

## Estimación de confiabilidad para productos con dos características de desempeño basada en un modelo de degradación estocástico bivariado

Luis Alberto Rodríguez Picón<sup>1</sup>, Manuel Iván Rodríguez Borbón<sup>1</sup>, Alejandra Flores Ortega<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

### Resumen

Los modelos de degradación han tenido gran relevancia en los últimos años en el área de confiabilidad, dado que es posible obtener información robusta acerca del tiempo de vida de productos altamente confiables. Sin embargo, se ha dado más interés a modelos de degradación multidimensionales que toman en cuenta que el funcionamiento de un producto está en función de múltiples características de desempeño cuya degradación marginal o conjunta puede originar una falla del producto. En esta investigación se presenta un modelo de degradación basado en un proceso gamma bivariado obtenido mediante reducción trivariada, en el que se considera que los dos procesos gamma marginales que componen el proceso bivariado caracterizan la degradación de las dos características de desempeño de un producto bajo estudio, esto permite modelar la estructura de dependencia entre las características de desempeño por lo que es posible obtener estimaciones de confiabilidad sistemáticas. El caso de estudio presentado está basado en la degradación de dos resistencias, los resultados obtenidos muestran que es posible caracterizar de mejor manera la confiabilidad de un producto tomando en cuenta la dependencia entre la degradación de las dos características de desempeño.

**Palabras clave:** Degradación, Proceso Estocástico, Reducción Trivariada, Característica de Desempeño.

### Introducción

Para productos altamente confiables, muy a menudo se requieren tiempos de experimentación muy grandes en Pruebas de Vida Acelerada (PVA) o Pruebas de Degradación Acelerada (PDA) para obtener medidas de degradación de una Característica de Desempeño (CD) o tiempos de falla. Tanto en PVA como en PDA, un conjunto de productos se someten a niveles altos de estreses ambientales de tal

manera que es posible obtener medidas de degradación y tiempos de falla en menos tiempo. Precisamente, la evaluación de confiabilidad basada en datos de degradación se ha presentado como una herramienta superior en comparación con los estudios de confiabilidad que solo se basan en tiempos de falla (Lu y Meeker 1996).

Meeker y Escobar (1998) han presentado ejemplos de modelos de degradación en los cuales solo se considera una CD. Describen algunos modelos específicos para curvas de degradación, normalmente estos modelos comienzan con una descripción determinística del proceso de degradación, después de esto, es posible introducir aleatoriedad usando Funciones de Densidad de Probabilidad (FDP) o procesos estocásticos con el fin de describir la variación de las condiciones iniciales de prueba o de los dispositivos bajo prueba como funciones de los parámetros del modelo. De acuerdo a esto, la mayoría de las fallas pueden ser obtenidas a través de un proceso de degradación.

Varios autores han estudiado modelos de degradación basados en PDA y procesos estocásticos. Park y Padgett (2006) usaron un proceso estocástico para modelar dos variables de aceleración (VA) en un proceso de degradación, su enfoque se basó en un modelo de daño generalizado acumulado, sin embargo no consideran la estructura de dependencia entre las VA en el modelo multivariado. Los modelos de degradación basados en el proceso gamma han sido identificados como el principal enfoque de modelación para procesos de degradación, dadas sus características de que sus incrementos son independientes y no-negativos, los cuales siguen una distribución gamma. En el caso de la modelación de degradación mediante el proceso gamma, el desempeño solo puede decrecer con respecto al tiempo, es por esto que el modelo es considerado para modelar desgaste, propagación de fisuras, crecimiento, corrosión, consumo, fatiga, etc. (Park y

Padgett 2005; Bagdonavicius y Nikulin 2000; Bordes *et al.* 2010; Lawless and Crowder 2004; Pan and Balakrishnan 2011). Información importante con respecto al proceso gamma puede ser encontrada en Noortwijk (2009) y Sinpurwalla (1995).

Es importante considerar que la calidad de cualquier producto, una vez que se encuentra en ambiente uso, es una función de múltiples condiciones ambientales así como de múltiples CD. Por lo que resulta importante que al modelar la confiabilidad de un producto o sistema se consideren tanto múltiples VA como múltiples CD. Buijs *et al.* (2005) presentaron un modelo basado en un proceso estocástico bivariado gamma para modelar los efectos en el análisis de riesgos de inundación con el fin de reportar inspecciones y mantenimientos. Mercier *et al.* (2009) extendieron este enfoque aplicando el proceso gamma bivariado en la observación del incremento de dos indicadores degradación aleatorios e independientes para el estudio de carreteras. Un supuesto común en la mayoría de los trabajos que implican modelación de degradación es que la falla de un dispositivo bajo estudio es función de solo una CD, sin embargo, este es un enfoque limitado.

En este artículo se presenta un enfoque de modelación basado en una extensión de modelo propuesto por Buijs *et al.* (2005) para el caso de un modelo de degradación acelerada con dos CD. De esta manera, cada proceso gamma marginal del modelo bivariado representa los incrementos de degradación para cada CD. Con este enfoque de modelación es posible incorporar

tiempos de falla modelados marginalmente por distribuciones Gaussianas inversas (Lawless y Crowder 2004). La modelación conjunta de las distribuciones marginales de

tiempos de falla se puede realizar mediante funciones copula de tal manera que es posible caracterizar una estructura de dependencia entre las CD.

### Modelación de proceso estocástico bivariado

Tomando en cuenta que la calidad de un producto es una función de múltiples CD. Se considera que cada característica es independiente y que sus incrementos de degradación con respecto al tiempo pueden ser modelados con procesos gamma marginales.

Este esquema implica que considerando  $k$  CD es posible obtener incrementos de degradación a partir de  $n$  dispositivos bajo prueba con  $m$  mediciones por cada nivel de estrés. De manera que  $x_{1,1}^{(1)}$  representa el incremento de degradación de un dispositivo de prueba 1 en la primera medición de su  $CD_1$ . La denotación del modelo indica la posibilidad de considerar pruebas en donde a los mismos dispositivos se les mide la degradación de una CD. Es decir,  $X^{(1)}$  puede representar el conjunto de incrementos de degradación observados de  $CD_1$  de un dispositivo sometido a una prueba 1 caracterizada por una  $VA_1$ , de

manera que  $X^{(2)}$  representa los incrementos obtenidos de una  $CD_2$  de los mismos dispositivos.

$$X_{n \times m} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(1)} & \cdots & x_{1,m}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}^{(1)} & \cdots & x_{n,m}^{(1)} \\ x_{1,1}^{(2)} & \cdots & x_{1,1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}^{(2)} & \cdots & x_{n,m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,1}^{(k)} & \cdots & x_{1,1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}^{(k)} & \cdots & x_{n,m}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Una representación gráfica de trayectorias de degradación se presenta en la Figura 1. Es fácil observar que cuando la trayectoria de degradación llega a un nivel crítico se considera que el producto ha fallado bajo la CD que llega primero a ese nivel.

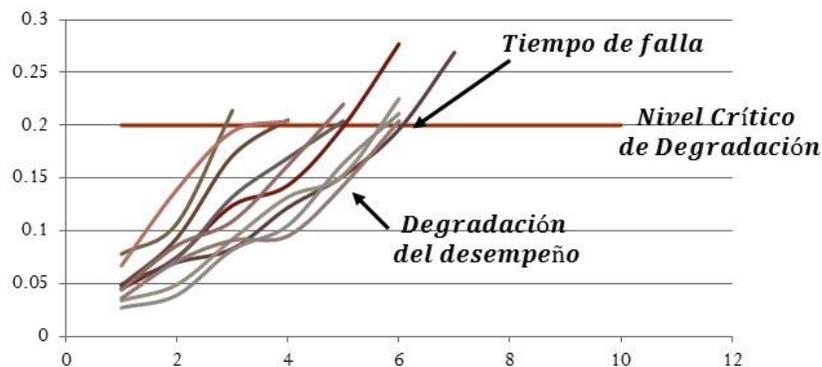


Figura 1. Caracterización de diferentes trayectorias de degradación

En la aplicación del presente artículo solo se consideran dos CD, de manera que suponiendo que el proceso estocástico creciente  $Z(t)$  describe el nivel de degradación de algún dispositivo en el

tiempo  $t$ , entonces el momento de la falla ( $\xi$ ) causado por degradación es el momento cuando la degradación alcanza un nivel crítico  $\omega_0$ .

$$\xi = \sup\{t: Z(t) < \omega_0\}; \xi = \inf\{t: Z(t) > \omega_0\} \quad (2)$$

Digamos que el valor inicial del proceso es  $z_0$ , entonces,

$$P(t) = P\{Z(t) - z_0 < \omega_0 - z_0\} \quad (3)$$

Y,

$$F(t) = P\{Z(t) \geq \omega_0\} = \int_0^{\omega_0 - z_0} \frac{1}{\Gamma(v(t))u^{v(t)}} x^{v(t)-1} \exp\left\{-\frac{x}{u}\right\} = \frac{\Gamma(v(t), \omega_0 u)}{\Gamma(v(t))} \quad (4)$$

En donde,  $f_{Z(t)}(x)$  es el proceso estocástico en función de los incrementos de degradación,  $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty z^{a-1} e^{-z} dz$ , es la función gamma incompleta. Dada la función de distribución acumulada (FDA), la FDP esta descrita de la siguiente manera,

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Gamma(v(t), \omega_0 u)}{\Gamma(v(t))} \right] \quad (5)$$

De aquí en adelante se considera que  $Z(t)^1$  representa el proceso estocástico

$\text{gamma}(v_i^{(1)}, u^{(1)})$  para la degradación de la  $CD_1$ , mientras que  $Z(t)^2$  representa el proceso estocástico  $\text{gamma}(v_i^{(2)}, u^{(2)})$  para la degradación de la  $CD_2$ .

Una vez definidos los procesos marginales en base a las diferentes CD es necesario construir un proceso multivariado que considere el efecto marginal de cada proceso de manera conjunta. Los procesos de degradación  $Z(t)^1$  y  $Z(t)^2$  tienen un

efecto sobre la falla del dispositivo bajo prueba y por lo tanto están correlacionados. El primer paso para la construcción del proceso gamma multivariado es considerar los procesos de degradación correlacionados por una fuente común. Si se consideran tres variables aleatorias  $Y_1, Y_2$  y  $Y_3$ , las FDP para cada  $Y_i$  pueden ser representadas separadamente por procesos gamma. Se asume que las variables independientes  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  que siguen una distribución gamma inducen incrementos de degradación  $(Z_1, Z_2)$  para dos CD.

De acuerdo a Buijs *et al.* (2005) los incrementos de degradación están distribuidos de acuerdo a procesos gamma marginales si son funciones lineales de  $Y_1, Y_2$  y  $Y_3$ . La dependencia es introducida por el hecho de que ambos procesos de degradación son causados por dos

incrementos de degradación independientes, de los cuales  $Y_3$  es compartido.

El coeficiente de correlación de  $Y_1 + Y_3$  y  $Y_2 + Y_3$  es igual a  $\rho$ . En el contexto de la integración de Monte Carlo y de acuerdo a Devroye (1986) es posible generar parejas de variables aleatorias de una distribución gamma bivariada mediante el método de reducción trivariada. El procedimiento requiere los parámetros de forma y escala de las distribuciones marginales de  $Z_1 \sim Ga(z_1 | v_i^{(1)}, u^{(1)})$  y  $Z_2 \sim Ga(z_2 | v_i^{(2)}, u^{(2)})$ , y el coeficiente de correlación  $\rho$ , cuyo valor tiene que estar entre

$0 \leq \rho \leq \min(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}) / \sqrt{(v_i^{(1)} v_i^{(2)})}$ . Las parejas de variables aleatorias son generadas de la siguiente manera,

1. Generar  $Y_1 \sim Ga\left(v_i^{(1)} - \rho \sqrt{(v_i^{(1)} v_i^{(2)})}, 1\right) = Ga(\zeta_1, 1)$
2. Generar  $Y_2 \sim Ga\left(v_i^{(2)} - \rho \sqrt{(v_i^{(1)} v_i^{(2)})}, 1\right) = Ga(\zeta_2, 1)$
3. Generar  $Y_3 \sim Ga\left(\rho \sqrt{(v_i^{(1)} v_i^{(2)})}, 1\right) = Ga(\zeta_3, 1)$
4. Regresar  $(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}) = (u^{(1)}(Y_1 + Y_3), u^{(2)}(Y_2 + Y_3))$

Dados los incrementos  $\Delta Z^{(1)}$  y  $\Delta Z^{(2)}$ , el proceso gamma bivariado  $Z(t_j)^{(1,2)} = (Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})$  es un proceso con incrementos independientes y es un proceso Lévy. Las FDP Marginales  $Z(t_j)^{(1,2)}$  son procesos gamma univariados con parámetros respectivos  $(v_i, u_i)$ , en donde  $v_i = \zeta_i + \zeta_3$

para  $i = 1, 2$ . El coeficiente de correlación  $\rho_{Z(t_j)^{(1,2)}}$  de  $Z_t^{(1)}$  y  $Z_t^{(2)}$  es independiente de  $t$ , está representado de la siguiente manera,

$$\rho_{Z(t_j)^{(1,2)}} = \frac{\zeta_3}{\sqrt{v_i^{(1)} v_i^{(2)}}} \quad (6)$$

La función de densidad bivariada (FDB) conjunta de  $Z(t_j)^{(1,2)}$  está

representada de la siguiente manera,

$$g_{Y_3, Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}}(z_1, z_2, y_3) = \frac{1}{\Gamma(\zeta_1 t) \Gamma(\zeta_2 t) \Gamma(\zeta_3 t)} y_3^{\zeta_3 t - 1} (u^{(1)} z_1 - y_3)^{\zeta_1 t - 1} (u^{(2)} z_2 - y_3)^{\zeta_2 t - 1} e^{y_3 - z_1 - z_2} \quad (7)$$

Para integrar fuera la variable  $Y_3$ , de acuerdo a Kotz *et al.* (2000), es necesario evaluar la integral,

$$\int_0^{\min(u^{(1)} z_1, u^{(2)} z_2)} y_3^{\zeta_3 t - 1} (u^{(1)} z_1 - y_3)^{\zeta_1 t - 1} (u^{(2)} z_2 - y_3)^{\zeta_2 t - 1} e^{y_3} dy_3$$

De esta manera la FDB gamma está definida de la siguiente manera

$$g_{Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}}(z_1, z_2) = \frac{u^{(1)} u^{(2)} e^{-u^{(1)} z_1 - u^{(2)} z_2}}{\Gamma(\zeta_1 t) \Gamma(\zeta_2 t) \Gamma(\zeta_3 t)} (u^{(1)} z_1 - y_3)^{\zeta_1 t - 1} (u^{(2)} z_2 - y_3)^{\zeta_2 t - 1} y_3^{\zeta_3 t - 1} e^{y_3} \quad (8)$$

Con  $0 \leq y_3 \leq \min(u^{(1)} z_1, u^{(2)} z_2)$ ,  $z_1 > 0$  y  $z_2 > 0$ .

### Distribución bivariada de tiempos de falla

La FDP de los tiempos de falla  $\xi$  definida en (5) resulta en una distribución muy compleja con forma no estándar.

generalizada Hipergeométrica. Una distribución aproximada de  $\xi$  esta dada por la distribución Birnbaum-Saunders, la cual está definida de la siguiente manera,

Park y Padgett (2005b) resolvieron esta FDP en términos de una serie

$$BS(\xi, \omega_0, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha^*\beta^*} \left[ \left(\frac{\beta^*}{\xi}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta^*}{\xi}\right)^{3/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^{2*}} \left( \frac{\xi}{\beta^*} + \frac{\beta^*}{\xi} - 2 \right) \right\} \quad (9)$$

En donde,  $\alpha^* = 1/\sqrt{\omega_u}$ ,  $\beta^* = \omega_u/v_i$  y  $\omega_u = \omega_0 - z_0/u$

A su vez, la distribución Birnbaum-Saunders puede ser aproximada a una distribución Gaussiana Inversa, con parámetros  $\mu = \beta^* = \omega_u/v_i$  y  $\lambda = \beta^*/\alpha^{2*} = \omega_u^2/v_i$ . Esto permite una estimación más fácil de los parámetros. La

distribución Gaussiana Inversa está representada de la siguiente manera,

$$IG(\xi, \omega_0, z_0) = \left( \frac{\lambda}{2\pi\xi^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{\lambda(\xi - \mu)^2}{2\mu^2\xi} \right\} \quad (10)$$

Dado que la degradación de cada CD esta modelada por un proceso gamma marginal, entonces es posible obtener dos

distribuciones de tiempos de falla definidas de la siguiente manera,

$$\xi^{(i)} \sim f(\xi^{(i)} | \mu^{(i)}, \lambda^{(i)}) = \left( \frac{\lambda^{(i)}}{2\pi\xi^{(i)3}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{\lambda^{(i)}(\xi^{(i)} - \mu^{(i)})^2}{2\mu^{(i)2}\xi^{(i)}} \right\}, \text{ para } i = 1, 2 \text{ CD}$$

Se asume que la cópula de Frank es una función apropiada para modelar la estructura de dependencia entre las dos

distribuciones marginales. De acuerdo a Nelsen (2006), la FDP de la cópula de Frank está definida de la siguiente manera,

$$c(u, v | \theta) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{[1-e^{-\theta} - (1-e^{-\theta u})(1-e^{-\theta v})]^2} \quad (11)$$

La distribución bivariada conjunta esta defina de la siguiente manera,

$$f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = f(\xi^{(1)} | \mu^{(1)}, \lambda^{(1)}) \cdot f(\xi^{(2)} | \mu^{(2)}, \lambda^{(2)}) \cdot c(F(\xi^{(1)}), F(\xi^{(2)} | \theta) \quad (12)$$

### Caso de Estudio

La modelación propuesta tiene aplicación en la PDA de resistencias de carbono, cuyos datos de degradación se presentan en la Tabla 1. Se asume que un sistema cuenta con dos resistencias independientes, de las cuales su degradación puede causar una falla del sistema total. El comportamiento bivariado de las trayectorias de degradación esta modelado por la FDB (8). Mientras que las distribuciones de tiempos de falla para cada CD están representadas por la FDP en (11).

Para poder obtener las estimaciones del modelo estocástico bivariado es necesario calcular los parámetros de los procesos gamma marginales. De acuerdo a

Devroye (1986) si los parámetros gamma marginales son estimados de antemano existe una solución para  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  y por lo tanto es posible encontrar el coeficiente de correlación  $\rho_{Z(t_j)}^{(1,2)} = \zeta_3 / \sqrt{v_i^{(1)}, v_i^{(2)}}$ . Para encontrar las estimaciones de máxima verosimilitud de los procesos marginales se desarrolló un algoritmo basado en el proceso Newton-Raphson. Mediante este proceso se encontraron los parámetros de forma y escala de ambos procesos  $(v_i^{(1)}, u^{(1)}, v_i^{(2)}, u^{(2)})$ . Los resultados del proceso Newton-Raphson se encuentran en la Tabla 2.

Tabla 1. Incrementos de degradación para dos resistencias de carbono

		Horas x 100											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
<b>Resistencia 1</b>	1	1.005	1.034	1.062	1.077	1.104	1.124	1.141	1.149	1.153	1.158		
	1	1.008	1.018	1.021	1.042	1.06	1.082	1.102	1.114	1.14	1.165		
	1	1.005	1.011	1.019	1.029	1.034	1.035	1.058	1.065	1.09	1.11		
	1	1.009	1.015	1.033	1.037	1.038	1.058	1.068	1.082	1.089	1.103		
	1	1.002	1.016	1.034	1.042	1.06	1.069	1.08	1.099	1.11	1.114		
	1	1.001	1.032	1.044	1.089	1.105	1.11	1.119	1.121	1.133	1.143		
	1	1.011	1.017	1.044	1.064	1.073	1.091	1.105	1.129	1.137	1.155		
	1	1.028	1.032	1.058	1.077	1.11	1.127	1.129	1.142	1.165	1.186		
	1	1.004	1.007	1.01	1.046	1.066	1.088	1.103	1.138	1.143	1.154		
	1	1.011	1.012	1.019	1.033	1.05	1.062	1.071	1.1	1.109	1.111		
	1	1.032	1.052	1.059	1.075	1.09	1.119	1.124	1.133	1.15	1.16		
	1	1.02	1.042	1.058	1.073	1.084	1.146	1.167	1.231				
	<hr/>												
	<b>Resistencia 2</b>	1	1.017	1.055	1.068	1.084	1.111	1.128	1.18	1.214			
		1	1.005	1.014	1.082	1.104	1.132	1.151	1.182	1.186	1.248		
1		1.042	1.049	1.062	1.067	1.086	1.134	1.145	1.185	1.205			
1		1.012	1.049	1.103	1.111	1.12	1.134	1.162	1.214				
1		1.049	1.065	1.094	1.115	1.151	1.173	1.181	1.187	1.228			
1		1.007	1.011	1.014	1.039	1.057	1.064	1.083	1.087	1.153	1.157		
1		1.063	1.092	1.144	1.161	1.201							
1		1.014	1.033	1.071	1.094	1.121	1.141	1.179	1.201				
1		1.045	1.075	1.124	1.143	1.199	1.277						
1		1.078	1.107	1.214									
1		1.048	1.093	1.171	1.205								

Tabla 2 Estimaciones de parámetros marginales de procesos gamma

$z^{(1)}$	Estimación	$z^{(2)}$	Estimación
$v_i^{(1)}$	2.196	$v_i^{(2)}$	2.564
$u^{(1)}$	0.047	$u^{(2)}$	0.044

A partir de las estimaciones que se presentan en la Tabla 2 es posible obtener una estimación del coeficiente de correlación a través de momentos, tomando

$$\hat{\rho} \frac{\sqrt{v^{(1)}v^{(2)}}}{u^{(1)}u^{(2)}} = \frac{\sum_{k=1}^n \left( \Delta z^{(1)} - \frac{v^{(1)}}{u^{(1)}}t \right) \left( \Delta z^{(2)} - \frac{v^{(2)}}{u^{(2)}}t \right)}{\sum_{k=1}^n t - \frac{1}{\sum_{k=1}^n t} \sum_{k=1}^n (t)^2} \quad (13)$$

En donde,  $\Delta z^{(1)}$  representa los incrementos de degradación de la resistencia 1,  $\Delta z^{(2)}$  representa los incrementos de degradación de la Resistencia 2,  $(v^{(i)}, u^{(i)})$  para  $i = 1,2$  representa los parámetros de forma y escala de los procesos gamma marginales y  $t$  representa los incrementos de tiempo de inspección. El coeficiente de correlación encontrado tomando en cuenta (13) fue de 0.78.

en cuenta la FDP en (9). Un estimador empírico de  $\rho$  está definido de la siguiente manera,

A su vez, a partir de las estimaciones de la Tabla 2 es posible obtener los parámetros de las distribuciones de tiempos de falla para cada distribución Gaussiana inversa descrita en (10). Tomando en cuenta que los parámetros  $\mu_i = \omega_u/v_i$ ,  $\lambda_i = \omega_u^2/v_i$  y  $\omega_u = \omega_0 - z_0/u$ , para  $i = 1,2$ . Considerando que el nivel crítico de degradación  $\omega_0 = 1.2$  y que el nivel inicial de degradación es  $z_0 = 0$ . Las estimaciones obtenidas se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Estimación de parámetros de distribuciones Gaussianas inversas

Resistencia	$\mu_i$	$\lambda_i$
1	11.63	296.85
2	10.64	290.09

Es importante notar que el parámetro  $\mu_i$  de la distribución Gaussiana inversa es igual al tiempo medio para la falla (TMPF). Por lo tanto,  $\mu_1 = 11.63$  es el TMPF de la resistencia 1 y  $\mu_2 = 10.64$  es el TMPF para la resistencia 2. Sin embargo, es importante modelar conjuntamente ambas distribuciones marginales Gaussianas inversas con el fin de estimar de manera

conjunta la dependencia que existe entre las distribuciones de tiempos de falla de las dos resistencias. Para esto se toma en cuenta la copula de Frank descrita en (11), con el fin de modelar la distribución bivariada que se presenta en (12). En las Figuras 2 y 3 se presentan las FDP y FDA para la copula de Frank bivariada.

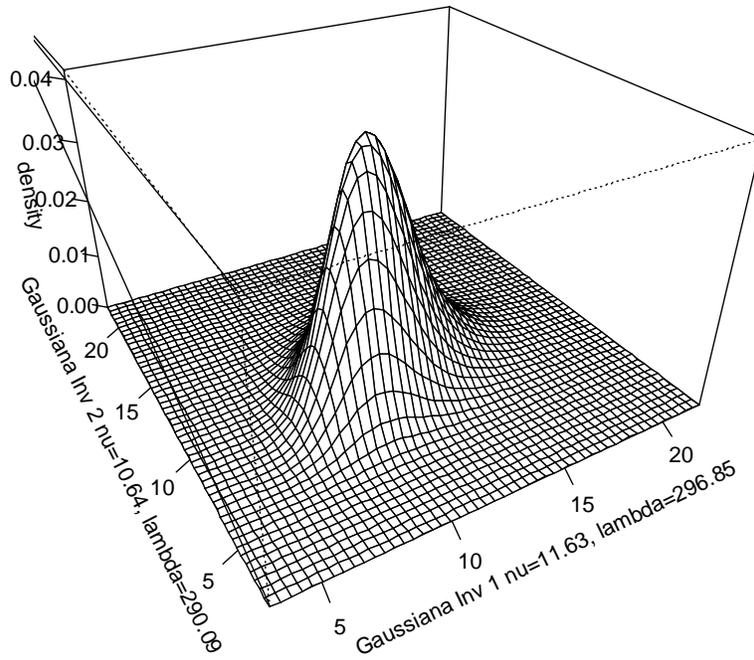


Figura 2. FDP de la copula de Frank bivariada

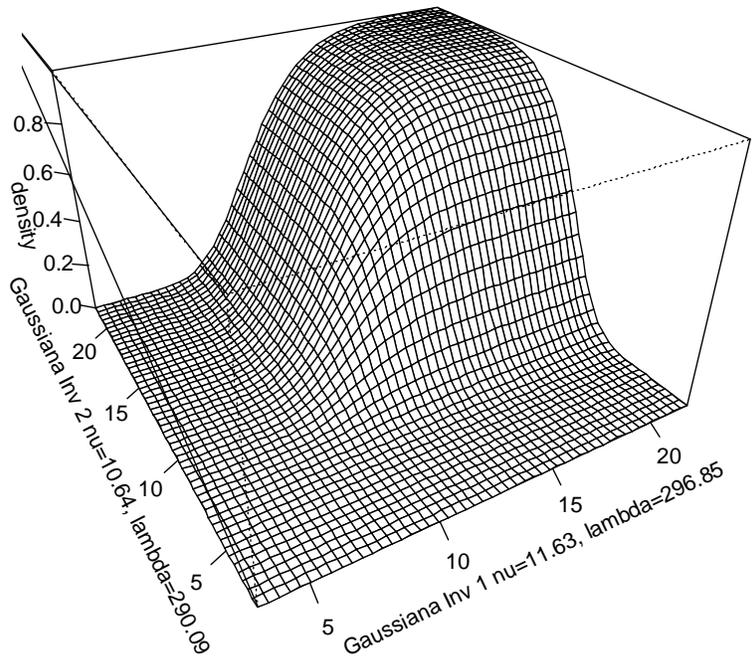


Figura 3. FDA de la copula de Frank bivariada

Las funciones de probabilidad representadas en las Figuras 2 y 3, representan distribuciones paramétricas

mediante las cuales es posible caracterizar la vida o el desempeño de las resistencias de manera conjunta.

## Conclusiones

En este artículo se considera la modelación conjunta de la degradación de dos CD de dos dispositivos basada en procesos estocásticos marginales. Esto asumiendo que los incrementos de degradación son gobernados por un proceso gamma. Para este caso en particular, se consideró un proceso gamma bivariado obtenido a través de reducción trivariada, esta modelación es apropiada para considerar conjuntamente procesos de degradación marginales definidos por cada CD de manera que es posible obtener el coeficientes de correlación para las dos CD. Como se muestra, es posible obtener información robusta con respecto a la confiabilidad del

dispositivo bajo prueba dado que es posible modelar el comportamiento de la trayectoria de degradación y los tiempos de falla conjuntamente. La obtención de una FDP bivariada de los tiempos de falla de las dos CD es un atributo importante de esta investigación dado que es posible caracterizar la distribución de diferentes maneras para obtener información en forma de percentiles. El presente se limite a la modelación de dos procesos de degradación marginales, sin embargo la distribución de tiempos de falla puede extenderse a mas distribuciones marginales lo que implica una oportunidad de investigación a futuro.

## Referencias

Bagdonavicius V, Nikulin MS (2000) Estimation in degradation models with explanatory variables. *Lifetime Data Analysis* 7:85-103.

Bordes L, Paroissin C, Salami A (2010) Combining gamma and Brownian processes for degradation modeling in presence of explanatory variables. *arXiv:1005.1214v1*.

Buijs FA, Hall JW, van Noortwijk JM, Sayers PB (2005) Time-dependent reliability analysis of flood defences using gamma processes. *Safety and reliability of engineering systems and structures - Proceedings of the ninth international conference on structural safety and reliability (ICOSSAR)*, Roma, Italia, 19–23 June 2005. pp. 2209–16.

Devroye, L. (1986). *Non-uniform random variate generation*, Springer, New York, NY, USA.

Kotz S, Balakrishnan N, Johnson NL (2000) *Continuous multivariate distributions, Volume I: models and application*, John Wiley & Sons INC, New York, NY, USA.

Lawless J, Crowder M (2004) Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure. *Lifetime Data Analysis* 10(3):213–227.

Lu CJ, Meeker WQ, Escobar LA (1996) A comparison of degradation and failure-time analysis methods for estimating a time-to-failure distribution. *Statistica Sinica* 6: 531-546.

Meeker WQ, Escobar LA (1998) *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY, USA.

Mercier S, Meier-Hirmer C, Roussignol M (2009) Modelling track geometry by a bivariate gamma wear process, with application to maintenance. Risk and Decision Analysis in Maintenance Optimization and Flood Management, Kallen MJ, Kuniewski SP (eds). IOS Press, pp. 123-136. DOI: 10.3233/978-1-60750-522-8-123. Artículo disponible en: <http://web.univ-pau.fr/~smercier1/Conferences/>

Nelsen RB (2006) An introduction to copulas, Springer, USA.

Noortwijk van JM (2009) A survey of the application of gamma processes in maintenance. Reliability Engineering and System Safety 94: 2-21.

Pan Z, Balakrishnan N (2011) Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma

processes. Reliability Engineering & System Safety 96:949–957.

Park C, Padgett WJ (2005) Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes. Lifetime Data Analysis 11(4):511–27.

Park C, Padgett WJ (2005) New cumulative damage models for failure using stochastic processes as initial damage. IEEE Transactions on Reliability 54(3):530-540.

Park C, Padgett WJ (2006) Stochastic degradation models with several accelerating variables. IEEE Transactions on Reliability 55(2):379-390.

Singpurwalla ND (1995) Survival in dynamic environments. Statistical Science 10(1):86–103.