuación diferencial y para visualizar los modos de vibración de placas de forma irregular.

Otra versión más sencilla de demostrar, pero que requiere de aparatos más sofisticados que un arco de cello, consiste en emplear un generador de ondas y un oscilador mecánico. Se requiere simplemente encontrar las frecuencias de resonancia para el arreglo particular de la placa. Se pueden usar ambas versiones del experimento de la placa de Chladni, pero, al igual que en cualquiera de los experimentos y demostraciones, se invita al público a que intente reproducirlos en casa, en concordancia con la estimulación de las capacidades del pensamiento científico-imaginativo.

Un uso alternativo a la demostración de la placa de Chladni es utilizar un oscilador mecánico con una cuerda elástica. Junto con el uso de un estroboscopio, por lo que se requiere un lugar con poca luz, se puede mostrar al público los conceptos de ondas estacionarias en una cuerda.

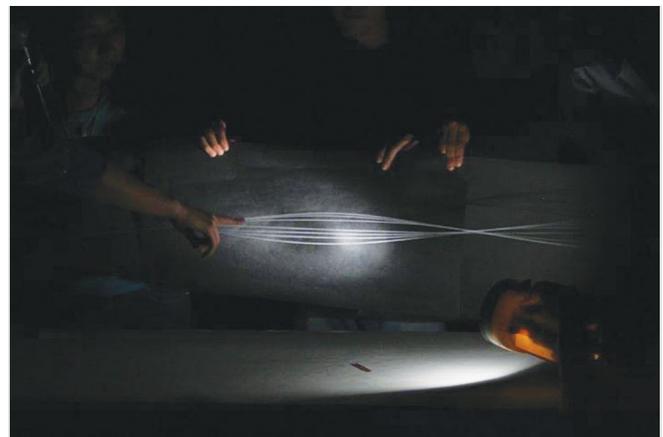


Figura 12. Demostración de ondas estacionarias con el uso de una lámpara estroboscópica. Imagen propia.

Se suele terminar la sección de experimentos de sonido con el relacionado a la producción de las llamadas figuras de Lissajous, las cuales son ampliamente conocidas; en <sup>[20]</sup> se discute un diseño de un aparato que permite producir estas curvas usando cañas de instrumentos musicales en vez de diapasones o arco de violín.

Originalmente, en El Circo de la Física el experimento de las curvas de Lissajous se montaba con dos bocinas colocadas de manera vertical sobre algunos soportes. Cerca de estas y frente a ellas se sujetan dos espejos de tal forma que uno pueda vibrar verticalmente y el otro horizontalmente y un generador de ondas conectado a un amplificador hacía vibrar los espejos. Se colocaba un láser de tal forma que el haz incidía sobre ambos espejos y hacía una pantalla, formando imágenes de acuerdo con la frecuencia producida en un generador de señales.

Una versión actual mucho más sencilla de montar consiste en poner una bocina inalámbrica dentro de un plato hondo y sobre este se coloca un globo a manera de membrana vibrante. El sonido producido por un generador de señales en una aplicación de dispositivo móvil puede hacer vibrar la membrana. Aprovechando esto, se pega un pedazo de espejo sobre el cual incide un láser que se refleja hacia una pantalla. El efecto es muy llamativo, sobre todo si se usa un láser verde. Las características del sonido son comúnmente exploradas con música reproducida en el dispositivo móvil.

Frecuentemente se usa música de cello, cuyas frecuencias son adecuadas para producir una resonancia significativa en el espejo, de acuerdo con la frecuencia y volumen de las notas musicales. Suele hacerse la demostración con el Preludio no. 1 en Sol Mayor de Bach por dos motivos: la pieza resulta familiar (y no es muy larga) y se aprovecha una vez más la asociación positiva que se tiene con respecto a la pieza musical para presentar los conceptos de resonancia, reflexión de la luz y figuras que son producidas por la vibración de la membrana. La pieza resulta también efectiva en la demostración dada la sonoridad del cello, que logra producir patrones llamativos en el experimento. Es un ejemplo donde el arte directamente está asociado a la física. Claro está, se usan diversos géneros musicales para hacer la demostración. La respuesta del público quizá no puede ser mejor; usualmente aplauden al terminar la pieza.

La versión del experimento con música es un ejemplo del cómo la tecnología ha facilitado el montaje y la pre-

sentación de algunas de las demostraciones de El Circo de la Física. Mientras que hace dos décadas se necesitaba un amplificador de sonido y bocinas, además de un generador de frecuencias, ahora se usa la tecnología *bluetooth* y las aplicaciones de generadores de onda o de simuladores de instrumentos musicales de los teléfonos inteligentes para facilitar el montaje del experimento, a la vez que se simplifican los requerimientos materiales para que el público pueda intentar reproducir las demostraciones.

La analogía directa con las notas musicales producidas en el tubo corrugado y en los tubos de resonancia y el uso de música clásica, o de cualquier otro género, está de acuerdo con el concepto general de las actividades de El Circo de la Física: aprovechar las asociaciones positivas que el público pueda tener acerca del arte y de la música como medios introductorios en la presentación de conceptos de la física.

#### D. PRESIÓN

Ciertamente no todos los experimentos que se pueden desarrollar como parte de las actividades de El Circo de la Física pueden asociarse directamente a actividades de índole artístico. Sin embargo, no dejan de ser experimentos y demostraciones llamativos. Uno de estos casos es cuando se aborda el tema de presión atmosférica.

Originalmente, los experimentos sobre este tema se hacían siempre usando una campana y una bomba de vacío, lo cual continúa haciéndose, pero actualmente se cuenta con un medio mucho más sencillo de adquirir: se trata de un vaso (acrílico o de vidrio) con tapadera al cual se le puede extraer aire con una bomba manual. Es un recipiente que se usa para conservas y a pesar de ser comparativamente más pequeño que la campana de vacío, se puede colocar un globo un poco inflado dentro de él para luego extraer el aire. Si la edad promedio del público lo permite, entonces se puede hacer la actividad a manera de truco de magia y la dinámica podría consistir en preguntarle a los asistentes qué es lo que se debe hacer para inflar un globo y cómo puede inflarse al que ya se le ha hecho un nudo. Los resultados de la demostración, aunque se trate de una sencilla aplicación del concepto de presión atmosférica, no deja de ser sorprendente. De la misma manera se pueden colocar unos cuantos bombones para expandir su volumen dada la presión menor en el interior del vaso.

Una vez que se presentan las ideas básicas de la presión atmosférica, se puede abordar el tema de la presión de una manera más general. Se puede iniciar con una tabla con un solo clavo y un globo inflado. Al preguntar qué pasa si se pincha el globo con el clavo, la respuesta invariablemente siempre es la misma: el globo debe reventarse. Luego de esto, se usa una tabla de las mismas dimensiones, pero ahora con muchos clavos colocados de manera ordenada a manera de mini cama de clavos. Se hace la misma pregunta al público y muy comúnmente se tienen la respuesta de que nuevamente se va a reventar. Para sorpresa del público, el globo puede presionarse fuertemente sobre los clavos y no se revienta, como es sabido. Igualmente, es una demostración sencilla que permite hablar de fuerza distribuida en un área determinada.



Figura 13. Demostración con la cama de clavos pequeña y globos. Imagen propia.

A lo largo de los años, la cama de clavos se ha usado para cerrar la función de El Circo. Al introducir la demostración, se menciona los llamados faquires y acto seguido se presenta al público una cama de clavos fabricada por los presentadores. Se hace la analogía con lo que pasó con la mini cama de clavos y el globo y esto ayuda a entender por qué una persona que se recuesta sobre la cama de clavos no debe sufrir daño alguno. Esta es una demostración que se hace con ciertas reservas; si se tiene la posibilidad de que algunos asistentes se puedan lastimar, aunque sea leve, no se permite que se recuesten sobre la cama de clavos. Debido a las precauciones tomadas a lo largo de los años, la demostración se ha hecho de manera segura con participantes de todas las edades.

Cuando las presentaciones son a nivel local, la cama de clavos es transportada sin problemas. Sin embargo, para cuando se tiene una función programada en algún otro estado, dependiendo del lugar, se ha pedido que la sede fabrique una cama de clavos según algunas especificaciones sencillas, lo cual es relativamente fácil y de bajo costo. Esto se hizo en la gira de El Circo de la Física en el estado de Tamaulipas en 2017.

Cuando se han presentado algunas demostraciones con globos que se pueden reventar con la cama de clavos, son válidas algunas aclaraciones respecto al desarrollo de todos los experimentos. Es de suma importancia conocer algunos detalles previos de quiénes serán los asistentes y de cuáles son las condiciones del lugar de la presentación. Esto se debe a que quizá el sonido de un globo que se reviente asuste a algún miembro del grupo de participantes. Incluso, la misma anticipación de si se va a reventar o no puede causar ansiedad. De la misma manera, tal vez las luces o los láseres puedan generar cierta inquietud. Se procura iniciar la función con la mejor información sobre el público que la sede pueda proporcionar antes de las presentaciones.

Para el desarrollo óptimo de las actividades, es de suma relevancia saber si hay miembros del público con alguna capacidad diferente física, sensorial o intelectual para saber qué lenguaje usar y cómo hacer que todos los asistentes tengan la misma gran experiencia de vivir la física a través de las demostraciones y experimentos, como los que se han llevado a cabo por más de dos décadas en las actividades de El Circo de la Física. En este sentido, la American Association of Physics Teachers (AAPT) ha hecho un estudio de inclusión en STEM, considerando factores como sexo, raza y origen étnico, y se hacen varias recomendaciones dirigidas a la AAPT con el objetivo de identificar estrategias dirigidas a mejorar la inclusión y diversidad en STEM en todos los campos, desde el salón de clase hasta el ambiente profesional y laboral <sup>[21]</sup>.

#### IV. CONCLUSIONES

Como se detalla en este trabajo, El Circo de la Física propone no solamente una serie de experimentos y demostraciones, sino además una manera de hacer que el público los disfrute y aprenda. La analogía con la educación del arte es bastante adecuada, ya que permite al grupo participante el tener asociaciones positivas del arte hacia los conceptos de la física. Uno de los objetivos

fundamentales de las actividades es acercar el conocimiento científico, de una manera lúdica, a públicos de todas las edades y despertar la curiosidad por la ciencia, especialmente en los niños.

La propuesta para el desarrollo de las actividades de divulgación, como las demostraciones y experimentos presentadas en este trabajo, puede basarse en la estimulación de las capacidades imaginativas más allá de simplemente concretarse a dar definiciones a través de ejemplos. En este sentido, las actividades hacen patente que en los participantes se pueden ejercitar o estimular diversas capacidades como la observación, el cuestionamiento, la formación de patrones, hacer conexiones entre los diversos conceptos e ideas y emprender acciones poniendo a prueba sus ideas.

Estas consideraciones se basan en la filosofía de LCE. Así pues, como proyectos a futuro se tiene precisamente la medición el impacto de las demostraciones y experimentos en el público. Típicamente, en las funciones de El Circo de la Física se ha vuelto complicado implementar algunas estrategias para valorar el efecto de las actividades. Ya se ha pensado en poner pre exámenes para ser comparados con exámenes de salida. Esto se puede hacer de manera cualitativa en el caso de grupos pequeños y pruebas similares podrían ser diseñadas para las funciones con un mayor número de asistentes con el fin de tener valoraciones cuantitativas.

La situación actual de la pandemia del COVID-19 llevó a cancelar todas las presentaciones programadas en 2020 y algunas de 2021, por lo que no se tuvo la oportunidad de empezar a hacer las mediaciones de valoración. Por otro lado, una vez que la situación mejore, se podrá empezar a aplicar cuestionarios diseñados a manera de cuadernillos de trabajo, con hojas que se puedan desprender, para ser usadas con instrumentos de medición y valoración de los experimentos de acuerdo con el tema tratado en la demostración. Los instrumentos de valoración pueden ser fácilmente integrados a los cuadernillos que ya se reparten en programas de divulgación. Se espera tener resultados favorables a partir de las mediciones que se hagan en las funciones de El Circo de la Física a partir de 2022.

Otra de las tareas pendientes en el desarrollo de las actividades de El Circo de la Física es que las funciones sean inclusivas para todo público. Como se ha mencionado, en la enseñanza se deben establecer estrategias que in-

volucren el vocabulario accesible para todos, además de las que consideren a personas con algunas capacidades físicas o cognitivas diferentes. Es por esto que se estima que las diversas formas de expresión corporal y de comunicación pueden ser de beneficio en estos casos.

Cabe señalar que parte del éxito de las actividades dependen de la capacidad de adaptarse a las circunstancias y a las nuevas tecnologías. Los experimentos y su presentación han ido evolucionado con el paso de los años para hacerlos más llamativos y fáciles de entender, siempre ofreciendo la oportunidad de que cualquier familia o escuela pueda reproducir alguna versión de lo que se les presenta. En este sentido, El Circo de la Física es una estrategia de divulgación científica que habrá de seguir contribuyendo en la formación de los futuros científicos de nuestro país.

## REFERENCIAS

- [1] “UCSB Physics Circus”. UCSB.edu. <https://circus.physics.ucsb.edu> (acceso: abr. 1, 2022).
- [2] “The Physics Circus”. UTexas.edu. <https://web2.ph.utexas.edu/~circus/> (acceso: abr. 1, 2022).
- [3] “Physics Circus”. Utrgv.edu. <https://www.utrgv.edu/physics/outreach/circus/index.htm> (acceso: abr. 1, 2022).
- [4] “U of M Physics Circus brings large-scale stunts and physics fun to the public Jan. 14”. Umn.edu. <https://cse.umn.edu/college/news/u-m-physics-circus-brings-large-scale-stunts-and-physics-fun-public-jan-14> (acceso: abr. 1, 2022).
- [5] J. W. Walker, *The Flying Circus of Physics*, 2.<sup>a</sup> ed. Hoboken, Estados Unidos: John Wiley & Sons, 2007.
- [6] “Lincoln Center”. Aboutlincolncenter.org. <http://www.aboutlincolncenter.org/education-community/lincoln-center-education> (acceso: abr. 1, 2022).
- [7] “The AMS Four Year Experience”. Newvisions.org. <https://www.newvisions.org/ams/pages/the-ams-four-year-experience> (acceso: abr. 1, 2022).
- [8] J. van der Veen, “Draw Your Physics Homework? Art as a Path to Understanding in Physics Teaching”, *Am. Educ. Res. J.*, vol. 49, no. 356, 2012, doi: 10.3102/0002831211435521.

- [9] L. Colletti, “Teaching the Nature of Physics Through Art: a New Art of Teaching”, *Phys. Ed.*, vol. 53, no. 1, 2017.
- [10] National Research Council (U.S.), *Physics in a new era: a overview*. Washington, D.C., Estados Unidos: National Academy Press, 2011.
- [11] G. White, “Teaching: Art, craft, science? Yes!”, *Phys. Teach.*, vol. 52, no. 328, 2014, doi: 10.1119/1.4893083.
- [12] “Lincoln Center Institute”. Wordpress.org. <https://imaginationnow.files.wordpress.com/2011/03/capacities.pdf> (acceso: abr. 1, 2022).
- [13] “Lincoln Center Education Teacher Guide”. PBS.org. [https://bento.cdn.pbs.org/hostedbento-prod/filer\\_public/live\\_lincoln\\_center/2018-19\\_Season/Pipeline\\_Education\\_Guide.pdf](https://bento.cdn.pbs.org/hostedbento-prod/filer_public/live_lincoln_center/2018-19_Season/Pipeline_Education_Guide.pdf) (acceso: abr. 1, 2022).
- [14] J. R. Lakowicz, *Principles of fluorescence spectroscopy*. Nueva York, Estados Unidos: Plenum Press, 1983.
- [15] F. S. Crawford, “Singing Corrugated Pipes”, *Am. J. Phys.*, vol. 42, no. 278, 1974, doi: 10.1119/1.17600.
- [16] M. J. Ruiz y R. Berls, “Vacuum cleaner isolates over 12 harmonic in the corrugated whistling tube”, *Phys. Ed.*, vol. 55, no. 3, 2020, doi: 10.1088/1361-6552/ab753d.
- [17] S. Serafin y J. Kojs, “The voice of the dragon: a physical model of a rotating corrugated tube”, en *Proc. of the 6th Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-03)*, Londres, Inglaterra, sept. 8-11, 2003.
- [18] M. J. Ruiz, “Boomwhackers and End-Pipe Corrections”, *Phys. Teach.*, vol. 52, no. 73, 2014, doi: 10.1119/1.4862106.
- [19] T. Müller, “Numerical Chladni figures”, *Eur. J. Phys.*, vol. 34, 2013, doi: 10.1088/0143-0807/34/4/1067.
- [20] J. Dixon Mann, “An Improved Method of Projecting Lissajous’ Figures on the Screen”, *Nature*, vol. 18, 1878, doi: 10.1038/018024a0.
- [21] E.A. Cech y T. Waidzunas, “STEM Inclusion Study”. APS.org, <https://www.aps.org/publications/apsnews/201806/upload/STEM-Inclusion-Study-Climate-Report.pdf> (acceso: abr. 1, 2022).

# Proyecto STEM sobre la generación de energía eléctrica en el río Amajac usando turbinas

## *STEM project on the feasibility of generating electricity in the Amajac river using turbines*

Carmen del Pilar Suárez Rodríguez<sup>1</sup>✉, Nicolas Martinez Ortiz<sup>1</sup>, Angel Ossiel Perez Santiago<sup>1</sup>, Raúl Castillo Meraz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Coordinación Académica Región Huasteca Sur / Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.

### RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo identificar la factibilidad de obtener energía eléctrica de una corriente de agua para cubrir necesidades básicas de habitantes de comunidades rurales y remotas de Tamazunchale, San Luis Potosí, México, en la ribera del río Amajac. El método de solución de problemas fue el círculo de Deming. Se llevó a cabo una revisión bibliográfica de las turbinas hidráulicas existentes en el mercado y se identificaron las variables relacionadas con la generación de energía. Asimismo, se identificó cuál es la turbina más adecuada y el sistema de mayor eficiencia para las condiciones de esa parte de México y se recolectaron datos en tres localidades diferentes (Tlapexhuaca Tacial, Taman y Vega Larga) utilizando el método del flotador para conocer el caudal y cálculos respectivos. Se encontró que la localidad de Tlapexhuaca Tacial tiene la mayor velocidad de corriente de río con una energía cinética promedio de 3847 Joules, por lo que en trabajos futuros se trabajará en el diseño de la turbina óptima.

**PALABRAS CLAVE:** STEM; energía renovable; zonas rurales; Huasteca; energía eléctrica.

### ABSTRACT

The objective of this research is to identify the feasibility of obtaining electrical energy from a water current to cover the basic needs of the inhabitants of rural and remote communities of Tamazunchale, near the banks of the Amajac River located in San Luis Potosi, Mexico. The problem solving method was the Deming circle. A bibliographic review of the existing hydraulic turbines in the market was carried out and the variables related to energy generation were identified. Likewise, it is determined what type of turbine and hydraulic energy system is more efficient and adequate in this region. Measurements and data collection were carried out in three locations (Tlapexhuaca Tacial, Taman, and Vega Larga) using the floater method to know the flow and respective calculations. It was found that the locality of Tacial has the highest speed of the river current with an average kinetic energy of 3,847 Joules, so in future assignments, we will work on the design of the optimal turbine for this task.

**KEYWORDS:** STEM; renewable energy; rural zones; Huasteca; electric power.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Carmen del Pilar Suárez Rodríguez  
**INSTITUCIÓN:** Coordinación Académica Región Huasteca Sur /  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
**DIRECCIÓN:** Km. 5 Carretera Tamazunchale-San Martín, C. P.  
79960, Tamazunchale, San Luis Potosí, México  
**CORREO ELECTRÓNICO:** pilar.suarez@uaslp.mx

**Fecha de recepción:** 26 de junio de 2022. **Fecha de aceptación:**  
30 de agosto de 2022. **Fecha de publicación:** 31 de agosto de  
2022.



## I. INTRODUCCIÓN

La energía eléctrica es un motor para el desarrollo económico y de bienestar de los países, ya que está presente en la producción, transporte de productos y personas, comunicación, educación, seguridad, salud, entretenimiento, es decir, en todos los aspectos de la vida humana [1], especialmente en esta época donde la automatización de los procesos se ha incrementado en los últimos años desde la invención de la electricidad y la electrónica. La electricidad se considera una tecnología disruptiva, ya que cambió por completo el comportamiento social. Desafortunadamente, el acceso a la energía eléctrica no es equitativo; 789 millones de personas no cuentan con ella, siendo un factor que disminuye las oportunidades de desarrollo [2]. México y la región huasteca no son la excepción.

La generación de la energía ha sido obtenida principalmente de los combustibles fósiles, su consumo se asocia a la contaminación ambiental y es una de las causas del cambio climático [3], aunque con la pandemia de COVID-19, en 2020 hubo una disminución del consumo de energía en el mundo del 4.5 %, la caída más grande desde 1945, según el 70.º Informe Estadístico de la Energía Mundial:

La caída en el consumo de energía fue impulsada principalmente por el petróleo, que contribuyó con casi las tres cuartas partes de la caída neta, aunque el gas natural y el carbón también experimentaron caídas significativas. La energía eólica, solar e hidroeléctrica crecieron a pesar de la caída en la demanda general de energía. Por países, EE. UU., India y Rusia contribuyeron con las mayores caídas en el consumo de energía. China registró el mayor aumento (2.1 %), uno de los pocos países donde la demanda de energía creció el año pasado [2].

Se concluye el informe citado con la pregunta: “¿Podrá la energía renovable mantener las rápidas tasas de crecimiento observadas en los últimos cinco años?”, a lo que los autores de este artículo agregan: ¿Qué acciones están contempladas para su implementación de energías renovables en comunidades rurales y remotas de los países más pobres?, que permitan cumplir con el objetivo 7, “Energía asequible y no contaminante”, de la agenda 2030 [3].

Para lo anterior, se requiere contar con proyectos de reducción de la pobreza y de desarrollo de infraestruc-

tura rural. Afortunadamente, desde los gobiernos y el empresariado existen iniciativas que buscan disminuir esta brecha de desigualdad, como el proyecto “redes de enjambre” en África [4], “Granjas solares” [5] y “Luces de esperanza” en Tamazunchale [6], entre otros. Pero resulta importante la participación de la academia en la gestión de estos proyectos, específicamente aquellos asociados a la formación de profesionales con una visión que apueste por la sustentabilidad.

Al egresar de la carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica de la Coordinación Académica de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, de acuerdo con su modelo educativo y plan curricular de la carrera, los nuevos profesionistas deben desarrollar como competencia la capacidad de aplicar los conocimientos científicos a las necesidades y problemáticas que prevalecen en el contexto biosocial, cercano a la universidad [7]. En este sentido, durante su formación se hace relevante promover su participación en la solución de problemas locales a través de proyectos [8].

El enfoque STEM (acrónimo en inglés de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), además de promover el conocimiento de las ciencias de manera integrada, busca formar ciudadanos responsables de su entorno, con habilidades para tomar decisiones argumentadas y con la capacidad de resolver problemas reales bajo un enfoque que asegure los derechos humanos y los de la naturaleza, y puede contribuir al trabajo voluntario, informal y doméstico al mejorar el conocimiento sobre uso eficiente de los recursos, economía y salud, entre otros. Es decir, los problemas de una comunidad pueden ser analizados desde una perspectiva transdisciplinaria, integral y con la suma de todos los esfuerzos.

Con esta perspectiva, en este trabajo se analiza la posibilidad de proveer de energía eléctrica para cubrir necesidades básicas a habitantes de comunidades rurales y remotas a partir de la corriente de un río, por lo que se realizó un análisis de factibilidad sobre la generación de energía eléctrica en el río Amajac en tres comunidades de Tamazunchale, San Luis Potosí, México.

### MARCO TEÓRICO

Las hidroeléctricas crecieron como una forma de atender las necesidades energéticas de los países, sin embargo, pudieran presentar, junto con sus beneficios, algunos prejuicios en el medio ambiente y las activi-

dades humanas <sup>[9]</sup>, especialmente cuando son macro-proyectos.

La energía hidráulica se basa principalmente en el uso de una turbina, que es una máquina que transforma la energía cinética y potencial del agua de una fuente (como el océano, una cascada, un río) en energía mecánica de rotación utilizada para generar electricidad a través de un acoplamiento de una turbina y un generador. La caída en una cascada, o simplemente de la corriente, hace que el generador gire produciendo energía eléctrica con una eficiencia alta, de hasta el 90 % <sup>[10]</sup>, sin afectar la corriente natural del río.

Las turbinas hidrocínicas son fundamentales para el proceso, por lo que con el paso del tiempo han evolucionado la manera de obtener la máxima energía del río a partir del movimiento del agua en donde no existe una caída natural o artificial. Esto abre la posibilidad de que sean implementadas a menor costo en diferentes zonas, presentando una afectación grande al medio ambiente.

Para aprovechar el flujo del río es necesario tener información sobre variables como el caudal y la profundidad, además de otros comportamientos. Sin esta información no es posible implementar un generador eléctrico que se utilice para producir energía eléctrica limpia. Por tanto, se requiere conocer las variables involucradas para definir el tipo de la turbina hidráulica adecuada a las condiciones del cuerpo de agua.

En la literatura se reportan trabajos donde se analizan desde la factibilidad hasta la evaluación de sistemas creados en contextos universitarios. Pérez Martínez *et al.* <sup>[11]</sup> concluyen sobre la importancia de realizar simulaciones para el diseño de las turbinas, para determinar la factibilidad de implementación de este tipo de tecnología en Cuba. En Perú, como un trabajo de titulación de licenciatura, se realizó un estudio técnico a nivel de prefactibilidad de un proyecto de generación hidroeléctrica <sup>[12]</sup>. En Ecuador, como tesis de la carrera de Ingeniería Eléctrica, se presentó un estudio de un análisis de la hidrología y topología del lugar de incidencia, se midió el caudal y la caída del agua para producir energía eléctrica <sup>[13]</sup>. Se presentan diseños y evaluación de diferentes tipos de turbinas en <sup>[14]</sup>, <sup>[15]</sup>, los cuales apuntan a que otros autores consideran relevante este tipo de estudios, a pesar de que la energía eléctrica se produce con empresas transnacionales.

El nombre del municipio de Tamazunchale, ubicado en la Huasteca potosina, proviene del huasteco *Tam Uxum Ts'alej* y significa "lugar donde proviene la mujer gobernadora". Esta demarcación y su cabecera municipal, ambas del mismo nombre, están ubicadas en la Sierra Madre Oriental, coordenadas geográficas de 98° 48' de longitud oeste y 21° 16' de latitud norte, con una altura cercana al nivel del mar. Es una zona montañosa, de clima semicálido húmedo, donde afluyen los ríos Moctezuma, Claro y Amajac, y en la que el 74.7 % de la población vive sin acceso a servicios básicos de vivienda, entre ellos la electricidad.

En este contexto, en el municipio de Tamazunchale existen comunidades circunvecinas que colindan o están en el cruce de un río y que no cuentan con un suministro de energía eléctrica adecuada, a pesar de que gran parte de la población se queja de la falta de este servicio. De manera similar, la falta de energía afecta a la economía y a la salud de los habitantes de dichas comunidades debido a que no pueden mantener sus alimentos en conservación, sobre todo si uno de ellos se encuentra grave de salud y requiere la utilización de equipos que requieran ser energizados.

En este trabajo, resultado de las prácticas profesionales de dos estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica realizadas de febrero a mayo de 2022, se explora si las condiciones del río Amajac, en las inmediaciones de Tamazunchale, son aptas para colocar una turbina que dote de energía a pequeñas comunidades rurales que no cuentan con el servicio y que sirva para satisfacer algunas necesidades básicas. Posteriormente, se pretende explorar la factibilidad económica y ambiental para la construcción de estas.

En la primera etapa se realizó un estudio de las variables que intervienen en el movimiento de un fluido, como lo es la corriente de un río, para lo cual se describen a continuación los conceptos básicos del tema.

A pesar de que se sabe que a lo largo del año existen épocas de sequía y de lluvia que influyen en la morfología del río, la primera pregunta es acerca de conocer la cantidad de agua que circula por un punto dado del río por unidad de tiempo, lo cual se define como caudal y se relaciona con el flujo volumétrico o volumen que pasa por un área determinada en un tiempo dado. De la mecánica de fluidos <sup>[16]</sup> se obtiene la Ecuación (1) que permite calcular el caudal:

$$Q = Av \quad (1)$$

donde:

$Q$  = caudal ( $m^3/s$ )

$A$  = área de la sección transversal ( $m^2$ )

$v$  = velocidad del fluido ( $m/s$ )

Las condiciones del río no son uniformes ni la profundidad ni la velocidad, ya que el cauce no es homogéneo. Por simplicidad, se hacen suposiciones que simplifican la modelación matemática. Aquí se considera que no hay pérdidas por fricción del fluido respecto a las orillas del río y que no hay turbulencias, es decir, se considera un flujo laminar [16].

Por otra parte, también se representa al flujo de agua del río como si se moviera a través de una tubería rectangular como se muestra en la Figura 1.

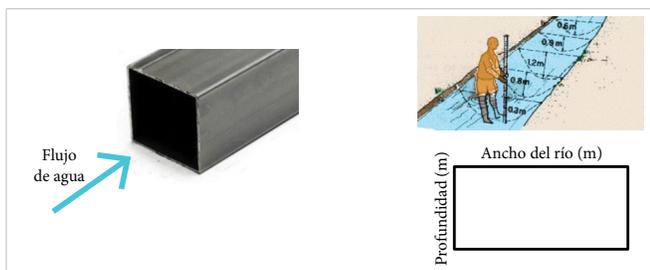


Figura 1. Flujo de agua en un río considerado como una tubería rectangular. Basada en [10].

Por tanto, las variables independientes de interés para este trabajo son: velocidad del fluido (agua dulce), profundidad de río, ancho del río y área de la sección transversal la cual se puede calcular multiplicando el ancho del río por su profundidad. La Ecuación (2) permite calcular el caudal considerando el volumen de una porción de agua por unidad de tiempo:

$$Q = \frac{V}{t} \quad (2)$$

donde:

$Q$  = caudal ( $m^3/s$ )

$V$  = volumen ( $m^3$ )

$t$  = tiempo (s)

La Ecuación (3) permite calcular la masa de agua que fluye por el área de la sección transversal:

$$m = \rho V \quad (3)$$

donde:

$\rho$  = densidad del agua dulce  $1000 \text{ kg}/m^3$

$V$  = volumen ( $m^3$ )

$m$  = masa (kg)

Si se despeja el volumen de la Ecuación (2) y se sustituye en la (3), se llega a la siguiente:

$$m = \rho Q t \quad (4)$$

Si se sustituye la Ecuación (1) en la (4), se obtiene:

$$m = \rho A v t \quad (5)$$

Dado que ya se conoce la densidad del agua dulce, y si se considera  $t = 1 \text{ s}$ , entonces solo resta conocer el área de la sección transversal del río y su velocidad. Por último, según la mecánica clásica [17], la energía cinética de cualquier objeto en movimiento a velocidades inferiores a la velocidad de la luz está dada por la Ecuación (6):

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (6)$$

donde:

$E_k$  = energía cinética (Joules)

$m$  = masa (kg)

$v$  = velocidad ( $m/s$ )

Por tanto, se puede calcular la energía cinética que lleva el río y conocer la cantidad de energía eléctrica que podría producirse durante el proceso de transformación.

## II. METODOLOGÍA

Se empleó el Ciclo de Resolución de Problemas de Deming o PDCA (del inglés Plan, Do, Check, and Act/Adjust) para poder definir las actividades a realizar durante el desarrollo del proyecto, las cuales se describen a continuación.

### PLANIFICAR

El proyecto se llevó a cabo de diciembre del 2021 a mayo del 2022 como prácticas profesionales de dos estudiantes que cursaban el décimo semestre del programa de Ingeniería Mecánica Eléctrica. Cada mes se le dio seguimiento a sus avances.

Se hizo la revisión de la literatura para definir los alcances del trabajo y la identificación de las variables a

considerar para seleccionar las comunidades y posteriormente las variables a medir. También se buscó información sobre los diferentes tipos de turbinas. De los ríos de Tamazunchale, Claro Amajac y Moctezuma, se seleccionó el Amajac, debido a que a lo largo de él hay más comunidades y mantiene un flujo más estable durante todo el año. Se hizo un recorrido por el río para identificar las comunidades donde se haría la evaluación.

### HACER

Se seleccionaron tres comunidades en Tamazunchale: Tlapexhuaca Tacial, Taman y Vega Larga. Para realizar trabajos se debe solicitar autorización a las autoridades debido a que la gente de ahí no ve de buena forma que alguien llegue y empiece hacer cosas en el río. Primero se visitó primero la comunidad de Vega Larga en busca del delegado para solicitar permiso para realizar mediciones de las variables del río. Este accedió, proporcionó sus datos generales y pidió que se redactara un documento para notificar al juez de la misma comunidad.

Lo mismo ocurrió en los otros lugares. Una vez solicitados los oficios en la universidad, se comenzó el trabajo de campo. Se visitó cada uno de los lugares elegidos para identificar el tramo adecuado en el cual tomar las mediciones (profundidad del río, caudal, velocidad), tomando en cuenta la recomendación de las metodologías, los recursos disponibles, los riesgos y los materiales.

En esta etapa también se hizo una revisión de los caudalímetros existentes en la bibliografía, pero debido a los costos no se pudo adquirir uno, por lo que se buscó un método que se pudiera hacer con materiales que se tuvieran al alcance. En el web de la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO, por sus siglas en inglés) <sup>[10]</sup> se encontró una tabla comparativa donde se muestran varios métodos de acuerdo con las características del río a evaluar y de ahí se seleccionó el método del flotador. La metodología se describe en la [Tabla 1](#). De acuerdo con la FAO, en lo que se refiere al método del flotador:

...se miden caudales de pequeños a grandes con mediana exactitud. Conviene emplearlo más en arroyos de agua tranquila y durante períodos de buen tiempo, porque si hay mucho viento y se altera la superficie del agua, el flotador puede no moverse a la velocidad normal <sup>[10]</sup>.

### VERIFICAR

Una vez identificado el método y conseguido el material, se procedió a realizar las mediciones, las cuales se repitieron tres veces en cada tramo y con ellas se elaboraron las tablas de datos y los cálculos. El método para conocer la velocidad del río se describe en la [Tabla 1](#).

TABLA 1  
DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DEL FLOTADOR PARA MEDIR EL CAUDAL DEL RÍO. BASADA EN <sup>[10]</sup>

ETAPA	DESCRIPCIÓN
1	Flotadores: puede ser un trozo de madera o palo, o un envase de bebida que pueda flotar dejando la punta sobre la superficie del agua, para lo cual se coloca algún material (grava, arena, etc.) en el interior.
2	El lugar de medición: se identifica una parte del río que sea lo más recta y tranquila posible, sin plantas para que no se atore el flotador. En un trayecto de 10 m, se identifican el extremo inicial (punto A) y final (punto B).
3	La velocidad media: se suelta la botella antes del punto A, moviéndose con la corriente hacia el punto B. Desde la orilla se toma el tiempo que tarda en recorrer la distancia. Se repite al menos tres veces la medición. Se determina el promedio y el error de medición. Luego se usa la fórmula de rapidez media. Para estimar la velocidad del río, la rapidez obtenida debe multiplicarse por un factor de corrección de 0.85.

### ACTUAR

En esta última etapa se analizaron los resultados y posteriormente se hizo un análisis estadístico para conocer los valores promedio de estas mediciones. Se concluyó la factibilidad energética del lugar, así como el tipo de turbina hidráulica ideal para utilizarse en dicho lugar. Finalmente, se redactó el presente artículo.

## III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### CLASIFICACIÓN DE LAS TURBINAS HIDRÁULICAS

De acuerdo con <sup>[18]</sup>, las turbinas se clasifican como sigue:

- El grado de reactividad.
- La colocación del eje.
- La dirección en la que entra el agua.

El grado de reactividad determina cómo transforman la energía potencial en cinética. En la [Tabla 2](#) se hace una descripción de las turbinas y sus rodetes por su grado

de reactividad, asociado a la diferencia de la altura de presión con el rotor y su diferencia de energía. Se utiliza el grado de reactividad tanto en turbinas como en bombas.

TABLA 2  
DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DEL FLOTADOR PARA MEDIR EL CAUDAL DEL RÍO. BASADA EN <sup>[10]</sup>

GRADO DE REACTIVIDAD	TURBINA	CARACTERÍSTICAS
Turbinas de acción	Pelton	Se usa para caídas grandes de 50 a 400 m pero de bajo caudal (10 m <sup>3</sup> /s). En la circunferencia tiene palas el las que la acción del agua provoca el giro.
	Turgo	Inyección lateral es una adaptación de la Pelton, más económica, con velocidad más elevada y mayor capacidad de flujo.
	Ossberger (rueda hidráulica o <i>crossflow</i> )	Una de las más antiguas, de doble impulsión o de flujo cruzado. Los álabes se mueven en la dirección del flujo por la fuerza de arrastrada por el movimiento del agua, de poca pendiente, no requiere altura del río ya que toma el agua, la eleva y la deja caer, incrementando la energía cinética <sup>[20]</sup> .
Turbinas de reacción	Francis	De admisión total. Altura menos de 200 m, caudales entre 2 a 200 m <sup>3</sup> /s. El agua entra a un rodete con paletas. La fuerza, conforme avanza hacia la salida, va decreciendo debido a su diseño hidráulico. Mejora la potencia <sup>[19]</sup> .
	Kaplan	Salto de hasta 50 m, caudales de más de 15 m <sup>3</sup> /s. Cambia el ángulo de las cucharas durante su operación <sup>[20]</sup> .

En cuanto a la dirección en la que entra el flujo en el rodete, las turbinas se clasifican como axiales, radiales y mixtas.

Finalmente, las turbinas se clasifican de acuerdo a cómo se localiza el eje, como se discute a continuación.

*Turbinas de eje horizontal.* Las turbinas de flujo axial se clasifican en dos grupos, eje inclinado o eje recto u horizontal. Las primeras han sido diseñadas para pequeños ríos, las cuales son muy comunes en aplicaciones de energía en los ríos. Dentro de las turbinas de eje horizontal, el generador de la turbina puede estar, completamente sumergido, parcialmente sumergido, o fuera del

agua. En cuanto a diseño y concepto, tienen una gran similitud con los aerogeneradores que se utilizan hoy en día. Aunque también existen este tipo de turbinas en los ríos, la mayoría de las turbinas axiales se utilizan en corrientes marinas, las cuales suelen tener un amarre rígido o con configuraciones de generadores sumergidos.

*Turbinas de flujo cruzado.* Rotan perpendicularmente al flujo, no importando la dirección.

*Turbinas de eje vertical.* Se basan en la fuerza de sustentación y son complejas en su diseño.

### RECOLECCIÓN DE LOS DATOS

Para la medición de profundidad y ancho del río se utilizó una cinta métrica donde se obtuvieron distintos valores (Figura 2) y, posteriormente, se aplicó un análisis estadístico básico para el cálculo de valores medios y la desviación estándar.



Figura 2. Medición de profundidad y ancho del río.

Para la medición de la velocidad del río se utilizó un flotador de un determinado peso, el cual recorre una distancia conocida en línea recta en diferentes partes del río. Posteriormente se cronometró el tiempo que tardó dicho flotador en desplazarse del punto A al punto B y se aplicó la Ecuación (7).

$$rapidez = \frac{distancia}{tiempo} \quad (7)$$

Un ejemplo de la zona de medición se observa en la Figura 3.



Figura 3. Mediciones de campo en la comunidad de Vega Larga.

Esta sección contiene los hallazgos de la investigación y, por tanto, se incluyen los datos relacionados directamente con la respuesta a la pregunta de investigación. En primer lugar, se realizaron mediciones de campo en tres distintos puntos por donde cruza el río Amajac: Tacial, Tamán y Vega Larga, las cuales pertenecen al municipio de Tamazunchale.

Posteriormente, se aplicó análisis estadístico para obtener los valores medios de ancho y profundidad del río, velocidad y caudal.

Finalmente, con los resultados obtenidos, considerando una densidad del agua dulce de  $1000 \text{ kg/m}^3$ , se procedió a calcular la energía mecánica que lleva el río en cada comunidad.

#### RESULTADOS OBTENIDOS EN LA COMUNIDAD DE TACIAL

Los resultados obtenidos para esta comunidad son los mostrados en la [Tabla 3](#).

TABLA 3  
DATOS RECOLECTADOS EN LA COMUNIDAD DE TACIAL

PARÁMETRO	VALOR
Velocidad promedio del río (m/s)	1.24
Profundidad promedio del río (m)	0.57
Ancho del río (m)	7
Área promedio del río (m <sup>2</sup> )	4.0075
Caudal promedio (m <sup>3</sup> /s)	5.0045
Energía promedio (J)	3847

#### RESULTADOS OBTENIDOS EN LA COMUNIDAD DE VEGA LARGA

Los resultados obtenidos para esta comunidad son los mostrados en la [Tabla 4](#).

TABLA 4  
DATOS RECOLECTADOS EN LA COMUNIDAD DE VEGA LARGA

PARÁMETRO	VALOR
Velocidad promedio del río (m/s)	0.6369
Profundidad promedio del río (m)	0.5083
Ancho del río (m)	9.5
Área promedio del río (m <sup>2</sup> )	4.8291
Caudal promedio (m <sup>3</sup> /s)	3.0756
Energía promedio (J)	623.8

#### RESULTADOS OBTENIDOS EN LA COMUNIDAD DE TAMAN



Figura 4. Mediciones de campo en la comunidad de Taman.

Los resultados obtenidos para esta comunidad son los mostrados en la [Tabla 5](#).

TABLA 5  
DATOS RECOLECTADOS EN LA COMUNIDAD DE TAMAN

PARÁMETRO	VALOR
Velocidad promedio del río (m/s)	0.4506
Profundidad promedio del río (m)	0.3175
Ancho del río (m)	13.5
Área promedio del río (m <sup>2</sup> )	4.2862
Caudal promedio (m <sup>3</sup> /s)	1.9313
Energía promedio (J)	195.51

Por último, se realizaron tres tablas comparativas entre los diferentes tipos de turbinas hidráulicas para seleccionar la más adecuada de acuerdo con la zona de me-

dición, y los parámetros del número de palas, profundidad y revoluciones, las cuales se muestran en la [Tabla 6](#). La comparación con eficiencia, dimensiones, tipo de mantenimiento y velocidad de corriente se muestran en la [Tabla 7](#). Y en cuanto a los parámetros técnicos de operación, como la velocidad de rotación, facilidad de construcción, adaptación a ríos profundos, facilidad de conducción del generador, costos y adaptación a comunidades rurales, se considera en la [Tabla 8](#). Esta información será útil, cuando se desee seleccionar una turbina <sup>[19]</sup>.

TABLA 6  
COMPARACIÓN ENTRE TIPOS DE TURBINAS SUMERGIBLES

PARÁMETRO	I	II	III	IV	V	VI
Número mínimo de palas	4	4	3	3	3	4
Profundidad mínima requerida*	2.1	2.1	1.75	3	2.4	2.1
Revoluciones por minuto**	13.5	32	48	48	25.5	15

\*Medida en metros. \*\*A velocidad de 1 m/s. Tipo de turbinas: I = Darrieus vertical, II = Darrieus horizontal, III = Propeller inclinado, IV = Propeller horizontal, V = Propeller arrastrado, VI = Propeller sumergido.

TABLA 7  
COMPARACIÓN ENTRE TIPOS DE TURBINAS HIDROKINÉTICAS

PARÁMETRO	I	II	III	IV
Eficiencia	Media	Alta	Baja	Media
Dimensiones	Grande	Mediana	Mediana	Grande
Mantenimiento	Sencillo	Complejo	Complejo	Complejo
Velocidad*	0.2-2	0.6-1.9	0.6-1.9	0.45-1.5

\*De corriente, medida en m/s. Tipo de turbinas: I = Rueda hidráulica, II = turbina sumergible, III = turbina Garman, IV = turbina AquaCharger.

TABLA 8  
COMPARACIÓN ENTRE TIPOS DISTINTOS DE ROTORES DE CORRIENTE LIBRE

PARÁMETRO	I	II	III	IV	V	VI
Velocidad de rotación	3	5	9	7	9	6
Facilidad de construcción	9	2	3	6	6	6
Adaptación en ríos profundos	9	8	8	6	4	8
Facilidad de conducción del generador	8	10	0	9	0	8
Costo de materiales	1	5	4	7	7	8
Compatibilidad con el medio rural	10	5	3	7	5	6

Escala utilizada: 0 = nulo o muy bajo, 10 = excelente. Tipo de turbinas: I = Rueda hidráulica flotante, II = Darrieus vertical, III = Darrieus horizontal, IV = Propeller inclinado, V = Propeller horizontal VI = Propeller sumergido a la mitad.

## IV. CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se realizó un estudio de campo en tres diferentes comunidades rurales del municipio de Tamazunchale para conocer dónde sería más viable instalar una turbina hidráulica generadora de electricidad.

Cabe mencionar que en el citado municipio no se cuenta con datos históricos y estadísticos que ayudaran a los autores en este estudio. Las mediciones son inéditas en este contexto.

Las variables de interés para este estudio fueron: velocidad del fluido (agua dulce), profundidad de río, ancho del río y área de la sección transversal. Posteriormente, con estos datos se procedió a calcular la energía cinética en cada una de las tres zonas donde se realizaron las mediciones.

Al analizar los resultados obtenidos en las Tablas 1, 2 y 3, se encontró que la mayor velocidad de corriente de río se da en la localidad de Tacial, con una energía cinética promedio de 3847 Joules.

Se encontró que en esta zona de medición la velocidad del río está muy por encima de las otras dos localidades. Sin embargo, la profundidad de río en esta localidad es muy baja (0.57 m), a una velocidad de 1.24 m/s, por lo cual no se podría utilizar ninguna de las turbinas señaladas en la [Tabla 4](#), ya que se requieren profundidades mayores. Al analizar la [Tabla 5](#), se encontró que cualquiera de las cuatro turbinas ahí presentadas podría funcionar para ser instalada en dicha localidad; por tanto, los parámetros clave para poder elegir la turbina más adecuada se eligieron en base a la [Tabla 6](#). En conclusión, y con base en la [Tabla 6](#), la localidad donde es más viable la colocación de una turbina hidráulica es Tacial, con una velocidad promedio de río de 1.24 m/s y una energía cinética promedio de 3847 Joules. La turbina ideal para esta localidad es la rueda hidráulica flotante.

En cuanto a la parte educativa, involucrar a los estudiantes en proyectos escolares orientados a atender problemáticas reales, ya sea dentro de su proceso formativo o con fines de titulación u otros requisitos como el servicio social o las prácticas profesionales, es de vital importancia, ya que permite que se formen ciudadanos empáticos con el medio ambiente y que consideren las necesidades de los menos favorecidos, buscando una

sociedad más justa y equitativa, no solo considerando los derechos humanos, sino también los de la naturaleza. Este proyecto ha sido implementado principalmente con esta finalidad. La vinculación con la comunidad, la gestión necesaria para la ejecución de los proyectos y la identificación de aspectos fundamentales hacen que un proyecto (o solución propuesta) desde la academia pueda convertirse en una realidad. Los aspectos anteriores son parte de los aprendizajes de los estudiantes que participaron en el estudio, pero que además, sirven como motivador para sus compañeros y profesores, para atreverse a dar un paso afuera de los espacios educativos.

La función social de la educación radica en formar una conciencia de responsabilidad social y colectiva, formando también vínculos entre la academia y la comunidad, a quien servimos.

La siguiente etapa del proyecto consiste principalmente en dar ese salto al buscar la implementación definitiva. De concretarse el proyecto, si bien es cierto no se dotará de grandes cantidades de energía, quedando aún otros aspectos para valorar. Pero siempre un camino largo comienza con pequeñas decisiones que con el tiempo se van volviendo grandes acciones, que es como finalmente opera la ciencia.

## REFERENCIAS

- [1] G. R. Quizhpe, “Análisis de los efectos de la energía eléctrica en la calidad de vida de los habitantes y productividad industrial, Guayaquil, año 2015”, Tesis de maestría, Fac. de Ciencias Admin., Univ. de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador, 2016. Disponible en: <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/15945>
- [2] BP p.l.c., “bp Statistical Review of World Energy”, BP p.l.c., Londres, Inglaterra, 70.<sup>a</sup> ed., jul. 2021. Acceso: ag. 15, 2022. [En línea]. Disponible en: <https://www.bp.com/content/dam/bp/business-sites/en/global/corporate/pdfs/energy-economics/statistical-review/bp-stats-review-2021-full-report.pdf>
- [3] ONU, “Objetivo 7: Garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna”, UN.org, <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/energy/> (acceso: ag. 15, 2022).
- [4] “La energía renovable llega a las aldeas más pobres del mundo gracias a las redes de enjambre”, UN.org, may. 24, 2021, <https://news.un.org/es/story/2021/05/1492372> (acceso: ag. 15, 2022).
- [5] UASLP, “Ingeniería Mecánica Eléctrica”, UASLP.mx, [http://ame.uaslp.mx/secciones/carreras/plan\\_de\\_estudios.php?clvcar=05](http://ame.uaslp.mx/secciones/carreras/plan_de_estudios.php?clvcar=05) (acceso: ag. 15, 2022).
- [6] Iberdrola México, “Segunda fase del proyecto en la Huasteca Potosina”, Iberdrolamexico.com, mar. 25, 2021, <https://www.iberdrolamexico.com/fundacion-iberdrola-mexico/luces-de-esperanza-electricidad-para-mas-de-150-familias-de-la-huasteca/#:~:text=Iberdrola México puso en marcha,de 80 millones de pesos> (acceso: ag. 15, 2022).
- [7] Banco Mundial, “Comunidades rurales alejadas de la red eléctrica logran acceso a electricidad en México”, Bancomundial.org, <https://www.bancomundial.org/es/results/2017/11/01/switching-on-remote-communities-through-electricity-access-in-mexico> (acceso: ag. 15, 2022).
- [8] Iberdrola, “¿Que son las energías limpias?”, Iberdrola.com, <https://www.iberdrola.com/sostenibilidad/energias-Limpias#:~:text=DEFINICIÓN DE ENERGÍAS LIMPIAS,CO2 C causantes del cambio climático. IBERDROLA> (acceso: ag. 15, 2022).
- [9] J. M. Andrade y A. Olaya, “Impactos económicos, sociales y ambientales generados por las grandes hidroeléctricas. Una revisión”, *Interciencia*, vol. 46, no. 1, pp. 19-25, 2021. Disponible en: [https://www.interciencia.net/wp-content/uploads/2021/02/02\\_6537\\_A\\_Andrade\\_v46n1\\_7.pdf](https://www.interciencia.net/wp-content/uploads/2021/02/02_6537_A_Andrade_v46n1_7.pdf).
- [10] FAO, “Estimaciones del Caudal de Agua”, FAO.org, [https://www.fao.org/fishery/docs/CDrom/FAO\\_Training/FAO\\_Training/General/x6705s/x6705s03.htm](https://www.fao.org/fishery/docs/CDrom/FAO_Training/FAO_Training/General/x6705s/x6705s03.htm) (acceso: en. 15, 2022)
- [11] J. A. Pérez, E. Sánchez, P. Sánchez y A. Santos, “Estimación de energía de un parque hidrocinético: caso de estudio Bahía de Banes”, *Ingeniería Hidráulica y Ambiental*, vol. 42, no. 1, pp. 81-94, en-mar. 2021. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/riha/v42n1/1680-0338-riha-42-01-81.pdf>
- [12] H. A. Astocaza y D. C. Albújar, “Estudio de desarrollo de un proyecto de generación hidroeléctrica”, Tesis de licenciatura, Fac. Ing. Civ., Univ. Cat. de Perú, Ing. Civ., Lima, Perú, 2019. Disponible en: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/14081>

- [13] J. E. Bonilla y R. V. Ronquillo, “Repotenciación de la pequeña central hidroeléctrica para una generación de energía en la pequeña central hidroeléctrica de Ulba en el cantón Baños”, Tesis de licenciatura, Unid. Acad. de Ciencias de la Ing. y Aplic., Ing. Eléc., Univ. Tec. de Cotopaxi, Latacunga, Ecuador, 2014. Disponible en: <http://repositorio.utc.edu.ec/bitstream/27000/1884/1/T-UTC-1775.pdf>
- [14] M. B. Irazusta y T. M. Reyna. (Nov. 2020). Evaluación del diseño de una micro turbina Francis. Presentado en el 8.º Congr. Int. sobre Gestión y Tratamiento Integral del Agua. Córdoba, Argentina. [En línea]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/347766686\\_EVALUACION\\_DEL\\_DISENO\\_DE\\_UNA\\_MICRO\\_TURBINA\\_FRANCIS](https://www.researchgate.net/publication/347766686_EVALUACION_DEL_DISENO_DE_UNA_MICRO_TURBINA_FRANCIS)
- [15] E. Carlos, “Diseño y evaluación de un prototipo de turbina tipo Pelton para una pequeña planta hidroeléctrica”, Tesis de licenciatura, Fac. de Ciencias Fís. y Mat., Univ. Nac. Pedro Ruiz Gall, Lambayeque, Perú, 2021. Disponible en: <https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/9357>
- [16] Y. Cengel y J. Cimbala, *Fluid Mechanics and Applications*, 4.ª ed. Nueva York: Mc-Graw Hill, 2018.
- [17] P. Tippens, *Física: Conceptos y Aplicaciones*, 7.ª ed. México: Mc-Graw Hill, 2011.
- [18] M. Anyi y B. Kirke, “Evaluation of small axial flow hydrokinetic turbines for remote communities”, *Energy Sustain. Dev.*, vol. 14, no. 2, pp. 110-116, jun., 2010, doi: 10.1016/j.esd.2010.02.003.
- [19] C. Cardona-Mancilla, J. Sierra del Río, E. Chica-Arrieta y D. Hincapié-Zuluaga, “Turbinas hidrocineéticas de eje horizontal: una revisión de la literatura”, *Tecnología y ciencias del agua*, vol. 9, no. 3, pp. 180-197, may.-jun., 2018, doi: 10.24850/j-tyca-2018-03-08.
- [20] M. Hazdich. (2013). *Energía hidráulica. Capítulo 7*. [Presentación]. Disponible en: <https://docplayer.es/10209460-Energia-hidraulica-capitulo-7-miguel-hazdich.html>

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a las autoridades y pobladores de las comunidades que participaron en el estudio. Así mismo, al Ing. José de Jesús Gómez Hernández y al Dr. José Fernando Chávez Vargas, por sus recomendaciones.