

# Análisis de robustez en la aplicación del diseño de parámetros en línea

Rey David Molina Arredondo<sup>1</sup>, Jorge Luis García Alcaraz<sup>1</sup>, Jorge Meza Jiménez<sup>2</sup>

## Resumen

El uso diseño de parámetros robustos y de la ingeniería de control de procesos ha tomado gran importancia en lo últimos años para mejorar la calidad de procesos sensibles a condiciones de ruido, el objetivo de utilizar simultáneamente estas técnicas es encontrar los ajustes de control óptimos en línea que hagan el proceso más robusto. El uso de ajustes en línea, bajo ciertas condiciones, ha mostrado una reducción mayor de la variación de proceso en comparación con el control fuera de línea, sin embargo se incurre en costos de manufactura adicionales. En el presente trabajo se propone un análisis de robustez para decidir cuándo es conveniente utilizar control en línea en lugar del control fuera de línea; los resultados muestran que la decisión del método a utilizar puede estar en función de la razón entre los parámetros del modelo lineal de respuesta.

Palabras clave: análisis de parámetros robustos, ingeniería de control de procesos, control en línea.

## 1. Introducción

En los procesos de producción existen factores que afectan su desempeño y Taguchi (1985) los clasifica en dos tipos, factores de ruido y factores de control. En general, los factores de ruido son aquellos que afectan el desempeño del producto/proceso, pero que no se pueden controlar durante el uso de éste, como son las condiciones en que se usa un equipo, la temperatura, la humedad, etc. El efecto que tienen los factores de ruido sobre la respuesta son estimados con datos de laboratorio donde es posible tener un control de los mismos. Los factores de control son aquellos que el ingeniero puede variar durante el diseño u operación del proceso y pueden ajustarse para mejorar el desempeño de éste. Así, El diseño de parámetros robustos (RPD) es una técnica propuesta por Taguchi en 1985 que ha sido ampliamente usada en la industria para mejorar la calidad de productos al reducir su variabilidad, El objetivo del RPD es elegir el nivel de los factores de control que hagan el proceso menos sensible a factores de ruido con una media cercana a un valor objetivo. Sin

---

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Industrial y Manufactura. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Industrial. Instituto Tecnológico de Colima.

embargo, en muchas ocasiones los factores de ruido tales como el desgaste de la herramienta, temperatura y humedad tienen alta auto correlación, es decir, el valor de la siguiente observación del factor de ruido está correlacionado con las observaciones anteriores. Es sabido que cuando existe auto correlación en los factores de ruido o cuando el efecto de los factores de ruido es muy fuerte, entonces el uso de RPD resulta ser ineficiente (Joseph, 2003; Dagustas and Wu, 2006) y, en estos casos el uso (de una estrategia de control) de un modelo que permita pronosticar la siguiente observación del factor de ruido y realizar ajustes en los factores de control para compensar el ruido en la respuesta sería más adecuado. En los últimos años ha habido un gran interés en técnicas que combinan el RPD con la ingeniería de control de procesos para reducir la variabilidad en el desempeño de un proceso, mediante medición en línea de los factores de ruido y ajustes en los factores de control; por ejemplo, algunos trabajos incluyen el uso de técnicas de control por retroalimentación y técnicas de control por feedforward. Pledger (1996), Joseph (2003) and Jin and Ding (2004) incorporan control por feedforward en RPD al usar información en línea de los factores de ruido, mientras que Dagustas and Wu (2006) utilizan diseño de parámetros robustos con técnicas de control por retroalimentación.

Se ha mostrado que el uso de técnicas de control puede reducir de manera considerable la variabilidad de un proceso, en comparación al usar solo RPD, sin embargo, el uso de un controlador puede aumentar el costo unitario de manufactura. Joseph (2003), menciona que antes de iniciar con una estrategia de control es importante realizar un análisis de robustez. En el presente trabajo se presenta un estudio de robustez, a partir de un modelo lineal ajustado de un proceso y su potencialidad para utilizar alguna estrategia de control. Los métodos de comparación utilizados son el método de respuesta Dual y el de certeza equivalente, los resultados muestran que bajo ciertas condiciones los resultados con ambos métodos son los mismos, por lo que el gasto en un controlador podría ser innecesario y se presenta una forma de decidir cuando el uso de un controlador estaría justificado.

## 2. Método de respuesta Dual para RPD

Se considera al modelo lineal con una respuesta con  $k$  factores de control y  $r$  variables de ruido de la manera que se expone en (1).

$$y = \beta_0 + \beta' \mathbf{u} + \gamma' \mathbf{z} + \mathbf{u}' \Delta \mathbf{z} + \varepsilon \quad (1)$$

Donde  $y$  es la respuesta de la característica de calidad,  $\boldsymbol{\beta}$  es un vector ( $k \times 1$ ) de parámetros de regresión para los factores de control,  $\boldsymbol{\gamma}$  es un vector ( $r \times 1$ ) de parámetros de regresión para los factores de ruido,  $\Delta$  es una matriz ( $k \times r$ ) que contiene el efector de la interacción entre los factores de control y de ruido,  $\mathbf{u}' = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  y  $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ . La cantidad  $\varepsilon$  son errores independientes y normalmente distribuidos  $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ . El modelo presentado en la ecuación (1) es un modelo de superficie de respuesta lineal cuando los efectos cuadráticos y de interacción entre los factores de control no son significativos. Vinning y Myers (1990) presenta un modelo de respuesta dual para modelar de manera separada la media y varianza del proceso, las ecuaciones 2 y 3 son usadas para modelar la media y la varianza de la respuesta dado los factores de ruido  $\mathbf{z}$  y los factores de control  $\mathbf{u}$ .

$$E[y(x, z)] = \beta_0 + \mathbf{u}'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\mu}_z + \mathbf{u}'\Delta\boldsymbol{\mu}_z \quad (2)$$

y

$$Var[y(x, z)] = (\boldsymbol{\gamma} + \Delta'\mathbf{u})'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma} + \Delta'\mathbf{u}) + \sigma_\varepsilon^2 \quad (3)$$

Donde  $\boldsymbol{\Sigma}$  es una matriz de varianza covarianza para  $\mathbf{z}$ , y  $\boldsymbol{\mu}_z$  es la media de  $\mathbf{z}$ . Sin embargo, es posible conocer o tener una estimación de la matriz  $\boldsymbol{\Sigma}$  del comportamiento histórico de los factores de ruido, mientras que los parámetros  $\boldsymbol{\gamma}$  y  $\Delta$  pueden ser estimados al considerar combinar las variables de ruido como efectos fijos en el desarrollo del experimento (Myers, 1992). Considerando que las variables de ruido  $\mathbf{z}$ 's son centradas y escaladas al origen, de esta manera es razonable asumir que su media es cero y entonces, la media del proceso puede ser escrita como aparece en la ecuación 4

$$E[y(x, z)] = \beta_0 + \mathbf{u}'\boldsymbol{\beta} \quad (4)$$

El objetivo del diseño robusto es tener una media lo más cercano a un valor objetivo con una variación mínima. Lin y Tu (1995) proponen una variante de la metodología de respuesta Dual presentada por Vining y Myers (1990), en el método que ellos proponen, utilizan el cuadrado medio de la desviación (MSD) como función de respuesta. El objetivo que ellos consideran es minimizar el MSD de la ecuación 5.

$$E[MSD] = E(y - T)^2 = Var[y] + (E[y] - T)^2 \quad (5)$$

Al sustituir la ecuación 3 y 4 en la 5, el MSD queda expresado según la ecuación 6.

$$MSD = (\beta_0 + \mathbf{u}'\boldsymbol{\beta} - T)^2 + (\boldsymbol{\gamma} + \Delta'\mathbf{u})'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma} + \Delta'\mathbf{u}) + \sigma_\epsilon^2 \quad (6)$$

La solución robusta que ofrece el método RD, resulta de encontrar los valores de  $\mathbf{u}$  que minimicen la ecuación 6.

### 3. Control en línea

Cuando existen gran influencia de los factores de ruido en el proceso, el uso de diseño de parámetros por sí solo puede no ser efectivo y una estrategia de control en línea puede ser usada para compensar el efecto del ruido (Dagupta y Wu, 2006; Joseph, 2003). La estrategia de control consiste en hacer ajustes de las variables de control en línea para eliminar el sesgo entre la respuesta de salida y un valor objetivo, cuando se tienen medidas en línea de los factores de ruido. Joseph (2003) muestra que la solución del diseño de parámetros robustos funciona solo cuando existe interacciones entre los factores de ruido y de control, mientras que la estrategia de control no requiere de estas condiciones, por lo que puede tener mucha más aplicación industrial. En el control en línea es importante conocer el comportamiento de los factores de ruido y para tener un pronóstico de este y poder realizar los ajustes en línea, un modelo de series de tiempo de tipo ARIMA (Atoregresive integrated Movil Average) podría ser utilizado para este fin. En el presente trabajo, sin embargo, se considera a los parámetros del modelo de ruido como conocidos, y se utiliza un modelo AR(1) para realizar el pronóstico en cada periodo de tiempo.

Suponga que el vector  $\mathbf{z}_t$  representa un vector de orden  $r$  de factores de ruido, la ecuación 7 es usada para modelar  $\mathbf{z}_t$ .

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\phi}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{a}_t \quad (7)$$

Donde  $\boldsymbol{\phi}$  es un vector  $(p \times 1)$  de parámetros AR (1) y  $\mathbf{a}_t$  es un vector  $r$  dimensional de ruidos blancos del proceso con media cero y matriz de covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_a$ , la ecuación en (7) será usada para modelar los factores de ruido en el presente trabajo.

#### 3.1 Certeza Equivalente (CE)

Uno de los métodos de control en línea más conocido es el de Certeza Equivalente (CE) propuesto por (Astrom and Wittenmark, 1989). Este método calcula los ajustes de los

factores de control usando los parámetros estimados del modelo como si fueran los verdaderos, sin considerar la incertidumbre en la estimación de los mismos. El método CE puede ser usado para reducir la pérdida cuadrática de la ecuación 6 y el modelo lineal de la ecuación 1 es usado para la respuesta. El modelo de CE encuentra los ajustes óptimos en cada periodo de tiempo al minimizar la pérdida cuadrática, según las ecuaciones 8 y 9.

$$L_{CE} = (y^t - T)^2 \quad (8)$$

$$= (\hat{\beta}_0 + \mathbf{u}' \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}' \mathbf{z}^t + \mathbf{u}' \hat{\Delta} \mathbf{z}^t - T)^2 \quad (9)$$

Donde  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  y  $\hat{\Delta}$  de la ecuación 8, son los parámetros del modelo de la ecuación 1 y que fueron estimados por mínimos cuadrados. Al agrupar los términos que contienen al factor de control en la ecuación 9, la función de pérdida puede ser escrita como lo muestra la ecuación 10, donde el superíndice (t) indica que el valor de los factores de ruido cambia en cada corrida.

$$L_{CE} = [(\hat{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\gamma}}' \mathbf{z}^t - T) + (\mathbf{u}' \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{u}' \hat{\Delta} \mathbf{z}^t)]^2 \quad (10)$$

Dado que la ecuación 10 es la pérdida cuadrática, es una función convexa y los ajustes que minimizan la pérdida cuadrática en cada corrida son calculados al desarrollar el cuadrado de la ecuación (10) y hacer  $\frac{dL_{CE}}{du} = 0$ , el resultado se muestra en la ecuación 11

$$u_{CE} = -[(\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\Delta} \mathbf{z}^t)(\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\Delta} \mathbf{z}^t)]^{-1} [(\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\Delta} \mathbf{z}^t)(\hat{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\gamma}}' \mathbf{z}^t - T)] \quad (11)$$

#### 4. Metodología

El primer paso en la metodología es ajustar un modelo de regresión lineal del proceso que se está analizando, esto se puede lograr con datos obtenidos de un diseño de experimentos, en el presente análisis se tomará el modelo lineal de la ecuación 12 como base para ejemplificar.

$$y = 28 + 5u_1 + 20z - 15uz + \epsilon \quad (12)$$

Donde los coeficientes de regresión pueden ser estimados por mínimos cuadrados y las observaciones tomadas de un diseño experimental. Asumiremos también, que  $var(\epsilon) = 4$  y que el valor objetivo  $T = 30$

Como segundo paso se debe encontrar el modelo de medias y de varianza de la ecuación 2 y 3.

$$E[y(x, z)] = 28 + 5u \quad (13)$$

y

$$Var[y(x, z)] = (20 - 15u)' \Sigma (20 - 15u) + \sigma_{\epsilon}^2 \quad (14)$$

El valor del factor de control que minimiza la varianza en la ecuación 14, es  $u = 1.3334$ , sin embargo, este valor da una media de la respuesta de 34.67, alejado del óptimo 30, por lo que hay que buscar una mejor solución, el valor de  $u$  puede ser elegido tal que minimice el cuadrado medio de la desviación presentada en la ecuación 6.

$$MSD = (28 + 5u - 30)^2 + (20 - 15u)' \Sigma (20 - 15u) + \sigma_{\epsilon}^2 \quad (15)$$

El valor de  $u$  que minimice la ecuación 15 será tomado como la solución robusta al problema usando el método de respuesta Dual.

Para encontrar el ajuste óptimo en cada corrida usando el método de CE, se utiliza la estrategia de control presentada en la ecuación 11, para esto, se debe conocer primero el comportamiento de los factores de ruido  $z$ , para ser utilizado como modelo de pronóstico. Un modelo de la serie ARIMA puede ser utilizado para este fin. En nuestro ejemplo supongamos que  $z$  sigue una serie autor regresiva AR(1) como se presenta en la ecuación 7, con  $\phi = 0.7$  y  $a \sim N(0, 0.05)$ , de este modo el modelo para los factores de ruido es el siguiente

$$z_t = 0.7z_{t-1} + a_t$$

Después de tener el modelo para los factores de ruido se simulan valores para  $z$  y para el error estándar, de esta manera se pueden simular la respuesta del modelo 1 cuando los ajustes de los factores de control se realizan con a) método DR y con b) Estrategia de control CE.

Por último se calcula el cuadrado medio de la desviación obtenido por cada método y se determina si la reducción en el MSD puede justificar la inversión adicional resultante de adquirir un controlador. La función de pérdida de calidad esperada puede escribirse de la siguiente manera.

$$L_{DR} = kMSD_{DR}$$

Para el método de respuesta Dual y

$$L_{CE} = kMSD_{CE}$$

Para el método CE. A la diferencia entre las pérdidas se le llamará ahorro (A).

$$A = L_{DR} - L_{CE}$$

Si  $c$  representa el costo unitario de manufactura en que se incurre cuando se utiliza un controlador, entonces este costo se justifica siempre que el ahorro sea mayor que  $c$ .

$$A = L_{DR} - L_{CE} > c$$

## 5. Resultados

Suponiendo que el factor de ruido sigue una serie AR(1) con los parámetros antes mencionados, el valor del factor de control  $u$  que minimiza el cuadrado medio de la desviación de la ecuación 14 es  $u = 0.5033$ , con un MSD= 6.19. Suponiendo un coeficiente de pérdida de calidad  $k = 0.25$  se tiene una pérdida de calidad

$$L_{DR} = 0.25(6.19) = 1.55$$

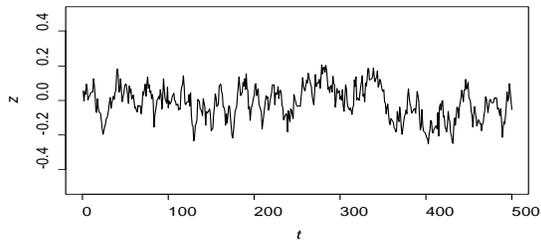
Para calcular el MSD usando la estrategia de control CE, se simularon las condiciones de ruido y la respuesta usando el programa estadístico R Project. Se realizaron 100 simulaciones con 500 observaciones cada una, el cuadrado medio de la desviación en cada simulación es calculado como

$$MSD = \frac{\sum(y_i - 30)^2}{500}$$

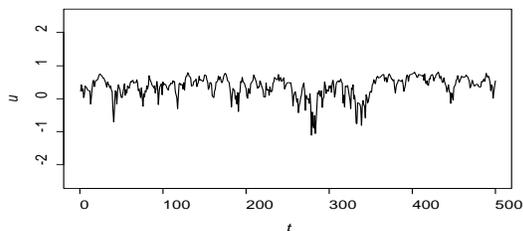
Donde  $y_i$  es la respuesta simulada con los ajustes realizados con la estrategia de control CE.

La figura 1 muestra una simulación de 500 observaciones para el factor de ruido  $z$  y la

figura 2 muestra el ajuste del factor de control CE en cada corrida.

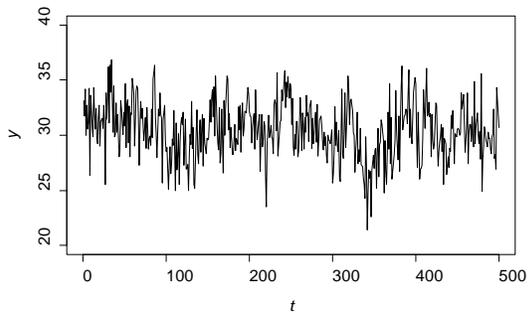


**Figura 1.** Ruido simulado en cada corrida

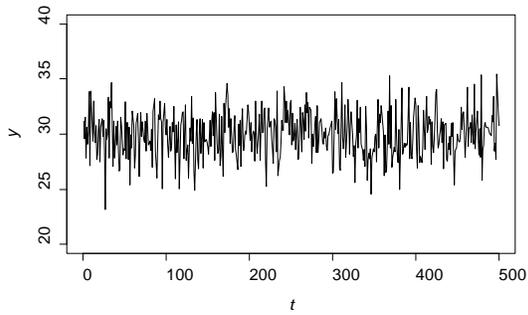


**Figura 2.** Ajuste del factor de control en cada corrida

El MSD calculado, con el resultado de la simulación, para el control CE es de 4.08, mientras con el método DR es de 6.19, el gráfico de la figura 3 muestra la simulación de 500 corridas para la respuesta usando el control DR, mientras que la figura 4 muestra la simulación para la respuesta usando el control CE.



**Figura 3.** Simulación para la respuesta usando el control DR.



**Figura 4.** Simulación para la respuesta usando el control CE.

La pérdida esperada por unidad cuando se utiliza CE es  $L_{CE} = 0.25 * 4.08$ , de esta manera la pérdida esperada para cada método de control se muestra en la tabla 1.

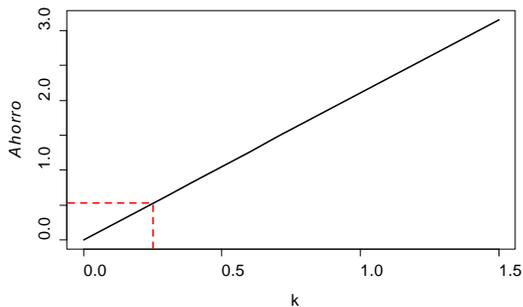
Método	MSD	L(y)
DR	6.19	\$ 1.55
CR	4.08	\$ 1.02

**Tabla1.** Pérdida esperada para cada método de control

El ahorro, calculado como una diferencia entre la pérdida obtenida por el método RD y la obtenida al usar el método CR es:  $A = 1.55 - 1.02 = 0.53$

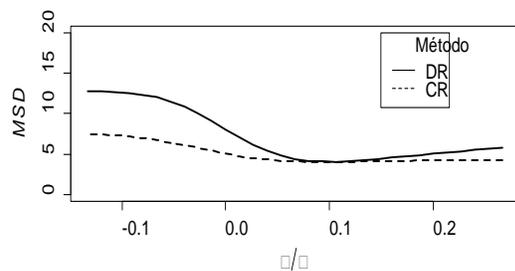
Por lo que el incremento unitario de manufactura al usar un controlador para implementar el método CE no debe exceder \$0.53, esto para justificar la inversión.

La gráfica 5 muestra como el ahorro en la pérdida esperada aumenta cuando incrementa  $k$ .



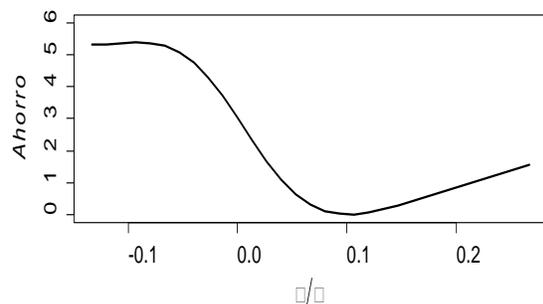
**Figura 5.** Incremento del ahorro en función de  $k$

Con la finalidad de conocer el efecto que tiene los parámetros del modelo 1, sobre la decisión, se variaron algunos parámetros buscando modificar la relación  $\beta/\Delta$  ya que se piensa que esta relación puede afectar el ahorro y con ello la decisión del método de control a usar. Los valores analizados de la relación  $\beta/\Delta$  van de -2 a 3. Los resultados se presentan en la figura 6, donde es posible notar que para valores de  $\beta/\Delta$  cercanos a 0.1, el método CE no ofrece una ventaja considerable sobre el método DR, por lo que el incremento en los costos de manufactura no estaría justificado, en cambio, conforme la cantidad  $\beta/\Delta$  se aleja de 0.1, el método CE da como resultado menor MSD que el control DR por lo que la inversión en el controlador puede ser justificada con la reducción del MSD.



**Figura 6.** MSD calculado para diferentes valores de la relación  $\beta/\Delta$

La figura 7 muestra el ahorro obtenido al elegir el método CE sobre el método DR, el gráfico muestra el ahorro para diferentes valores de  $\beta/\Delta$ , esta gráfica puede ser útil para ayudar a tomar la decisión sobre qué tipo de control utilizar.

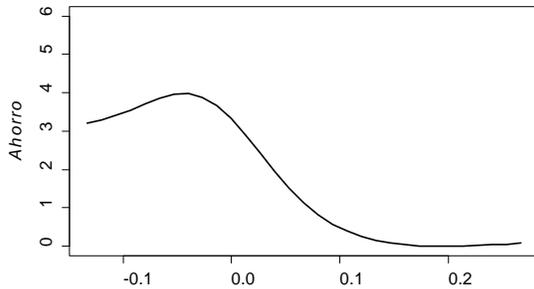


**Figura 7.** Ahorro calculado para diferentes valores de la relación  $\beta/\Delta$

La cantidad donde el ahorro es mínimo en la figura 7 puede ser calculada como  $(T - \beta_0)/\gamma$ , en el ejemplo presentado esta cantidad es:

$$\frac{30-28}{20} = 0.1,$$

Como se nota en la figura 7, conforme la razón  $\beta/\Delta$  se aleja de 0.1 el ahorro aumenta, por lo que el método DR ya no da una solución robusta. De esta manera si  $\gamma = 10$ , el ahorro mínimo se encuentra en 0.2, ver figura 8.



**Figura 8.** Ahorro calculado para diferentes valores de la relación  $\beta/\Delta$  con  $\gamma = 10$

## 6. Conclusiones

En el presente trabajo se expuso un procedimiento para ayudar la robustez de un proceso y decidir si usar una estrategia de control en línea (CE) o un control fuera de línea (DR), los resultados muestran que cuando se tiene un modelo de respuesta como el de la ecuación 1, el control fuera de línea ofrece resultados similares al control en línea CE cuando  $\frac{T-\beta_0}{\gamma} = \frac{\beta}{\Delta}$ , sin embargo, conforme esta igualdad no se cumple el método CE muestra una pérdida esperada menor al método DR, por lo que la inversión en un controlador podría justificarse.

Cabe señalar que en este análisis se consideró conocer con certeza los parámetros del modelo en 1 y del modelo de serie de tiempo, sin embargo, en la práctica muchas veces no se conocen y son estimados de datos experimentales por lo que la incertidumbre en su estimación también debe ser considerada.

## Referencias

Åström KJ, Wittenmark B. 1989. *Adaptive Control*. Addison-Wesley: Reading, MA.

Dasgupta Tirthankar y Wu Jeff. 2006. *Robust parameter design with feedback control*. Technometrics, Vol. 48 No. 3: 349–359.

Jin, J. and Ding, Y. 2004. *Online automatic process control using observable noise factors for discrete-part manufacturing*. IIE Transactions, 36, 899–911.

Joseph. V. Roshan. 2003. *Robust parameter design with feed-forward control*. American Society for Quality, Vol. 45. No. 4:284–292.

Karkar. R. 1985. *Off-line quality control, parameter design and the Taguchi methods*.” Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 4. 176–188.

Lin Dennis y Tu Wanzhu. 1995. *Dual response surface optimization*” Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 1. 34–39.

Myers Raymond H., Kim Yoon y Kristi L. Griffiths. 1997. *Response surface methods and the use of noise variables*. Journal of Quality Technology, Vol 29 No. 4:429–440.

Myers R.H., Khuri A.I., and Vining G. 1992. *Response surface alternatives to the taguchi robust parameter design approach*. American Statistician, Vol 46. No. 2: 131– 139.

Myers R.H., Montgomery DC , Anderson\_Cook C.M. 2009. *Response Surface Methodology: Process and product optimization using design of experiments*.” Tercera Edición, Wiley Series in Probability and Statistics, Estados Unidos.

Montgomery, D. C. 2005. *Design and Analysis of Experiments*. 6th edition, John Wiley & Sons, New York.

Pledger, M. 1996. Observable uncontrollable factors in parameter design. Journal of Quality Technology, 28 (2), 153–162.

Vining G. and Myers R. H. 1990. *Combining taguchi and response surface philosophies: A dual response*”. Journal of Quality Technology, Vol. 22 No.1 : 38–45.