

Identificación algebraica de parámetros en un sistema térmico descrito por la ley de enfriamiento de Newton

Algebraic Parameter Identification in a Thermal System Described by Newton's Law of Cooling

José Gabriel Mendoza Larios¹ ✉ , Eduardo Barredo Hernández² , Luis Vázquez Sánchez³ , Miguel Alberto Domínguez Gurría⁴ , Demetrio Pérez Viguera¹ 

¹ Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

² Departamento de Ingeniería en Sistemas Automotrices, Universidad Politécnica de Tapachula, Tapachula - Puerto de San Benito, Chiapas, México

³ SECIHTI - Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

⁴ División de Estudios de Posgrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

RESUMEN

En este trabajo se propone implementar la técnica de identificación algebraica para desarrollar identificadores de los parámetros físicos de un sistema térmico gobernado por la ley de enfriamiento de Newton. Los identificadores algebraicos se derivan a partir del modelo dinámico del sistema térmico y se emplean para estimar el parámetro de enfriamiento k , la temperatura ambiente T_a y la temperatura inicial del cuerpo T_0 , utilizando únicamente la señal de temperatura en función del tiempo como dato de entrada. Los resultados obtenidos muestran que los identificadores algebraicos propuestos permiten determinar adecuadamente los parámetros físicos del sistema térmico, incluso en presencia de ruido en la señal de alimentación. Asimismo, se observa que el filtro invariante implementado favorece la convergencia del proceso de identificación cuando la señal de temperatura está afectada por ruido.

PALABRAS CLAVE: identificación algebraica; sistema térmico; ley de enfriamiento de Newton; estimación paramétrica; parámetros físicos.

ABSTRACT

This work presents the implementation of an algebraic identification technique to develop identifiers for the physical parameters of a thermal system governed by Newton's law of cooling. The algebraic identifiers are derived from the dynamic model of the thermal system and are used to estimate the cooling parameter k , the ambient temperature T_a , and the initial body temperature T_0 , using only the time-varying temperature signal as input. The results show that the proposed algebraic identifiers can accurately determine the physical parameters of the thermal system, even in the presence of input-signal noise. In addition, the implemented invariant filter enhances the convergence of the identification process when the temperature signal is corrupted by noise.

KEYWORDS: algebraic identification; thermal system; Newton's law of cooling; parameter estimation; physical parameters.

Correspondencia:

DESTINATARIO: José Gabriel Mendoza Larios

INSTITUCIÓN: Universidad Tecnológica de la Mixteca / Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz

DIRECCIÓN: Av. Dr. Modesto Seara Vázquez n.º 1, C. P. 69004, Acatlma, Heroica Ciudad de Huajuapán de León, Oax., México

CORREO ELECTRÓNICO: jgml@mixteco.utm.mx

Fecha de recepción: 25 de mayo de 2026. **Fecha de aceptación:** 10 de agosto de 2026. **Fecha de publicación:** 29 de agosto de 2026.



I. INTRODUCCIÓN

La ley de enfriamiento de Newton es un modelo térmico que describe el enfriamiento de un cuerpo que intercambia calor con un ambiente a temperatura constante. En su forma clásica, establece una relación exponencial entre la temperatura del cuerpo y el tiempo de enfriamiento, lo cual resulta útil para determinar las propiedades térmicas de los materiales ^[1]. Por esta razón, conocer los parámetros físicos del sistema térmico resulta necesario para caracterizar completamente su comportamiento térmico.

Para determinar los parámetros desconocidos de un sistema dinámico, se puede utilizar una técnica de identificación. La identificación es el proceso mediante el cual se determinan las características o parámetros de un sistema a partir de datos medidos. En la literatura se pueden encontrar diversos enfoques para este propósito, abarcando desde teorías generales de estimación ^[2], ^[3], hasta técnicas específicas de identificación recursiva e integración numérica ^[4], ^[5]. Sin embargo, la mayoría de estos métodos son esencialmente asintóticos, recursivos o complejos, lo que impide su aplicación a sistemas más realistas.

Recientemente, Ševčík *et al.* emplearon técnicas de aprendizaje profundo para identificar la temperatura de unión en dispositivos semiconductores ^[6]. Wang *et al.* utilizaron los métodos de mínimos cuadrados e inferencia bayesiana para la estimación de parámetros desconocidos en el modelo de red térmica de un edificio con calefacción por suelo radiante ventilado ^[7]. Por su parte, Wang *et al.* proponen una metodología de identificación paramétrica basada en un algoritmo mejorado de polinización de flores para la determinación de los parámetros físicos de condensadores ^[8]. A su vez, Liu *et al.* identificaron parámetros térmicos de edificios residenciales que utilizan calefacción eléctrica en invierno mediante redes neuronales basadas en la física ^[9].

Por otro lado, existe en la literatura una técnica de identificación novedosa denominada técnica de identificación algebraica ^[10]. Esta técnica está fundamentada en los principios del álgebra diferencial y el cálculo operacional. Asimismo, se basa en el modelo matemático de un sistema para el desarrollo de modelos de identificación paramétrica totalmente independientes de las condiciones iniciales del sistema. La técnica de identificación algebraica se puede emplear para la estimación

de parámetros tanto en sistemas dinámicos lineales como en sistemas dinámicos no lineales. Además, esta técnica es atractiva en el ámbito científico debido a su rapidez de identificación y su robustez frente a dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y ruido aditivo de alta frecuencia.

La técnica de identificación algebraica ya se ha utilizado para identificar parámetros en diversos sistemas mecánicos, tales como estimación de parámetros de desbalance ^[11], ^[12], ^[13], identificación de coeficientes rotodinámicos de cojinetes ^[14], ^[15], estimación de parámetros físicos en sistemas rotodinámicos ^[16], identificación de parámetros de una suspensión con amortiguador regenerativo ^[17], y la determinación de parámetros térmicos en edificaciones ^[18], entre otros.

En comparación con otros métodos, la técnica de identificación algebraica permite estimar parámetros mediante expresiones explícitas y en intervalos de tiempo reducidos, sin requerir procesos iterativos de optimización. Métodos como mínimos cuadrados, inferencia bayesiana, aprendizaje profundo y redes neuronales también han mostrado buenos resultados en sistemas térmicos, aunque pueden requerir mayor cantidad de datos, etapas de entrenamiento o mayor costo computacional. Por ello, la identificación algebraica constituye una alternativa atractiva por su rapidez y fácil implementación, sin embargo, su desempeño depende de la validez del modelo matemático y puede verse afectado por el ruido.

En esta investigación se plantea aplicar la técnica de identificación algebraica con el fin de desarrollar identificadores que permitan estimar los parámetros físicos de un sistema térmico descrito por la ley de enfriamiento de Newton.

II. METODOLOGÍA

La metodología propuesta parte de la formulación del sistema térmico mediante la ley del enfriamiento de Newton. Posteriormente, se aplica la técnica de identificación algebraica con el propósito de obtener identificadores algebraicos para los parámetros físicos del sistema térmico. Una vez obtenidos, dichos identificadores se implementan computacionalmente y se evalúan mediante simulaciones con datos temporales de temperatura generados a partir de la solución exacta y de la solución numérica de la ley del enfriamiento de Newton. Finalmente, se analizan y discuten los resulta-

dos obtenidos, para después presentar las conclusiones derivadas de la investigación.

2.1. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático considerado se obtiene a partir de la ley de enfriamiento de Newton, que establece que la rapidez de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura instantánea y la temperatura del medio que lo rodea. Bajo esta consideración, el modelo dinámico del sistema térmico se expresa mediante la ecuación diferencial ordinaria [19] siguiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (1)$$

donde $T = T(t)$ representa la temperatura del cuerpo en función del tiempo, T_a es la temperatura ambiente y k es la constante de proporcionalidad conocida como parámetro de enfriamiento.

Bajo la hipótesis de sistemas térmicos concentrados [20], se asume que la temperatura interna del cuerpo permanece uniformemente distribuida en todo instante, por lo que se puede considerar que la temperatura de dicho cuerpo solo depende del tiempo $T(t)$. En consecuencia, el proceso de transferencia de calor puede describirse mediante una sola variable de estado. En este caso, la constante de proporcionalidad k se relaciona con los parámetros físicos del sistema a través de (2):

$$k = \frac{hA}{mc_p} \quad (2)$$

siendo h el coeficiente convectivo de transferencia de calor, A el área de intercambio térmico, m la masa del cuerpo y c_p el calor específico del material. Por lo tanto, k representa un parámetro global que integra tanto la capacidad del sistema para intercambiar calor con el entorno como su inercia térmica. Por otro lado, la ecuación diferencial asociada a la ley de enfriamiento de Newton tiene solución exacta y puede resolverse por distintos métodos, entre los que destacan la separación de variables, el método del factor integrante para ecuaciones lineales de primer orden y la transformada de Laplace. Al aplicar cualquiera de estos métodos es posible obtener la siguiente solución:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (3)$$

donde T_0 es la temperatura inicial del cuerpo.

2.2. IDENTIFICADOR ALGEBRAICO

Una vez establecido el modelo matemático del sistema térmico, se procede al desarrollo de los identificadores algebraicos que permiten estimar los parámetros físicos involucrados en la ley de enfriamiento de Newton. En este caso, k , T_a y T_0 son los parámetros del sistema a identificar.

Con el propósito de facilitar el desarrollo del esquema de identificación, la ley de enfriamiento de Newton se reescribe como sigue:

$$\dot{T} = -k(T - T_a) \quad (4)$$

La técnica de identificación algebraica puede implementarse tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y, dado que la ecuación (4) es lineal, se pueden emplear ambos esquemas. En este trabajo, inicialmente se desarrollarán los identificadores de k y T_a en el dominio del tiempo.

Identificación algebraica de los parámetros k y T_a

Con el fin de desarrollar el identificador, se multiplica la ecuación (4) por $(t - t_0)$ y luego se integra el resultado una vez con respecto al tiempo t , obteniendo:

$$\int (t - t_0) \dot{T} = -k \int (t - t_0)(T - T_a) \quad (5)$$

Para desarrollar el lado izquierdo de la ecuación (5), se aplica el método de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$, definiendo $u = (t - t_0)$ y $dv = \dot{T} dt$, lo que resulta en:

$$\int (t - t_0) \dot{T} = (t - t_0)T - \int T \quad (6)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (5) y resolver la integral asociada al término constante T_a , se obtiene la ecuación (7), reagrupando en el lado izquierdo los términos que contienen los parámetros por identificar.

$$k \int (t - t_0)(T) - \frac{1}{2} k T_a (t - t_0)^2 = \int T - (t - t_0)(T) \quad (7)$$

La ecuación (7) contiene los parámetros k y T_a que se pretenden identificar; sin embargo, solo se dispone de una ecuación. Por ello, es necesario integrar una vez más la ecuación (7), con la finalidad de construir un sistema de ecuaciones lineales cuyo número de ecuaciones

sea igual al de parámetros por determinar. La ecuación resultante se expresa como sigue:

$$k \int (t - t_0)(T) - \frac{1}{6} k T_a (t - t_0)^3 = \int^{(2)} T - \int (t - t_0)(T) \quad (8)$$

donde las integrales presentes en las ecuaciones (7) y (8) son integrales iteradas en el tiempo t de esta forma:

$$\int_{t_0}^{(n)} (t - t_0)^i \varphi(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dots \int_{t_0}^{\sigma_{n-1}} (\sigma_n)^i \varphi(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_1$$

Además, $t_0 \geq 0$ representa el instante inicial de la ventana de observación y no puede tomar un valor negativo.

A continuación, a partir de las ecuaciones (7) y (8), puede formularse un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, cuya expresión queda dada por

$$Q(t)\theta = R(t) \quad (9)$$

donde $\theta = \{k, T_a\}^T$ es el vector de parámetros físicos del sistema térmico que se desea identificar, mientras que $Q(t)$ y $R(t)$ son matrices de dimensiones 2×2 y 2×1 , respectivamente, definidas por

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}$$

Por último, al resolver el sistema de ecuaciones lineales (9) se obtienen los identificadores paramétricos que estiman los valores para k y T_a . Los identificadores propuestos se pueden representar como

$$\begin{cases} \hat{k} = \frac{\Delta_1(t)}{\det[Q(t)]} \\ \hat{T}_a = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta_1(t)} \end{cases} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa) \quad (10)$$

Es pertinente destacar que tanto la matriz $Q(t)$ como el vector $R(t)$ dependen únicamente de la respuesta térmica del sistema, es decir, $T(t)$. Además, la identificabilidad algebraica del vector de parámetros $\{\theta\}$ queda garantizada siempre que se cumpla la condición de no singularidad de $Q(t)$, esto es, $\det[Q(t)] \neq 0$ [10].

Estudios previos han demostrado que esta condición se satisface en un intervalo temporal corto definido por $(t_0, t_0 + \kappa]$, con $\kappa > 0$ suficientemente pequeño. Por otro lado, la solución del sistema de ecuaciones se realizó utilizan-

do la regla de Cramer debido a que el sistema algebraico resultante es de dimensión 2×2 , lo que permite obtener expresiones cerradas para los identificadores y hacer explícita la condición de identificabilidad. Adicionalmente, los determinantes presentes en el identificador algebraico (10) se proporcionan en el [Apéndice](#).

Identificación algebraica del parámetro T_0

Con el fin de desarrollar el identificador algebraico de la temperatura inicial del cuerpo, T_0 , se retoma el modelo dinámico del sistema térmico dado por la ecuación (4) y, posteriormente, se aplica la transformada de Laplace, obteniendo la expresión en el dominio de la frecuencia:

$$sT(s) - T(0) = -kT(s) + \frac{kT_a}{s} \quad (11)$$

Como puede observarse en la ecuación (11), aparece el término $T(0)$, que representa la condición inicial del sistema, es decir, la temperatura inicial del cuerpo T_0 . Para determinar el identificador algebraico de T_0 , es necesario despejar el valor de $T(0)$ de la ecuación (11) y, posteriormente, dividir toda la expresión entre la variable s , obteniéndose

$$\frac{T(0)}{s} = T(s) + k \frac{T(s)}{s} - \frac{kT_a}{s^2} \quad (12)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación (12), se regresa al dominio del tiempo. Por lo tanto, el identificador de T_0 queda definido a partir de

$$\hat{T}_0 = T(t) + k \int_{t_0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa) \quad (13)$$

2.3. FILTRO INVARIANTE

Para mejorar la implementación del identificador algebraico, se propone la incorporación de un filtro invariante [21]. Esta integración permite trabajar con señales más suaves y, al mismo tiempo, disminuir la influencia del ruido presente en la medición, en este caso de la temperatura. Este procedimiento no modifica los valores de los parámetros desconocidos por identificar, ya que el filtrado se realiza de manera uniforme sobre todo el sistema de ecuaciones algebraicas.

De acuerdo con [21], se pueden aplicar filtros invariantes a los identificadores algebraicos desarrollados en este trabajo, como se muestra a continuación:

$$\int_0^w Q(t)\theta = \int_0^w R(t), \quad t > \kappa > 0 \quad (14)$$

$$\int_0^w T_0 = \int_0^w \left[T(t) + k \int_{t_0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma \right], \quad t > \kappa > 0 \quad (15)$$

donde w representa la cantidad de integrales anidadas necesarias para mitigar el efecto del ruido. En teoría, entre mayor sea el valor de w mejor será el desempeño del filtro invariante, sin embargo, tomar valores relativamente grandes para w tiene el efecto negativo de incrementar el costo computacional.

Si en las ecuaciones (14) y (15) se considera que el término w toma un valor de 1, los identificadores algebraicos con filtro invariante se pueden expresar de la siguiente forma

$$Q_f(t)\theta = R_f(t) \quad (16)$$

donde $\theta = \{k, T_a\}^T$ es el vector de parámetros a identificar. Por lo tanto, después de resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los identificadores paramétricos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{k} &= \frac{\Delta_3(t)}{\det[Q_f(t)]} \\ \hat{T}_a &= \frac{\Delta_4(t)}{\Delta_3(t)} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa) \quad (17)$$

donde

$$Q_f(t) = \begin{bmatrix} q_{f11}(t) & q_{f12}(t) \\ q_{f21}(t) & q_{f22}(t) \end{bmatrix} \text{ y } R_f(t) = \begin{bmatrix} r_{f1}(t) \\ r_{f2}(t) \end{bmatrix}$$

Los determinantes y sus coeficientes se proporcionan en el apéndice.

Además,

$$\int T_0 = T_0 t = \int \left[T(t) + k \int_{t_0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma \right]$$

Como resultado el estimador algebraico de T_0 se expresa como

$$\hat{T}_0 = \frac{\int T(t) + k \int_{t_0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma}{t} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa) \quad (18)$$

En el apéndice se presentan los estimadores algebraicos correspondientes a la aplicación de un filtro invariante con $w = 2$.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La evaluación de los identificadores algebraicos se llevó a cabo a partir de datos temporales de temperatura generados tanto con la solución exacta como con la solución numérica del modelo térmico. Asimismo, se analizó el efecto del filtro invariante en los identificadores en presencia de ruido en la señal de temperatura.

3.1. VERIFICACIÓN ANALÍTICA DE LOS IDENTIFICADORES MEDIANTE LA SOLUCIÓN EXACTA

Dado que los estimadores algebraicos del vector de parámetros θ descritos en la Sección 2.2, dependen únicamente de la temperatura $T(t)$, en este primer caso se emplea la solución exacta de la ley de enfriamiento de Newton expresada mediante la ecuación (3) para evaluar dichos identificadores algebraicos. Después de sustituir $T(t)$ en la ecuación (10) y de realizar las operaciones correspondientes se obtienen los resultados para la estimación de k y T_a como sigue

$$\hat{k} = \frac{\Delta_1(t)}{\det[Q(t)]} = \frac{\frac{1}{6k^2}(T_0 - T_a)(k^2 t^2 + 4kt + 6)t^2 e^{-kt}}{\frac{1}{6k^3}(T_0 - T_a)(k^2 t^2 + 4kt + 6)t^2 e^{-kt}} = k$$

$$\hat{T}_a = \frac{\frac{1}{6k^2}T_a(T_0 - T_a)(k^2 t^2 + 4kt + 6)t^2 e^{-kt}}{\frac{1}{6k^3}(T_0 - T_a)(k^2 t^2 + 4kt + 6)t^2 e^{-kt}} = T_a$$

Por otro lado, la identificación de T_0 se lleva a cabo al sustituir $T(t)$ en la ecuación (13) y realizar el tratamiento matemático correspondiente

$$\hat{T}_0 = T(t) + k \int_{t_0=0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} - (T_0 - T_a)(e^{-kt} - 1) = T_0$$

La sustitución de la solución exacta del modelo térmico en las expresiones de identificación conduce analíticamente a k , T_a y T_0 . Por lo tanto, este resultado constituye una verificación de consistencia matemática de los identificadores propuestos, ya que demuestra que, en ausencia de errores numéricos y perturbaciones, las expresiones desarrolladas recuperan exactamente los valores empleados en el modelo.

3.2. VERIFICACIÓN NUMÉRICA DE LOS IDENTIFICADORES

En este segundo caso, la evaluación del desempeño de los identificadores paramétricos se llevó a cabo toman-

do como datos de entrada el vector de temperaturas $\{T(t)\}$, obtenido a partir de la solución numérica de la ecuación (1) al considerar tres conjuntos de parámetros. En la [Tabla 1](#) se muestran los parámetros utilizados en las simulaciones de los identificadores, mientras que en la [Figura 1](#) se presentan las respuestas del sistema térmico empleadas como señal de entrada.

TABLA 1

PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA TÉRMICO

PARÁMETROS	VALOR
k	$[0.02, 0.05, 0.08] \text{ s}^{-1}$
T_a	$[15, 25, 35] \text{ }^\circ\text{C}$
T_0	$[80, 100, 120] \text{ }^\circ\text{C}$

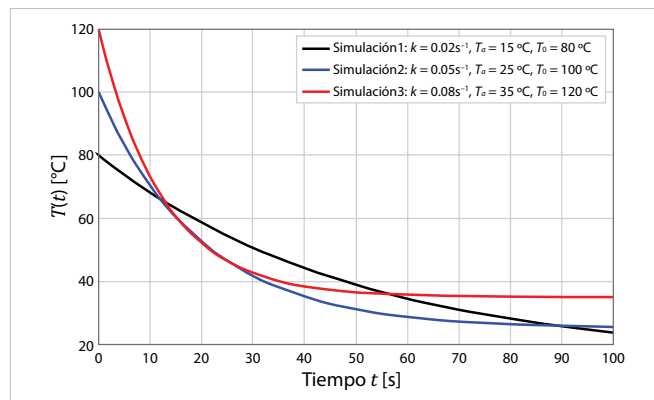


Figura 1. Respuestas del sistema térmico utilizadas como datos de entrada de los identificadores algebraicos.

En las [Figuras 2 a 4](#) se muestran los resultados de la evaluación de los identificadores algebraicos desarrollados para la determinación de los parámetros físicos del sistema térmico, k , T_a y T_0 , empleando como datos de entrada los valores numéricos $T(t)$ presentados en la [Figura 1](#).

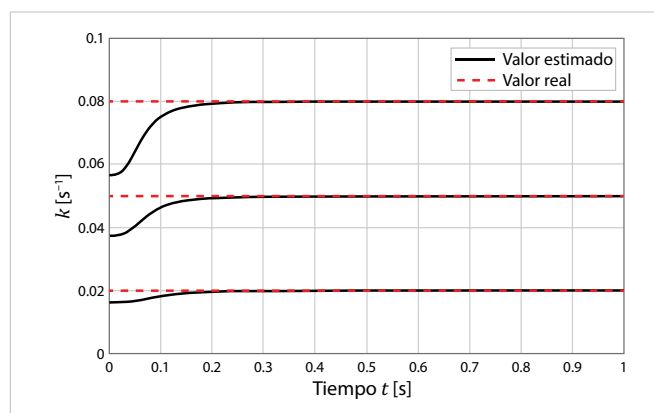


Figura 2. Identificación algebraica del parámetro de enfriamiento k .

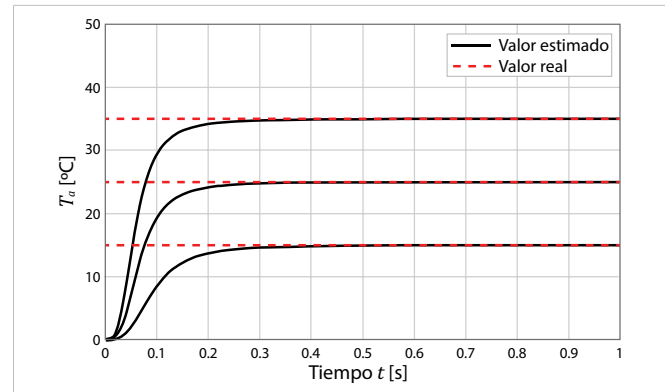


Figura 3. Identificación algebraica de la temperatura ambiente T_a .

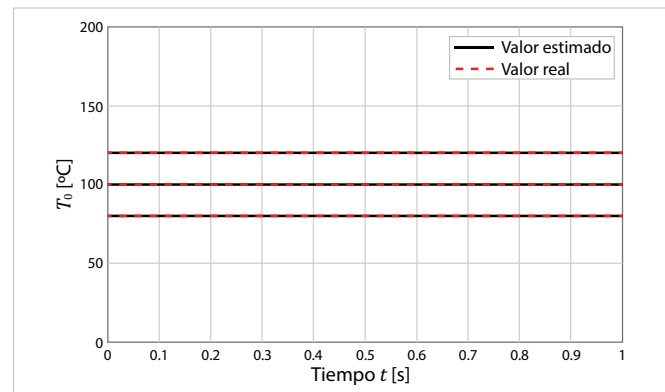


Figura 4. Identificación algebraica de la temperatura inicial del cuerpo T_0 .

Los resultados de la evaluación de los identificadores algebraicos propuestos muestran un desempeño favorable en la determinación de los parámetros físicos del sistema térmico. En las [Figuras 2 a 4](#) se observa la evolución temporal de los identificadores asociados a los parámetros del sistema k , T_a y T_0 , respectivamente. Asimismo, los parámetros del sistema son identificados en un tiempo menor a un segundo, lo que concuerda con los tiempos de identificación reportados en la literatura para aplicaciones de identificación algebraica.

3.3. EVALUACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES EN PRESENCIA DE RUIDO ADITIVO

Se evaluó el desempeño de los identificadores algebraicos cuando la señal de temperatura empleada como dato de entrada se encuentra contaminada con ruido para evaluar la sensibilidad de los identificadores ante perturbaciones en la señal utilizada para la estimación. Para ello, se incorpora artificialmente ruido aditivo a la respuesta térmica, generando un escenario controlado que permite analizar el efecto de las perturbaciones de medición sobre la estimación paramétrica.

Para lo anterior, se considera una señal de temperatura contaminada con ruido la cual se define como

$$T_m(t) = T(t) + \eta(t) \quad (19)$$

donde $T_m(t)$ representa la respuesta del sistema térmico con ruido, mientras que $\eta(t)$ corresponde al término de ruido aditivo introducido artificialmente en la señal de temperatura.

A partir de la señal perturbada de temperatura, se aplican los identificadores algebraicos propuestos en este trabajo para la estimación de los parámetros físicos del sistema térmico k , T_a y T_0 . Adicionalmente, debido a la presencia de ruido en la señal de temperatura, se incorpora además el filtro invariante en los identificadores, con el fin de atenuar las componentes de alta frecuencia y mejorar el proceso de identificación.

Una de las señales de temperatura con ruido utilizada como datos de entrada para los identificadores algebraicos se muestra en la [Figura 5](#).

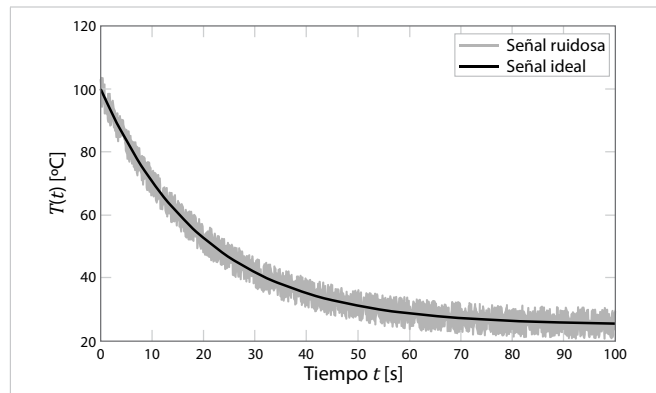


Figura 5. Respuesta del sistema térmico con ruido $\eta(t) \in [-5, 5]$.

En esta figura puede observarse que la perturbación introducida produce pequeñas oscilaciones sobre la tendencia exponencial característica del enfriamiento. Además, el ruido que se sumó a la señal de temperatura corresponde a un proceso estocástico de media cero. Asimismo, la señal artificial de ruido generada sigue una distribución uniforme dentro del intervalo seleccionado. Para el análisis de sensibilidad se consideraron tres niveles de ruido, $[-1, 1]$, $[-2.5, 2.5]$ y $[-5, 5]$, con el propósito de evaluar el comportamiento de los identificadores algebraicos ante diferentes intensidades de perturbación en la señal de entrada.

Adicionalmente, en la [Tabla 2](#) se muestran los valores de los parámetros físicos del sistema térmico utilizado.

TABLA 2

PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA TÉRMICO Y NIVELES DE RUIDO

PARÁMETROS	VALOR
k	0.05 s^{-1}
T_a	$25 \text{ }^{\circ}\text{C}$
T_0	$100 \text{ }^{\circ}\text{C}$
$\eta(t)$	$[-1, 1], [-2.5, 2.5], [-5, 5] \text{ }^{\circ}\text{C}$

Por otro lado, en las [Figuras 6 a 8](#) se presenta de forma gráfica el desempeño de los identificadores algebraicos en la determinación de los parámetros físicos del sistema térmico k , T_a y T_0 , obtenidos a partir de la señal de temperatura con los tres niveles de ruido presentados en la [Tabla 2](#). Asimismo, los modelos de identificación con filtro invariante utilizados en este apartado son los presentados en las ecuaciones (14) y (15).

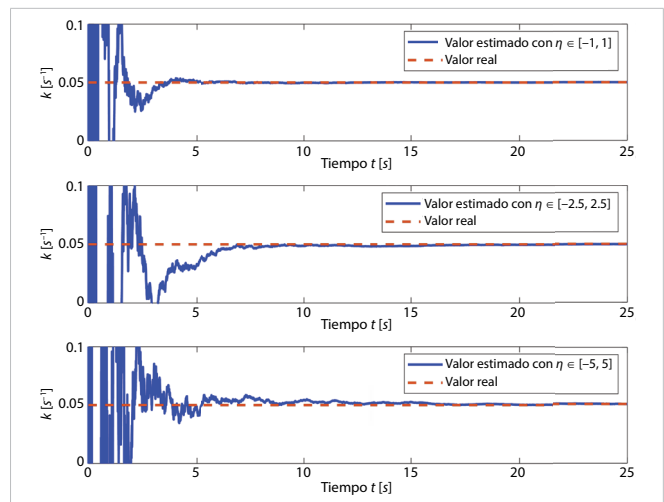


Figura 6. Identificación algebraica del parámetro de enfriamiento k a partir de la señal de temperatura con ruido $T_m(t)$

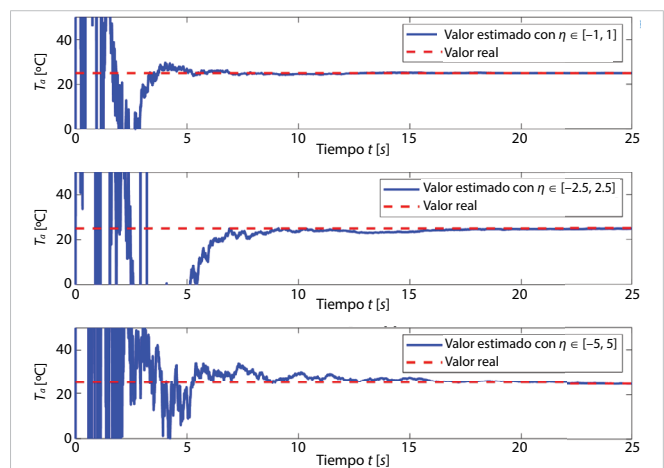


Figura 7. Identificación algebraica de la temperatura ambiente T_a a partir de la señal de temperatura con ruido $T_m(t)$

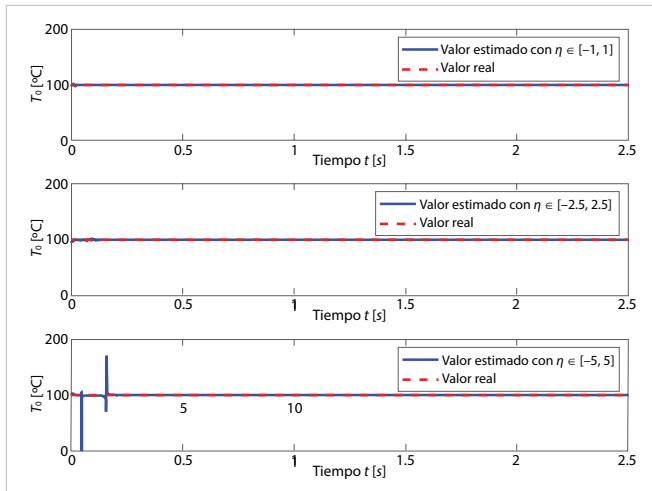


Figura 8. Identificación algebraica de la temperatura inicial del cuerpo T_0 a partir de la señal de temperatura con ruido $T_m(t)$.

En las Figuras 6 a 8 se observa que, a pesar de que la señal de temperatura que alimenta a los identificadores algebraicos contiene ruido, estos logran determinar los parámetros físicos del sistema. En comparación con los resultados obtenidos en ausencia de ruido, se observa que la inclusión de perturbaciones en la señal de entrada incrementa el tiempo necesario para identificar los parámetros del sistema k , T_a y T_0 . Mientras mayor sea la amplitud del ruido, mayor es el tiempo que requiere el identificador para alcanzar los valores reales de los parámetros.

Asimismo, los estimadores exhiben oscilaciones transitorias asociadas a la presencia de ruido y al comportamiento del sistema de identificación durante los primeros instantes de integración, cuando la matriz $Q(t)$ puede encontrarse próxima a una condición singular. Conforme avanza el proceso de identificación y se satisface la condición $\det[Q(t)] \neq 0$, se garantiza la identificabilidad algebraica de los parámetros y las estimaciones tienden hacia sus valores de referencia.

Por otro lado, en la Figura 9 se muestra el comportamiento de los identificadores algebraicos asociados al vector de parámetros θ del sistema térmico. En la simulación se emplearon los identificadores algebraicos sin la incorporación del filtro invariante y se añadió ruido aditivo a la señal de temperatura de entrada $T(t)$. Como puede observarse, la presencia de ruido afecta de manera significativa la estimación del parámetro de enfriamiento k y de la temperatura ambiente T_a , cuyos estimadores presentan oscilaciones de amplitud considerable durante los primeros instantes y disminuyen progresivamente

conforme avanza el tiempo. No obstante, aun después de 100 s de simulación, las estimaciones de k y T_a solo se aproximan a sus respectivos valores de referencia, sin alcanzar una coincidencia estable con ellos. En contraste, el estimador de la temperatura inicial T_0 presenta una menor sensibilidad al ruido y permanece próximo a su valor de referencia. Estos resultados permiten apreciar con mayor claridad la influencia del ruido sobre los identificadores algebraicos y justifican la incorporación del filtro invariante para mejorar el desempeño de la estimación paramétrica cuando la señal de entrada se encuentra contaminada con ruido.

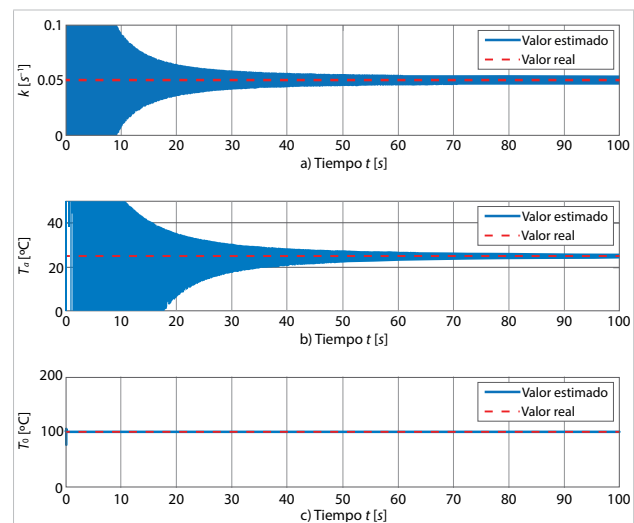


Figura 9. Identificación algebraica de los parámetros del sistema térmico sin filtro invariante y con un nivel de ruido de $\eta(t) = [-1, 1]$: a) parámetro de enfriamiento k , b) temperatura ambiente T_a y c) temperatura inicial T_0 .

Finalmente, en la Figura 10 se presenta el comportamiento de los estimadores algebraicos considerando filtros invariantes con $w = 1$ y $w = 2$. Los resultados muestran que, aunque ambos esquemas presentan oscilaciones durante los primeros instantes del proceso de identificación, el filtro con $w = 2$ atenúa con mayor rapidez dichas variaciones y permite que las estimaciones del parámetro de enfriamiento k y de la temperatura ambiente T_a alcancen sus respectivos valores de referencia en un menor intervalo de tiempo.

Por su parte, la estimación de la temperatura inicial T_0 presenta una rápida convergencia para ambos valores de w . Estos resultados indican que el incremento del número de integraciones del filtro puede mejorar la atenuación de las perturbaciones presentes en la señal de entrada y favorecer la convergencia de los estimadores.

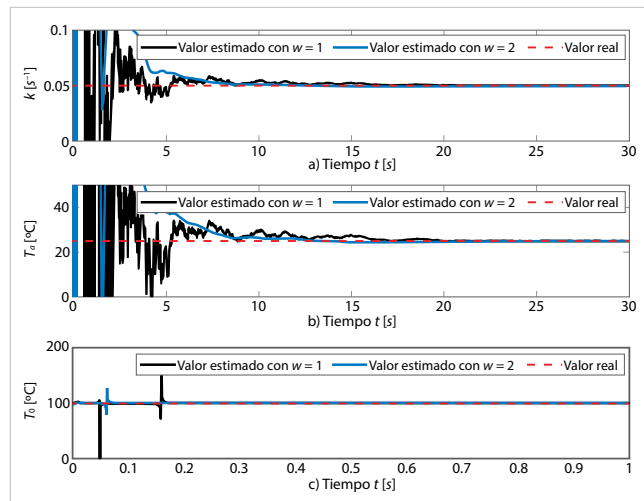


Figura 10. Identificación algebraica de los parámetros del sistema térmico con filtros invariantes $w = 1, 2$ y con un nivel de ruido de $\eta(t) = [-5, 5]$: a) parámetro de enfriamiento k , b) temperatura ambiente T_a y c) temperatura inicial T_0 .

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una metodología basada en la técnica de identificación algebraica para determinar los parámetros físicos de un sistema térmico gobernado por la ley de enfriamiento de Newton. A partir del modelo dinámico del sistema y la técnica de identificación algebraica, fue posible formular estimadores algebraicos para determinar el vector de parámetros físicos del sistema θ , utilizando únicamente la señal de temperatura en función del tiempo $T(t)$.

Los resultados evidencian que el esquema algebraico propuesto estima con alta precisión y rapidez la dinámica paramétrica del sistema térmico. En particular, se observó que, los identificadores en ausencia de ruido en la señal de entrada convergen de manera adecuada hacia sus valores reales en tiempos reducidos. De hecho, los tres parámetros del sistema k , T_a y T_0 , se estimaron satisfactoriamente en menos de un segundo.

Por otro lado, se comprobó que los identificadores algebraicos con filtro invariante, pueden identificar los valores de los parámetros físicos del sistema térmico, aún con la presencia de ruido en la señal de temperatura de entrada. Aunque en estas condiciones el tiempo de identificación aumenta y los identificadores presentan un comportamiento más irregular antes de converger, los identificadores algebraicos desarrollados conservan la capacidad de determinar los parámetros del sistema. Asimismo, la incorporación del filtro invariante permi-

tió mejorar la robustez de los identificadores frente a perturbaciones en la señal de entrada debidas al ruido.

Por lo tanto, los resultados obtenidos permiten concluir que la identificación algebraica constituye una alternativa viable para la estimación de parámetros en sistemas térmicos gobernados por la ley de enfriamiento de Newton. Finalmente, esta metodología puede extenderse a modelos térmicos más complejos o a sistemas con parámetros variables en el tiempo.

Como trabajo futuro, se plantea validar experimentalmente los identificadores algebraicos desarrollados mediante la implementación de un banco de pruebas térmico cuyo comportamiento pueda aproximarse mediante la ley de enfriamiento de Newton. Para ello, se registrará la evolución temporal de la temperatura de un cuerpo sólido durante su proceso de enfriamiento, y la señal experimental $T(t)$ se utilizará como dato de entrada de los identificadores para estimar el parámetro de enfriamiento k , la temperatura ambiente T_a y la temperatura inicial T_0 . Las estimaciones obtenidas se compararán con valores de referencia determinados mediante mediciones con sensores de temperatura. Asimismo, se prevé realizar ensayos bajo diferentes temperaturas iniciales y condiciones ambientales con el propósito de evaluar la sensibilidad y robustez de los identificadores frente al ruido de medición, las dinámicas no modeladas y las incertidumbres propias del sistema térmico. Estos estudios permitirán evaluar el alcance práctico de la metodología propuesta y establecer sus limitaciones bajo condiciones experimentales.

REFERENCIAS

- [1] S. S. Sazhin, V. A. Gol'dshtein, M. R. Heikal, "A Transient Formulation of Newton's Cooling Law for Spherical Bodies", *J. Heat Transfer*, vol. 123, n.º 1, pp. 63-64, feb. 2001, doi: [10.1115/1.1337650](https://doi.org/10.1115/1.1337650).
- [2] L. Ljung, *Systems Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [3] T. Söderström y P. Stoica, *System Identification*. Nueva York: Prentice-Hall, 1989.
- [4] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, "Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter", *Int. J. Control*, vol 50, n.º 2, pp. 457-477, 1989, doi: [10.1080/00207178908953377](https://doi.org/10.1080/00207178908953377).

- [5] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, "Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems", *Automatica*, vol. 26, n.º 1, pp. 63-74, en. 1990, doi: [10.1016/0005-1098\(90\)90158-E](https://doi.org/10.1016/0005-1098(90)90158-E).
- [6] J. Ševčík, V. Šmídl y M. Votava, "Identification of Thermal Model Parameters Using Deep Learning Techniques", *2022 IEEE 31st International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, Anchorage, AK, EUA, 2022, pp. 978-981, doi: [10.1109/ISIE51582.2022.9831641](https://doi.org/10.1109/ISIE51582.2022.9831641).
- [7] F. Wang, J. Guo, Y. Jiang y C. Sun, "Parameter identification framework of thermal network model for ventilated heating floor", *Energy and Buildings*, vol. 311, p. 114138, may. 2024, doi: [10.1016/j.enbuild.2024.114138](https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2024.114138).
- [8] G. Wang, M. Zhang, J. Huang, X. Liu, Q. Wang y D. Shen, "Parameter identification of condenser heat transfer model based on improved flower pollination algorithm", *Sci Rep*, vol. 15, p. 39310, nov. 2025, doi: [10.1038/s41598-025-23041-8](https://doi.org/10.1038/s41598-025-23041-8).
- [9] S. Liu, Q. An, Z. Yuan y P. Lei, "Physics-Informed Neural Networks for Parameter Identification of Equivalent Thermal Parameters in Residential Buildings During Winter Electric Heating", *Processes*, vol. 13, n.º 19, p. 2860, sept. 2025, doi: [10.3390/pr13092860](https://doi.org/10.3390/pr13092860).
- [10] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, "An algebraic frame work for linear identification", *ESAIM: COCV*, vol. 9, pp. 151-168, feb. 2003, doi: [10.1051/cocv:2003008](https://doi.org/10.1051/cocv:2003008).
- [11] L. A. Baltazar-Tadeo et al., "An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks", *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 11, n.º 2, pp. 619-645, jul. 2022, doi: [10.1007/s42417-022-00598-6](https://doi.org/10.1007/s42417-022-00598-6).
- [12] L. A. Baltazar-Tadeo, J. Colín-Ocampo, A. Abúndez-Pliego, J. G. Mendoza-Larios, E. Martínez-Rayón y A. García-Villalobos, "Balancing of Asymmetric Rotor-Bearing Systems Using Modal Masses Array Calculated by Algebraic Identification of Modal Unbalance", *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 12, n.º 3, pp. 4765-4788, oct. 2023, doi: [10.1007/s42417-023-01151-9](https://doi.org/10.1007/s42417-023-01151-9).
- [13] J. U. Quiroz-Bautista, M. Arias-Montiel, J. G. Mendoza-Larios y L. Vázquez-Sánchez, "Experimental implementation of algebraic identifier for unbalance parameters in a rotor-bearing system", *Front. Mech. Eng.*, vol. 11, art. 1553759, pp. 1-11, mar. 2025, doi: [10.3389/fmech.2025.1553759](https://doi.org/10.3389/fmech.2025.1553759).
- [14] J. G. Mendoza-Larios et al., "An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients", *Mathematics*, vol. 9, n.º 21, p. 2747, oct. 2021, doi: [10.3390/math9212747](https://doi.org/10.3390/math9212747).
- [15] S. J. Landa-Damas et al., "A simplified Model for the On-Line Identification of Bearing Direct-Dynamic Parameters Based on Algebraic Identification (AI)", *Mathematics*, vol. 11, n.º 14, p. 3131, jul. 2023, doi: [10.3390/math11143131](https://doi.org/10.3390/math11143131).
- [16] E. Barredo, J. G. Mendoza, L. A. Baltazar y S. J. Landa, "Identificación algebraica de los parámetros físicos de un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad", *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 21, n.º 1, pp. 4-12, feb. 2024, doi: [10.20983/culcyt.2024.1.2.1](https://doi.org/10.20983/culcyt.2024.1.2.1).
- [17] J. E. Martínez, M. A. Domínguez, J. G. Mendoza y E. Barredo, "Identificación paramétrica para un amortiguador regenerativo electromecánico", *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 23, n.º 1, pp. 5-17, mar. 2026, doi: [10.20983/culcyt.2026.1.2.1](https://doi.org/10.20983/culcyt.2026.1.2.1).
- [18] O. A. Hasan, H. Abouaissa y D. Defer, "On-line fast parametric estimation of building thermal behavior using algebraic methods", *2015 IEEE International Conference on Building Efficiency and Sustainable Technologies*, Singapur, 2015, pp. 5-10, doi: [10.1109/ICBEST.2015.7435856](https://doi.org/10.1109/ICBEST.2015.7435856).
- [19] P. Moreira y O. Ortega, "Ley de enfriamiento de Newton con temperatura variable", *Rev. Mex. Fis. E*, vol. 22, n.º 1 en.-jun., p. 010218, en. 2025, doi: [10.31349/RevMexFis.22.010218](https://doi.org/10.31349/RevMexFis.22.010218).
- [20] Y. A. Çengel y A. J. Ghajar, *Transferencia de Calor y Masa: Fundamentos y Aplicaciones*, 6.ª ed. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana Editores, 2020.
- [21] C. Aguilar-Ibanez, J. Sanchez, M. S. Suárez y J. C. Martínez, "On the algebraic reconstruction of the Duffing's mechanical system", *Physics Letters A*, vol. 372, n.º 25, pp. 4569-4573, jun. 2008, doi: [10.1016/j.physleta.2008.04.047](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.04.047).

APÉNDICE

$$\Delta_1(t) = q_{22}(t)r_1(t) - q_{12}(t)r_2(t)$$

$$\Delta_2(t) = q_{11}(t)r_2(t) - q_{21}(t)r_1(t)$$

$$\det[Q(t)] = q_{11}(t)q_{22}(t) - q_{12}(t)q_{21}(t)$$

donde

$$q_{11}(t) = \int (t - t_0)(T)$$

$$q_{12}(t) = -\frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

$$q_{21}(t) = \int^{(2)} (t - t_0)(T)$$

$$q_{22}(t) = -\frac{1}{6}(t - t_0)^3$$

$$r_1(t) = \int T - (t - t_0)(T)$$

$$r_2(t) = \int^{(2)} T - \int (t - t_0)(T)$$

Además,

$$\Delta_3(t) = q_{f22}(t)r_{f1}(t) - q_{f12}(t)r_{f2}(t)$$

$$\Delta_4(t) = q_{f11}(t)r_{f2}(t) - q_{f21}(t)r_{f1}(t)$$

$$\det[Q_f(t)] = q_{f11}(t)q_{f22}(t) - q_{f12}(t)q_{f21}(t)$$

donde

$$q_{f11}(t) = \int^{(2)} (t - t_0)(T)$$

$$q_{f12}(t) = -\frac{1}{6}(t - t_0)^3$$

$$q_{f21}(t) = \int^{(3)} (t - t_0)(T)$$

$$q_{f22}(t) = -\frac{1}{24}(t - t_0)^4$$

$$r_{f1}(t) = \int^{(2)} T - \int (t - t_0)(T)$$

$$r_{f2}(t) = \int^{(3)} T - \int^{(2)} (t - t_0)(T)$$

Identificadores con filtro invariante correspondiente a $w = 2$:

$$\int_{w=2} Q(t)\theta = \int_{w=2} R(t), \quad t > \kappa > 0$$

Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_g(t)\theta = R_g(t)$$

En el sistema de ecuaciones $\theta = \{k, T_a\}^T$, representa el vector de parámetros a identificar. Por tanto, los estimadores algebraicos se expresan como:

$$\left. \begin{aligned} \hat{k} &= \frac{\Delta_5(t)}{\det[Q_g(t)]} \\ \hat{T}_a &= \frac{\Delta_6(t)}{\Delta_5(t)} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa)$$

donde

$$Q_g(t) = \begin{bmatrix} q_{g11}(t) & q_{g12}(t) \\ q_{g21}(t) & q_{g22}(t) \end{bmatrix} \text{ y } R_g(t) = \begin{bmatrix} r_{g1}(t) \\ r_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_5(t) = q_{g22}(t)r_{g1}(t) - q_{g12}(t)r_{g2}(t)$$

$$\Delta_6(t) = q_{g11}(t)r_{g2}(t) - q_{g21}(t)r_{g1}(t)$$

$$\det[Q_g(t)] = q_{g11}(t)q_{g22}(t) - q_{g12}(t)q_{g21}(t)$$

Coefficientes de los determinantes

$$q_{g11}(t) = \int^{(3)} (t - t_0)(T)$$

$$q_{g12}(t) = -\frac{1}{24}(t - t_0)^4$$

$$q_{g21}(t) = \int^{(4)} (t - t_0)(T)$$

$$q_{g22}(t) = -\frac{1}{120}(t - t_0)^5$$

$$r_{g1}(t) = \int^{(3)} T - \int^{(2)} (t - t_0)(T)$$

$$r_{g2}(t) = \int^{(4)} T - \int^{(3)} (t - t_0)(T)$$

Adicionalmente,

$$\int_{w=2} T_0 = \int_{w=2} \left[T(t) + k \int_{t_0}^t (T(\sigma) - T_a) d\sigma \right]$$

dando como resultado el estimador algebraico para T_0 :

$$\hat{T}_0 = \frac{2 \left[\int^2 T(t) + k \int^3 (T(t) - T_a) \right]}{t^2} \Bigg\} \forall t \in (t_0, t_0 + \kappa)$$