

Una herramienta de cálculo simbólico matricial para el aprendizaje del álgebra lineal

A Tool of Symbolic Matrix Calculation for Learning Linear Algebra

Dra. Eloisa Benitez Mariño¹ , Dr. José Rigoberto Gabriel Argüelles¹  

¹ Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo mostrar una herramienta computacional que usa cálculo simbólico matricial, para apoyar en la resolución de una variedad de problemas en la introducción al álgebra Lineal. La herramienta ha sido utilizada con tres grupos de generaciones distintas de una Licenciatura en Matemáticas. Se ha observado que la herramienta ayuda a que los estudiantes disminuyan los errores cuando trabajan con operaciones de matrices, donde los coeficientes son números racionales o números complejos. Dado que los tiempos en clase se disminuyen al evitar operaciones aritméticas, se contó con más tiempo para aplicar la teoría, a la solución de problemas prácticos. Las conclusiones del trabajo muestran que, esta herramienta tecnológica disminuye la barrera para acceder a ciertos aspectos que los estudiantes deben dominar al concluir un curso de álgebra lineal, fortaleciendo el desarrollo de su pensamiento matemático teórico y práctico.

PALABRAS CLAVE: pensamiento teórico; pensamiento práctico; operaciones elementales de fila.

ABSTRACT

This research aims to present a computational tool based on symbolic matrix computation designed to assist students in solving a wide range of problems in an introductory linear algebra course. The tool was implemented with three cohorts of undergraduate mathematics students. The results showed that students significantly reduced errors in matrix operations involving rational or complex coefficients. By reducing the time devoted to arithmetic calculations, more class time could be allocated to applying theoretical concepts to practical problems. The findings suggest that the use of technology serves as a bridge between the theoretical and practical competencies expected in a linear algebra course, enabling students to develop both conceptual understanding and problem-solving skills.

KEYWORDS: theoretical thinking; practical thinking; elementary row operations.

Correspondencia:

DESTINATARIO: Dr. José Rigoberto Gabriel Argüelles
INSTITUCIÓN: Universidad Veracruzana /
Facultad de Matemáticas
DIRECCIÓN: Paseo núm. 112, Lt.2, colonia Nuevo Xalapa, C. P.
91097, Xalapa, Veracruz, México
CORREO ELECTRÓNICO: jgabriel@uv.mx

Fecha de recepción: 24 de marzo de 2026. **Fecha de aceptación:**
29 de agosto de 2026. **Fecha de publicación:** 30 de septiembre
de 2026.



Licencia Creative Commons



I. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es un curso obligatorio y fundamental para las licenciaturas que pertenecen al STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Matemáticas), debido a las múltiples aplicaciones que se han desarrollado en diversas disciplinas de la ciencia. En matemáticas, el álgebra lineal es la base de muchas otras áreas, por ejemplo, se utiliza en programación lineal, teoría de juegos, optimización, cadenas de Markov, procesos estocásticos de horizonte finito, estadística, ecuaciones diferenciales y análisis funcional, entre otras.

1.1. CONTEXTO HISTÓRICO

De manera informal, se puede decir que los orígenes del álgebra lineal tienen lugar en los sistemas de ecuaciones lineales, los cuales posiblemente surgieron hace 4000 años en Babilonia. En las tablas de arcilla se han encontrado sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En el año 200 A.C., los chinos desarrollaron un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales 3×3 , usando una técnica similar al método de Gauss, donde solo utilizaban arreglos de los coeficientes de las ecuaciones ^[1].

Curiosamente, el concepto de determinante surgió antes que las matrices; lo utilizó Leibniz en 1693 para resolver sistemas de ecuaciones lineales y, no obstante, esta investigación permaneció sin conocerse. Cramer, en 1750, publicó un método que utilizaba determinantes para resolver sistemas de ecuaciones y cuya solución resolvía problemas de curvas algebraicas. En el siglo XIX surgen los conceptos de matrices, transformaciones lineales, independencia lineal, bases, dimensión, operaciones algebraicas de matrices, valores propios y forma canónica de Jordan, entre otros ^[2].

Es importante mencionar que los conceptos anteriores, que en la actualidad forman parte de los programas de estudios de un curso de álgebra lineal, fueron desarrollados como herramientas para dar solución a problemas tanto de matemáticas como de física. El concepto de espacio vectorial, que es la base del álgebra lineal en los libros de textos actuales, surgió después de algunos de los conceptos mencionados anteriormente. Por lo tanto, se puede afirmar que los conceptos del álgebra lineal, en un principio, fueron utilizados para dar solución a problemas prácticos, es decir, los matemáticos de aquellas épocas desarrollaron el pensamiento práctico.

En siglo XIX y en primeras décadas del XX, se realizó el proceso de axiomatización de los espacios vectoriales, lo cual dio origen a una nueva disciplina de las matemáticas que hoy se conoce como el álgebra lineal. En 1844, Grassmann, en su trabajo “Doctrine of linear extension”, construye un espacio n -dimensional mediante un conjunto de combinaciones lineales, utilizando como escalares a los números reales y vectores unitarios. Entre los conceptos que Grassmann desarrolla en su trabajo se encuentran el de subespacio, conjunto generador, independencia lineal, base, dimensión y transformación lineal ^[2].

En 1888, Giuseppe Peano, apoyándose en el trabajo de Grassmann, publica un libro donde trabaja de manera axiomática con un concepto matemático, al que llamó un “sistema lineal”, que en realidad es el concepto moderno de un espacio vectorial. En 1890, Salvatore Pincherle publica varios artículos, donde usa un enfoque axiomático para resolver problemas de ecuaciones diferenciales e integrables. En esencia, este trabajo se basa en el estudio de espacios vectoriales de funciones de dimensión finita. En el libro de 1909, Cesare Burali-Forti y Roberto Marcolongo dan la definición axiomática de “sistemas lineales” y de manera conjunta o separada, publican varios artículos sobre métodos vectoriales aplicados a matemáticas y física ^[3].

Como ocurre frecuentemente en el área de las matemáticas puras, algunos conceptos se formalizan mediante un proceso de axiomatización. Este fue el caso de los espacios vectoriales, los cuales están dotados de dos operaciones (suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector) y en aquella época existían varios conjuntos que cumplían con la axiomatización, por lo tanto, las propiedades que se cumplían en un espacio vectorial general se deberían cumplir en los espacios particulares.

Los trabajos sobre una teoría axiomática de los espacios vectoriales continuaron, con los trabajos de Hermann Weyl, Ernst Steinitz, Bartel L. Van der Waerden y Maurice Fréchet, entre otros. La axiomatización de los espacios vectoriales se concluye con el libro *Théorie des opérateurs linéaires* de Stefan Banach, en 1932, material en el que con enfoque completamente teórico y una presentación axiomática se trabaja tanto en espacios vectoriales de dimensión finita, como en espacios vectoriales de dimensión infinita. Además, se presentan numerosas aplicaciones a muchos de los problemas clásicos de esa

época. A partir de este momento, va a predominar el enfoque axiomático de los espacios vectoriales, principalmente en análisis funcional y álgebra moderna. En 1942, Halmos publica el libro *Finite-dimensional vector spaces* con un enfoque formalista similar a los de los Bourbaki. Así, este se convertiría en un libro de texto del álgebra lineal que se estudia en la universidad, principalmente en los departamentos de matemáticas [3].

Un trabajo de los matemáticos profesionales es el de extender o generalizar la teoría matemática, lo cual sucedió con los espacios vectoriales, por ejemplo, el concepto de conjunto linealmente independiente se generalizó para un conjunto con una infinidad de vectores. Uno de estos conjuntos es el conjunto de polinomios de la forma $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$, que es un conjunto de funciones de los números reales, a los números reales, que es linealmente independiente. Entonces, el conjunto de funciones no puede ser de dimensión finita y debe surgir de manera natural los espacios vectoriales de dimensión infinita. Esto es un ejemplo de cómo el concepto de espacio vectorial tomó un enfoque abstracto y completamente general.

A partir de la publicación del libro *Finite-dimensional vector spaces*, de Halmos, los cursos de álgebra lineal se impartieron de manera axiomática, con un enfoque riguroso, donde se estudian las propiedades generales de los espacios vectoriales, de dimensión finita e infinita, y se espera que los estudiantes, al tener un dominio de la teoría, puedan aplicar los conceptos del álgebra lineal para dar solución de manera práctica a una serie de problemas concretos de otras áreas. Lo anterior generó una problemática para los estudiantes, debido a que está documentado los problemas que tienen varios de ellos para reproducir demostraciones, hacer conjeturas y realizar sus propias demostraciones, así como comprender conceptos matemáticos generales y abstractos.

1.2. JUSTIFICACIÓN

En muchos países del mundo, en los años sesenta del siglo pasado tuvo lugar un movimiento educativo conocido como la matemática moderna y consistió en enseñar conceptos abstractos desde la educación básica, de forma axiomática e inductiva, teniendo como objetivo que los estudiantes comprendieran estos conceptos y realizaran de manera satisfactoria demostraciones de proposiciones matemáticas desde la secundaria. Además, se incluyó en los cursos de bachillerato el álgebra

lineal de manera formal. Lo anterior generó dificultades y obstáculos cognitivos, lo cual condujo a que la teoría formal de los espacios vectoriales desapareciera de los currículos de la educación media superior, en la década de los ochenta del siglo pasado [3], por todas las dificultades que presentaba para los alumnos.

El movimiento de la matemática moderna es considerada un fracaso [4], debido principalmente a que la mayoría de los estudiantes, sobre todo en el nivel de secundaria, no cuentan con las competencias necesarias para entender conceptos abstractos y realizar demostraciones de proposiciones matemáticas, que es un proceso cognitivo muy difícil, incluso para alumnos del nivel universitario.

A finales de los años ochenta y principios de los noventa del siglo XX, se inicia la investigación de la didáctica del álgebra lineal, debido a que investigadores en educación matemática expresan las grandes dificultades que tienen los estudiantes universitarios para entender conceptos de esta área de las matemáticas, principalmente por los cursos abstractos y el enfoque axiomático que tienen estos cursos [4].

En [3] se menciona una gran cantidad de dificultades que experimentaron estudiantes universitarios sobre diversos temas del álgebra lineal, agrupada en lo que llaman el obstáculo del formalismo, el cual surge de manera natural cuando los alumnos se enfrentan con un primer curso abstracto, con enfoque axiomático, inductivo y analítico. Además, el objetivo de este curso es comprender las propiedades generales de los espacios vectoriales y la teoría relacionada con estos, con la idea de aplicarlos en problemas prácticos, lo cual no se cumplía.

En las últimas décadas, las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra lineal se han incrementado notablemente. Por ejemplo, en la revista *ZDM*, el número 7 del volumen 52 está dedicado a la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. En particular, Stewart *et al.* [5] presentan un análisis de 54 artículos de investigación en temas de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, los cuales fueron publicados entre 2008 y 2017. Los autores agrupan las investigaciones en geometría, prueba y esquema de desarrollo a través de conceptos del álgebra lineal; investigación sobre la comprensión de los contenidos específicos de los estudiantes y la investigación sobre innovaciones instruccionales (incluyendo el papel de la tecnología).

El volumen mencionado de ZDM da un panorama de las principales líneas de investigación que se han desarrollado en la didáctica del álgebra lineal. En particular, el concepto de vector puede ser introducido mediante la geometría en el plano o la geometría en el espacio, donde muchas propiedades en estos espacios se pueden generalizar a espacios más abstractos, como son los R^n .

Algunos investigadores han considerado que las pruebas o demostraciones de proposiciones del álgebra lineal son importantes para el desarrollo conceptual de los estudiantes, sin embargo, cuando se usa la tecnología, en particular el software de manipulación simbólica, los estudiantes pueden apoyarse en la tecnología para encontrar conjeturas e ideas que le ayuden a desarrollar procesos de demostración.

En el ICME-13 (13th International Conference on Mathematics Education) se presentó el grupo de discusión "Teaching Linear Algebra". Algunas de las preguntas claves de la discusión de este grupo fueron:

- ¿Cuáles son las ventajas de demostrar resultados en álgebra lineal y en diferentes formas?
- ¿De qué manera se puede utilizar la tecnología en la enseñanza del álgebra lineal?
- ¿Cuál es el papel de la visualización en el aprendizaje del álgebra lineal?
- ¿De qué manera, imágenes, símbolos, definiciones y teoremas, entre otros, se pueden utilizar para enseñar los conceptos de álgebra lineal?

Algunas de las respuestas de las preguntas anteriores, nos sirven para hacer propuestas de actividades didácticas, donde la visualización y la tecnología puede ser una herramienta que permita a los estudiantes comprender mejor los conceptos del álgebra lineal, puedan realizar conjeturas y desarrollen ideas para realizar demostraciones de proposiciones.

Como resultado del Grupo de Discusión del ICME se publicó un libro, con 18 capítulos, de autores de 9 países. Los capítulos fueron agrupados de la siguiente manera:

- Perspectivas teóricas elaboradas a través de tareas.
- Análisis de los enfoques y recursos de los estudiantes.
- Enfoques de geometría dinámica.
- Tareas desafiantes con pedagogía en mente.

En este libro se presenta una gran variedad de problemáticas que tienen los alumnos al trabajar con conceptos del álgebra lineal [6].

Recientemente, Stewart *et al.* [7] examinaron 49 artículos de investigación sobre temas de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, publicadas entre 2016 y abril 2024. Estos autores usan el modelo de pensamiento teórico y práctico de Sierpinska para agrupar las investigaciones en cuatro grandes grupos:

- Entendimiento práctico de la teoría.
- Fomento del pensamiento teórico.
- Caminos para enseñar el arte de las matemáticas.
- Realineando el currículo.

Los artículos mencionados por Stewart *et al.* dan un panorama sobre las dificultades que los estudiantes siguen teniendo y cómo diferentes marcos teóricos y metodológicos se han implementado con alumnos para mejorar el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal.

Desde la publicación en 2002, del libro *On the teaching of linear algebra*, de Dorier, se han generado una gran cantidad de investigaciones didácticas del álgebra lineal. Sin embargo, todavía existen muchas dificultades de los estudiantes que toman este curso en el nivel universitario, más aún, los alumnos cometen muchos de los errores que se mencionaban desde finales del siglo pasado.

En las últimas décadas se generaron dos enfoques para la impartición de la asignatura de álgebra lineal: a) el enfoque axiomático y b) el enfoque práctico.

El primer enfoque se imparte en el área de ciencias, principalmente en licenciaturas en matemáticas, donde un libro de texto clásico es el de Hoffman [8]. El objetivo es que los estudiantes comprendan las definiciones, proposiciones, lemas, teoremas y corolarios para que puedan elaborar y desarrollar demostraciones. Sin embargo, también se pide a los alumnos resolver problemas prácticos, utilizando procedimientos y métodos que se derivan directamente de la teoría.

Cabe aclarar que el programa del curso es muy amplio y en las sesiones de clase no da tiempo de desarrollar los procedimientos y métodos para resolver ciertos problemas, por ejemplo, invertir una matriz con coeficientes reales o complejos. Por lo tanto, se asume que los estudiantes, al entender la teoría, pueden sin ninguna

dificultad desarrollar y justificar dichos procedimientos y métodos.

El otro enfoque, que se utiliza en los cursos de ingenierías, computación y, en general, en las ciencias administrativas y económicas, es práctico, donde la teoría del álgebra lineal es sustituida por la enseñanza de procedimientos y métodos para dar respuesta a problemas concretos en los espacios R^n , en espacios de matrices y, en algunos casos, en ciertos espacios de funciones. Un libro de texto clásico para este caso es el de Grossman [9]. Sin embargo, en este enfoque, los estudiantes no desarrollan la teoría de los espacios vectoriales y tampoco justifican los procedimientos que sigue para dar respuesta a ciertos problemas. Uno proceso concreto puede ser el de “calcular la inversa de una matriz”, en el cual aplican las mismas operaciones elementales de fila a la matriz que quieren invertir y a la matriz identidad, sin embargo, no se comprende por qué este método da la matriz inversa.

1.3. MARCO CONCEPTUAL

Para el desarrollo de la secuencia didáctica se asumió que el pensamiento matemático está basado en la interacción del pensamiento práctico y el teórico, en concordancia con el modelo establecido por Sierpinska [10] y [11]. El pensamiento práctico se puede caracterizar mediante los procedimientos, métodos, algoritmos y acciones, entre otros, que los estudiantes utilizan para resolver ciertos tipos de problemas matemáticos. Por lo tanto, es necesario que los alumnos cuenten con conocimientos matemáticos adecuados y suficientes, los cuales serán utilizados como herramientas operativas (no necesariamente conceptuales) que les ayude a dar solución al problema. El pensamiento práctico se puede apoyar en gráficos, tablas, ejemplos concretos, manipulaciones simbólicas y en general en imágenes concretas.

El pensamiento teórico se caracteriza por trabajar en un sistema formal que puede contener axiomas, postulados, hipótesis, definiciones, proposiciones, teoremas y corolarios, los cuales deben comprenderse de manera adecuada. También se deben relacionar y estructurar los diversos conceptos matemáticos y trabajar con abstracciones y generalizaciones de ciertos objetos. Lo anterior, con la finalidad de producir argumentos y justificar los procesos empleados en las demostraciones.

En [12] se menciona que en el marco de Sierpinska existen tres modos de pensamiento en álgebra lineal que

están relacionados con los tipos de representaciones que usen. El modo de pensamiento sintético-geométrico surge cuando los conceptos están relacionados con sus propiedades geométricas, por ejemplo, cuando se visualizan vectores en el plano y en el espacio, mediante segmentos dirigidos y se interpreta que la suma de vectores cumple la ley del paralelogramo.

El pensamiento analítico-aritmético surge cuando se consideran aspectos algebraicos y numéricos de los conceptos, por ejemplo, la multiplicación de dos matrices 3×3 , con coeficientes racionales o cuando se tiene que encontrar de manera específica el subespacio generado por tres vectores, los cuales pertenecen a R^3 .

El tercer modo es el pensamiento analítico-estructural basado en un lenguaje formal y los conceptos son generalizaciones de casos específicos, los cuales cumplen ciertas propiedades, sin importar el espacio vectorial al que pertenezcan. Por ejemplo, cuando se quiere probar la siguiente proposición: en todo espacio vectorial V de dimensión finita, cada subespacio vectorial W es de dimensión finita y la dimensión de W es menor o igual a la dimensión de V .

Sierpinska [10] menciona que el pensamiento teórico no es suficiente para resolver problemas novedosos y reporta que en su investigación los alumnos que obtuvieron soluciones a problemas conceptuales no solo eran pensadores teóricos, sino que habían desarrollado la comprensión práctica de la teoría. Por tanto, se considera de vital importancia desarrollar el pensamiento práctico y teórico en un curso de álgebra lineal y mostrar la existencia de los tres modos de pensamiento, resaltados por Sierpinska, al menos para estudiantes de licenciaturas que forman parte del STEM.

Centrar un curso de álgebra lineal solamente en el pensamiento teórico, como se hace en los cursos de las licenciaturas en matemáticas, conduce a que solo una pequeña parte de los estudiantes obtengan resultados satisfactorios y una mayoría de los alumnos no alcancen este logro. Por otra parte, cuando el curso solo se centra en los aspectos prácticos, sin desarrollar la teoría necesaria, los alumnos pueden resolver ciertos tipos de problemas mediante la aplicación de métodos, procedimientos y algoritmos aprendidos de memoria, sin lograr comprender los conceptos matemáticos utilizados o saber la razón por la cual los procedimientos conducen a una solución.

En la actualidad existe mucho software de matemáticas que utilizan cálculo simbólico, por ejemplo, Mathematica, MatLab y Python, entre otros. Estos paquetes tienen incluidos módulos que sirven para realizar cálculos numéricos y algebraicos con matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Uno de los detalles que se tiene con el uso de ellos es que son considerados “cajas negras”, donde el usuario introduce un objeto matemático y el software le devuelve otro objeto, sin embargo, no se sabe que procedimiento se utilizó para encontrar el objeto final.

El software mencionado anteriormente contiene funciones para trabajar de manera simbólica con matrices. Más aún, existen subrutinas que obtienen la inversa de una matriz, la matriz escalón reducida por filas, el determinante de una matriz, resuelven sistemas de ecuaciones lineales y estas son herramientas que facilitan el cálculo matricial. Sin embargo, no se presentan los procedimientos que el software utiliza para llegar a los resultados.

Para fines de enseñanza del álgebra lineal, los estudiantes deben desarrollar los procedimientos numéricos y algebraicos para dar solución a problemas típicos del álgebra lineal, en virtud de que en estos procedimientos se recuerda y se aplica la teoría. Un concepto fundamental en la teoría de matrices y en los sistemas de ecuaciones lineales son las operaciones elementales de fila.

Problemas clásicos del álgebra lineal donde se utilizan operaciones elementales de fila son los siguientes: invertir una matriz, probar que un conjunto finito de vectores es linealmente dependiente o independiente, encontrar el espacio generado por un conjunto finito de vectores, probar que un conjunto finito de vectores es una base, encontrar el espacio fila o el espacio columna de una matriz, encontrar la matriz cambio de base, encontrar la matriz asociada a una transformación lineal, encontrar el núcleo y la imagen de una transformación lineal, entre otros.

Para esta investigación se trabajó en Mathematica y Python y se elaboró un programa que realiza las siguientes operaciones elementales de fila: intercambiar dos filas de una matriz, multiplicar una fila de una matriz por un escalar distinto de cero y multiplicar una fila de una matriz por un escalar y sumar dicha fila a otra fila de la misma matriz.

Con el uso de una interfaz gráfica, el usuario del programa introduce una matriz, cuyas entradas pueden ser números con decimales, racionales, complejos e inclusive parámetros representados por letras, por ejemplo, y_1, y_2, y_3, y_4 . Después, el usuario puede utilizar tres subrutinas (operaciones elementales de fila) para encontrar la matriz escalón, reducida por filas, y en cada operación que realiza, en la interfaz gráfica le aparece la matriz equivalente, con entradas “exactas”, es decir, las operaciones se realizan de manera simbólica.

La herramienta diseñada permite al usuario avanzar en su pensamiento práctico, en virtud de que puede encontrar de manera muy sencilla y rápido las matrices equivalentes que se obtienen al aplicar operaciones elementales de fila. También pueden encontrar patrones al aplicar la herramienta a una serie de problemas similares, por ejemplo, si el estudiante trabaja con problemas de dependencia o independencia lineal deberá construir un sistema de ecuaciones lineales y con el uso de la herramienta encontrará que la matriz asociada al sistema de ecuaciones, tiene al menos una fila de ceros, cuando los vectores son linealmente dependientes y si los vectores son linealmente independientes, entonces siempre encontrará la matriz identidad, lo cual es un resultado de la teoría. Por lo tanto, la herramienta sirve para relacionar el pensamiento teórico con el práctico.

Si en un curso se implementara el uso de un software de operaciones matriciales donde los alumnos puedan resolver ciertos problemas, entonces los estudiantes tendrían la competencia para manejar un paquete computacional de cálculo matricial. No obstante, surgen ciertos cuestionamientos cuando los alumnos usan un software de cálculo simbólico matricial, por ejemplo, ¿los estudiantes pueden resolver problemas prácticos, relacionar la teoría y desarrollar su pensamiento teórico? En esta investigación se trata de dar respuesta a esta pregunta.

En la presente investigación se diseñaron actividades didácticas que utilizan una herramienta computacional, con la finalidad de apoyar el desarrollo de las distintas formas de pensamiento señaladas por Sierpinski.

II. METODOLOGÍA

En esta investigación se utilizó una metodología de tipo exploratoria-descriptiva, mediante una lista de problemas prácticos, en el sentido del pensamiento práctico

de Sierpinska, los cuales fueron presentados a los estudiantes en una videoproyección en el horario de clase.

En esta investigación se reporta un estudio basado en la técnica de observación de grupos de estudiantes, donde se analizó el apoyo que brindó la tecnología a los alumnos de un curso de álgebra lineal y se observó lo que puede aportar esta forma de enseñanza a la comprensión de los conceptos de álgebra lineal. Por lo tanto, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo apoya a los estudiantes una herramienta de cálculo simbólico matricial en la resolución de problemas prácticos de esta disciplina?

La hipótesis de trabajo es que el uso de la herramienta permite observar el trabajo de los estudiantes con los distintos modos de pensamiento y la forma que relacionan la teoría con los problemas prácticos.

La exploración se llevó a cabo mediante una serie de actividades que fueron aplicadas a tres grupos distintos, de estudiantes de una licenciatura en matemáticas, los cuales cursaban la primera parte de álgebra lineal. La ruta de enseñanza consideró algunas sesiones para el desarrollo de la teoría de forma axiomática con el método inductivo y demostrando una gran cantidad de resultados matemáticos.

En otras sesiones, se resolvieron problemas prácticos y se utilizó un software que permite trabajar con operaciones elementales de fila de matrices y realiza operaciones aritméticas “exactas” con números racionales, números complejos y manejo simbólico en una interfaz. Antes de iniciar la primera sesión, se mostró de manera detallada algunos aspectos importantes de la herramienta computacional y se analizó el programa que realizan las operaciones elementales de fila.

Una sesión para la resolución de problemas se llevó a cabo de la siguiente manera:

- a) El profesor planteó a los alumnos un problema, el cual podría resolverse utilizando los conocimientos teóricos, que se había visto con anticipación.
- b) El profesor preguntó sobre el procedimiento para resolver el problema. Si algún alumno manifestaba una idea para encontrar la solución, se trataba de seguir el procedimiento propuesto y en caso de que no resultara viable, el profesor daba argumen-

tos para no seguir esa ruta. Si los alumnos no aportaban ideas para el procedimiento de solución, el profesor les recordaba algunas definiciones y resultados teóricos, con el objetivo de que los alumnos relacionaran la teoría con el problema práctico y pudieran encontrar el procedimiento para resolver el problema.

- c) En el procedimiento para dar solución al problema que se planteó conducía a una matriz, la cual se le deberían aplicar operaciones elementales de fila para encontrar la matriz escalón reducida por filas. Aquí es donde se utiliza la herramienta de cálculo simbólico matricial, con la finalidad de evitar operaciones aritméticas y algebraicas.
- d) Después de utilizar la herramienta computacional, el profesor solicitaba a los estudiantes que interpretaran el resultado obtenido para encontrar la solución al problema.

Uno de los autores impartió a tres grupos distintos el curso de Álgebra Lineal I, en una licenciatura en matemáticas en una universidad pública de México. Los cursos se impartieron en los semestres lectivos febrero 2024 - julio 2024, febrero 2025 - julio 2025 y agosto 2025 - enero 2026. En el primer curso asistieron regularmente a clases 10 alumnos, en el siguiente curso 9 alumnos y en el último 27 alumnos. Los cursos fueron de tres sesiones semanales de 2 horas y se impartió durante 15 semanas. En cada curso se realizaron cinco sesiones para aplicar las actividades didácticas y se utilizó un videoproector conectado a una computadora y un pizarrón.

2.1. PROGRAMA DEL CURSO ÁLGEBRA LINEAL

Todos los planes de estudios de las licenciaturas en matemáticas contemplan al menos un curso de álgebra lineal. Por ejemplo, el programa de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Veracruzana ^[12] en su justificación menciona la importancia que tiene el álgebra lineal en la formación de licenciados en matemáticas, dado que dota a los estudiantes de conceptos abstractos y estructuras algebraicas. También menciona la importancia que tiene la teoría para las aplicaciones prácticas. Por lo tanto, el curso debe tener aspectos teóricos y prácticos. Sin embargo, los libros que se proponen en la bibliografía son en su mayoría libros abstractos con enfoques axiomáticos, como el libro de Halmos que se comentó en la introducción de este artículo.

De acuerdo con la experiencia de los autores de esta investigación, el enfoque abstracto y axiomático del curso de álgebra lineal no ha cambiado en los últimos 30 años. Cada curso se imparte siguiendo de manera textual algunos de los libros clásicos y se demuestra una gran cantidad de resultados teóricos y en algunas ocasiones se ejemplifica la teoría, con problemas concretos en R^n para $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, en un espacio de matrices concreto o un subespacio de polinomios de dimensión finita.

Aunque el curso es muy teórico, los exámenes que se aplican tienen más del 50 % de los reactivos con problemas prácticos, que incluyen conceptos en espacios vectoriales concretos. Después de realizar una cantidad apropiada de estos problemas, muchos estudiantes logran dominar los procedimientos de solución y aprobar el curso, pero no consiguen desarrollar un pensamiento teórico adecuado. También, conviene hacer énfasis en muchos de los errores que los alumnos cometen al resolver problemas prácticos que surgen al hacer operaciones con números racionales, donde deben dar la solución en forma simbólica, es decir, no pueden aproximar los números racionales mediante expresiones decimales y los errores aumentan al trabajar con números complejos.

Un problema clásico de un examen de álgebra lineal puede ser el siguiente: encontrar las matrices inversas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1+i & 3-2i \\ 1-3i & 5-3i \end{bmatrix} \quad (1)$$

Las soluciones al problema anterior son:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{43} & \frac{-32}{129} & \frac{-2}{129} \\ \frac{3}{43} & \frac{6}{43} & \frac{5}{43} \\ \frac{-7}{43} & \frac{1}{129} & \frac{8}{129} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{145} - \frac{49}{145}i & -\frac{7}{290} - \frac{61}{290}i \\ \frac{14}{145} + \frac{23}{145}i & \frac{12}{145} - \frac{1}{145}i \end{bmatrix} \quad (2)$$

En problemas como el anterior, algunos alumnos cometen errores aritméticos y obtienen una matriz que no es la inversa de la matriz original, lo cual tiene como consecuencia que al estudiante no se le asigne la puntuación del reactivo. Además, los alumnos consumen bastante tiempo en el examen realizando operaciones aritméticas. Se considera que el resultado final es muy importante, pero se debería tomar en consideración el procedimiento utilizado. Más aún, debería mostrar (por escrito o ver-

bal) que tiene un manejo adecuado de las operaciones elementales de fila y como caso “ideal”, tendrían que ser capaces de justificar el proceso para invertir matrices, con base en la teoría de las matrices elementales.

2.2. ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

En las sesiones se trabajaron los siguientes problemas, que fueron tomados de [8].

1. Encontrar la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

2. ¿El siguiente vector $(3, -1, 0, -1)$ pertenece al subespacio W de R^4 , el cual está generado por los vectores $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ y $(1, 1, 9, -5)$?
3. ¿Qué condición debe cumplir un vector de la forma (y_1, y_2, y_3, y_4) para que pertenezca al subespacio W de R^4 , el cual está generado por los vectores $(1, -2, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, 2)$, $(3, 1, -2, 3)$ y $(2, 2, -1, 3)$?
4. Considere el conjunto W de todos los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ en R^5 que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar un conjunto finito de vectores que generen el subespacio W .

5. Demostrar que los vectores $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$ y $(0, -3, 2)$ forman una base para R^3 . Expresar los vectores de la base canónica como combinación lineal de estos vectores.
6. ¿Son los vectores $(1, 1, 2, 4)$, $(2, -1, -5, 2)$, $(1, -1, -4, 0)$ y $(2, 1, 1, 6)$ linealmente independientes en R^4 ?
7. Sea V el espacio vectorial sobre los números reales, el cual está generado por las filas de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar una base para V .

8. Sea T una transformación lineal de R^3 a R^3 dada por la expresión siguiente:

$$T[(x_1, x_2, x_3)] = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

9. Encontrar la imagen, el núcleo, el rango y la nulidad de T .

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se da una descripción de lo ocurrido en la aplicación de las actividades a los tres grupos y se harán las observaciones que se consideran más relevantes y que fueron comunes en los tres experimentos.

3.1. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Por cuestiones de espacio solo se expondrá enseguida tres de los problemas que se trabajaron con los estudiantes.

El problema 3 es una pregunta muy común que forma parte de algún examen en un curso de álgebra lineal. Al realizar el planteamiento a los estudiantes se encontró que existían problemas para comprender el concepto de independencia lineal de vectores, a pesar de que el concepto de independencia lineal ya se había estudiado en forma teórica.

Después de algunas intervenciones del profesor, algunos alumnos respondieron que un conjunto linealmente independiente es conjunto que no es linealmente dependiente y que para probar que algo es tal, lo que se debe hacer es tomar una combinación lineal de los vectores e igualar esta combinación al vector cero y si existe al menos un escalar diferente de cero y se cumple la igualdad, entonces se puede afirmar que el conjunto es linealmente dependiente.

El profesor aclaró a los estudiantes que un conjunto finito de vectores es linealmente independiente o es linealmente dependiente, es decir, estos conceptos son

opuestos y confirmó que una forma de resolver el problema es tomar una combinación lineal de los cuatro vectores e igualarla al vector cero. Por lo tanto, se planteó lo siguiente:

$$c_1(1, 1, 2, 4) + c_2(2, -1, -5, 2) + c_3(1, -1, -4, 0) + c_4(2, 1, 1, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

Se realizaron varias operaciones algebraicas y el profesor hizo mucho énfasis en las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector, para este espacio específico. Se obtuvo esta igualdad:

$$(c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4, c_1 - c_2 - c_3 + c_4, 2c_1 - 5c_2 - 4c_3 + c_4, 4c_1 + 2c_2 + 6c_4) = (0, 0, 0, 0)$$

El profesor pidió analizar esta última ecuación e interpretar, con la finalidad de poder continuar con la solución al problema. Los alumnos mencionaron que aplicando la definición de igualdad de vectores en R^4 , se obtendría un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 - c_3 + c_4 &= 0 \\ 2c_1 - 5c_2 - 4c_3 + c_4 &= 0 \\ 4c_1 + 2c_2 + 6c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El profesor cuestionó a los alumnos acerca de qué relación existe entre el concepto de linealmente independiente o dependiente con este sistema de ecuaciones lineales. Los alumnos mencionaron que el sistema anterior era homogéneo y que se había probado en clase que un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene únicamente la solución trivial o tiene una infinidad de soluciones.

Por lo tanto, se tenía que resolver el sistema de ecuaciones para conocer si el sistema tiene solo la solución trivial o tiene una infinidad de soluciones. Para ello se tenía que utilizar el método de Gauss-Jordan, para lo cual se debe encontrar la matriz de coeficientes y después aplicarle operaciones elementales de fila, hasta encontrar una matriz escalón reducida por filas.

En este momento de la actividad se procedió a utilizar el software y los alumnos participaron indicando en cada paso qué operación elemental de fila se debería aplicar. A continuación, se muestran algunas de las matrices que generó el software.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -9 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Una vez que se obtuvo la matriz R , la discusión versó sobre cómo interpretar la forma de esta matriz y su relación con la dependencia o independencia lineal. Algunos alumnos argumentaron que para que el sistema de ecuaciones tuviera como solución solamente a la trivial, es decir, el vector con entradas todas cero, la matriz R debía ser la matriz identidad 4×4 y este no era el caso.

Otros alumnos mencionaron que al tener R dos filas nulas, entonces el sistema de ecuaciones relacionado con R , es un sistema con más incógnitas que ecuaciones y entonces existían una infinidad de soluciones, en particular se podría encontrar una solución donde algunos c_i debían ser distinto de cero. Ambas argumentaciones fueron correctas y se concluyó que los vectores son linealmente dependientes.

En la forma en que se desarrolló la actividad se pudo constatar que los alumnos sí habían comprendido algunos conceptos teóricos, sin embargo, en un primer momento no supieron cómo plantear el problema y a medida que la actividad se desarrolló, los resultados teóricos emergieron de manera más natural para justificar el procedimiento y para dar respuesta al problema. Lo anterior coincide con lo afirmado por Sierpinski acerca de que el pensamiento práctico ayuda a los estudiantes a desarrollar su pensamiento teórico.

En el problema 2, el profesor preguntó sobre el conjunto generado por un número finito de vectores y sus propiedades. Entre las respuestas obtenidas destacan que el conjunto generado por un número finito de vectores es un subespacio vectorial de dimensión finita, que dicho conjunto se obtiene tomando todas las combinaciones lineales de los vectores y que en particular el vector cero es una combinación lineal de dichos vectores.

Cuando el profesor preguntó sobre el método o procedimiento para dar respuesta al problema, hubo al principio confusión sobre cómo resolverlo. Después de algunos comentarios del profesor y de los alumnos, se

llegó al consenso que para que un vector pertenezca al espacio generado por otros vectores, este tenía que ser una combinación lineal de dichos vectores, por lo que se planteó si es posible que ocurra lo siguiente:

$$c_1(2, -1, 3, 2) + c_2(-1, 1, 1, -3) + c_3(1, 1, 9, -5) = (3, -1, 0, -1)$$

Después de realizar algunas operaciones algebraicas, se obtuvo esta igualdad:

$$(2c_1 - c_2 + c_3, -c_1 + c_2 + c_3, 3c_1 + c_2 + 9c_3, 2c_1 - 3c_2 - 5c_3) = (3, -1, 0, -1)$$

El profesor preguntó qué relación existe entre la igualdad anterior y la solución al problema planteado. Los estudiantes mencionaron que la igualdad se puede convertir en un sistema lineal no-homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Dicho sistema es:

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + c_3 &= 3 \\ -c_1 + c_2 + c_3 &= -1 \\ 3c_1 + c_2 + 9c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 3c_2 - 5c_3 &= 0 \end{aligned}$$

En esta parte de la actividad, el profesor preguntó sobre las soluciones del sistema. Los estudiantes mencionaron que, de acuerdo con la teoría, el sistema puede tener solución o no tener solución.

Entonces, el profesor pidió que relacionen la afirmación anterior con la pregunta del problema y después de una discusión se llegó al consenso de que si el sistema no tiene solución entonces el vector $(3, -1, 0, -1)$ no pertenece al espacio generado por los vectores y si existe solución del sistema entonces dicho vector pertenece al espacio generado.

El paso siguiente fue resolver el sistema de ecuaciones y para ello se utilizó el software. Primero se encontró la matriz aumentada y se procedió a calcular la matriz escalón reducida por filas de la matriz de coeficientes. En este paso se les explicó a los estudiantes que se pueden aplicar las operaciones elementales de fila a la matriz aumentada, que contiene la matriz de coeficientes y la matriz columna de requerimientos. A continuación, se muestran algunas de las matrices que generó el software.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 12 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = RM$$

Se realizó un análisis, conjuntamente con los estudiantes de la matriz RM y, en particular, los alumnos mencionaron que como las primeras tres entradas de la fila tercera son cero y la cuarta entrada de esta fila es -7 , entonces existía una inconsistencia, la cual indicaba que en la tercera ecuación del sistema asociado a la matriz RM , el primer miembro era cero y el segundo miembro era -7 , lo cual no es posible y la interpretación que se le dio fue que el sistema de ecuaciones no tiene solución, lo cual implica que el vector $(3, -1, 0, -1)$ no está en el espacio generado por los vectores.

Nuevamente, en este problema los estudiantes no usaron la teoría en un inicio para plantear un procedimiento que de solución al problema. Con el apoyo del profesor y con preguntas detonadoras se logró que los estudiantes recordaran el concepto de combinación lineal y espacio generado. Después se dieron cuenta de que para probar que un vector está en el espacio generado por un conjunto finito de vectores, se requiere resolver un sistema de ecuaciones no homogéneo.

Se utilizó la herramienta computacional para evitar cálculos numéricos, sin embargo, los estudiantes debían dar la instrucción para reducir la matriz a una matriz escalón reducida por renglones.

También es importante resaltar que los estudiantes lograron asociar un sistema de ecuaciones lineales con la matriz RM y, a partir de ahí, argumentaron que existía una inconsistencia, porque la matriz reducida-aumentada tenía una fila con tres ceros y un número distinto de cero. Por lo tanto, la inconsistencia conducía a que el sistema de ecuaciones lineales original no tiene solución y se podía concluir que el vector no estaba en el espacio generado.

En este problema también se pudo constatar que el pensamiento práctico requiere del pensamiento teórico y que al resolver problemas prácticos se refuerza el pensamiento teórico.

En el problema 3, que es una generalización del anterior, se solicitó caracterizar a los vectores que pertenecen al espacio generado por cuatro vectores. A pesar de que se trabajó con los estudiantes un caso particular de este problema, ellos no podían establecer con claridad cómo encontrar la condición pedida. El trabajar con un vector general de la forma (y_1, y_2, y_3, y_4) generó conflictos cognitivos en los alumnos y no lograban desarrollar un procedimiento de resolución para este caso.

Después de varios cuestionamientos que hizo el profesor y con el análisis de casos particulares, como el problema 2, los estudiantes lograron establecer que para que el vector (y_1, y_2, y_3, y_4) estuviera en el espacio generado por los vectores, este debía ser combinación lineal de los vectores y por lo tanto se debía cumplir lo siguiente:

$$c_1(1, -2, -1, 1) + c_2(-1, 1, 1, 2) + c_3(3, 1, -2, 3) + c_4(2, 2, -1, 3) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

donde y_1, y_2, y_3 e y_4 son números reales cualesquiera, es decir, son parámetros. En este momento, el profesor hizo una explicación amplia sobre la diferencia entre variable, incógnita y parámetro. En particular, él mencionó que un parámetro es una variable que, en este caso, puede ser cualquier número real, sin embargo, su valor permanecerá fijo durante el proceso.

Como los alumnos han adquirido experiencia con problemas de independencia lineal y con el conjunto generado en casos específicos, entonces ellos plantearon el siguiente sistema de ecuaciones lineales que es equivalente a la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 3c_3 + 2c_4 &= y_1 \\ -2c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 &= y_2 \\ -c_1 + c_2 - 2c_3 - c_4 &= y_3 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 3c_4 &= y_4 \end{aligned}$$

Algunos alumnos mostraron confusión en el sistema anterior, debido a que ellos visualizaban ocho incógnitas $c_1, c_2, c_3, c_4, y_1, y_2, y_3$ e y_4 , lo cual generó complicaciones para poder resolver el sistema de ecuaciones. Nuevamente el profesor explicó la diferencia entre incógnita y parámetro, haciendo mención que a pesar de que las coordenadas del vector (y_1, y_2, y_3, y_4) pueden tomar distintos valores, este vector se fija (parámetro) y por lo tanto, cada vector genera un sistema de ecuaciones, sin embargo, el sistema se puede resolver, sin necesidad de considerar valores particulares de las y .

Después de la explicación se logró que los estudiantes comprendieran que el método de Gauss-Jordan se puede aplicar al sistema anterior, en el cual se debe realizar operaciones simbólicas en el lado derecho de cada ecuación en virtud que no se conocía su valor, porque las y pueden tomar cualquier valor real.

Nuevamente se utilizó el software para resolver el sistema de ecuaciones y se resaltó que, en este caso, la tecnología ayudo considerablemente a facilitar los cálculos numéricos y algebraicos, que por lo regular deben hacer los alumnos con lápiz y papel. Además, se ahorra mucho tiempo en clase y este tiempo fue utilizado para resolver más problemas. Algunas de las matrices que se generaron son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & y_1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & y_2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & y_3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & 7 & 6 & 2y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & -2y_1 + y_4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & -7 & -6 & -2y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & -2y_1 + y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 & -y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & -7 & -6 & -2y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 0 & 23 & 23 & 6y_1 + 4y_2 + y_4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3y_1 - y_2 + 4y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5y_1 - y_2 + 7y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17y_1 + 4y_2 - 23y_3 + y_4 \end{pmatrix} = RMY$$

Como se resolvió un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales y la última fila de la matriz RMY sus primeras cuatro entradas son ceros, los estudiantes argumentaron que se debe cumplir la siguiente condición:

$$-17y_1 + 4y_2 - 23y_3 + y_4 = 0$$

Aunque la relación anterior es la respuesta del problema, el profesor planteó las siguientes preguntas:

- ¿El vector $(1, 1, 1, 1)$ está en el espacio generado por los vectores?
- ¿Los vectores $\{(1, -2, -1, 1), (-1, 1, 1, 2), (3, 1, -2, 3), (2, 2, -1, 3)\}$ cumplen la condición que se encontró?
- ¿Se puede encontrar un vector distinto de los que generan el espacio generado?
- ¿El vector $(0, 0, 0, 0)$ está en el espacio generado?
- ¿Cómo definiría de manera formal el espacio generado?
- ¿Los cuatro vectores que generan al espacio son li-

nealmente independientes?

- ¿Cómo se puede encontrar un base para el espacio generado?
- ¿Cuál es la dimensión del espacio generado?

Algunas de las preguntas anteriores se podrían responder de manera rápida si los estudiantes hubieran desarrollado un adecuado pensamiento teórico. Por ejemplo, los cuatro vectores que generan el espacio forman parte de este espacio y por lo tanto deben satisfacer la condición. Sin embargo, los alumnos comprobaron la condición para cada vector y se sorprendían al ver que la satisfacían dicha condición.

Los estudiantes tuvieron dificultades para dar respuesta a la pregunta c) y aunque existe una infinidad de vectores en el espacio generado, no podían dar explícitamente un vector. Después de algunos comentarios del profesor, los alumnos comprendieron que lo que debían hacer es darle algunos valores específicos a las y para encontrar un vector que satisficiera la condición por ejemplo el vector $(0, -1, 0, 1)$. En el caso de la pregunta d), se esperaba que al ser el espacio generado un subespacio lineal, entonces los alumnos contestaran que el vector cero estaba en el espacio generado, sin embargo, lo que ellos hicieron fue corroborar que el vector cero satisface la condición para afirmar que efectivamente este forma parte del espacio generado.

Una manera de responder la pregunta f) es recordando que si los cuatro vectores fueran linealmente independientes, entonces formaría una base para R^4 y por lo tanto, el espacio generado por ellos sería R^4 , lo cual no es cierto, de donde los vectores son linealmente dependientes. Los estudiantes no razonaron de esta manera, sino que algunos sugirieron llevar a cabo el procedimiento para ver si un conjunto es linealmente dependiente o independiente, realizando el proceso de tomar la combinación lineal de estos vectores e igualando al vector cero.

Después de algunos comentarios del profesor, los alumnos lograron darse cuenta de que el vector (y_1, y_2, y_3, y_4) en particular puede ser el vector $(0, 0, 0, 0)$ y, por lo tanto, el proceso de resolver un sistema de ecuaciones se había ya realizado en general. Entonces, en este caso particular, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene una infinidad de soluciones y que por ello los cuatro vectores son linealmente dependientes.

A pesar de que en este problema los estudiantes tuvie-

ron muchas confusiones y no pudieron utilizar la teoría para dar respuestas más simples a la preguntas que adicionó el profesor, los estudiantes ya tenían procedimientos alternativos para dar solución a las respuestas y cuando se les dio las respuestas, solo utilizando la teoría y sin necesidad de volver a realizar procedimientos, los alumnos lograron comprender aspectos teóricos, como son: los vectores que generan un espacio pertenecen al espacio y para que los vectores forman una base entonces las primeras columnas de matriz escalón reducida, debe ser la matriz identidad, entre otros.

3.2. OBSERVACIONES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Las actividades se aplicaron a tres grupos distintos y todos los estudiantes manifestaron que les gustó esta forma de trabajo y que fue de mucha ayuda en su aprendizaje. También comentaron que al iniciar el trabajo con problemas prácticos no entendían cómo la teoría debería utilizarse para dar respuesta a los problemas y que con la mecánica de las actividades fueron reforzando su conocimiento teórico y aprendieron cómo utilizarlo en problemas específicos. Enseguida, se mencionan las aportaciones más importantes que tuvo esta investigación.

Se pudo corroborar lo mencionado por Sierpinska ^[10], que el pensamiento teórico no es suficiente para resolver problemas prácticos, es decir, en los cursos tradicionales de álgebra lineal en una licenciatura en matemáticas el énfasis recae en la teoría y se espera que los estudiantes desarrollen las habilidades para resolver problemas prácticos, sin embargo, se ha observado que los estudiantes aprenden procedimientos, métodos y algoritmos sin justificarlos y su conocimiento teórico es endeble. Sin embargo, con estas actividades los estudiantes resolvieron problemas, utilizando su pensamiento teórico y práctico.

En la secuencia didáctica se observó que con el uso de la tecnología y combinando el pensamiento teórico con el práctico se forma una “dualidad”, donde los procedimientos para resolver problemas prácticos se justifican a partir de la teoría y la resolución de problemas prácticos refuerza la teoría. Por lo tanto, este tipo de secuencia didáctica genera herramientas que los estudiantes puede utilizar en cursos de aplicaciones de las matemáticas, como son: probabilidad, estadística, ecuaciones diferenciales, cálculo en varias variables y optimización, entre otros.

También se constató que los tres modos de pensamiento que propone Sierpinska en su modelo, se pueden desarrollar en un curso de álgebra lineal mediante la secuencia didáctica que se describió anteriormente. Por ejemplo, los estudiantes desarrollaron el pensamiento sintético-geométrico al trabajar con problemas en el plano y en el espacio. Un problema que se trabajó en los cursos es el de encontrar todos los subespacios propios de R^3 y la respuesta que se encontró es que son todos los planos que pasan por el origen, todas las rectas que pasan por el origen y el conjunto formado por el origen.

La secuencia didáctica se enfoca principalmente en el pensamiento analítico-aritmético, donde los problemas presentados están en espacios vectoriales concretos y en la resolución de los problemas los estudiantes deben realizar operaciones aritméticas y algebraicas, sin embargo, como en las actividades se justifica el procedimiento de solución, entonces puede ser aplicado a cualquier espacio vectorial de dimensión finita, por lo tanto, de manera natural surge el pensamiento analítico-estructural, donde los estudiantes deben recordar y saber manejar los conceptos y resultados teóricos.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se dio un panorama general sobre una secuencia de actividades didácticas, la cual fue aplicada a tres grupos de estudiantes de una licenciatura en matemáticas, durante el curso de álgebra lineal. En el análisis realizado no se particularizó en las observaciones obtenidas en cada grupo, sino que se mencionó lo observado en común de los tres grupos.

A los tres grupos se les aplicó tres exámenes parciales, un examen ordinario y un examen extraordinario, todos ellos similares, sin embargo, solo algunos reactivos coincidieron. Al primer grupo asistieron 10 alumnos que realizaron los exámenes de manera tradicional, usando papel y lápiz, de manera que las operaciones aritméticas y algebraicas las debía realizar “a mano”. De estos, ninguno aprobó en exámenes parciales, uno aprobó en examen ordinario y los restantes nueve aprobaron en examen extraordinario.

En el segundo grupo estuvieron inscritos nueve alumnos, a quienes se les permitió utilizar el software en algunos exámenes. De estos, uno aprobó en parciales, cuatro en ordinario otros cuatro en extraordinario.

En el tercer grupo asistieron 27 alumnos al curso, a quienes se les permitió utilizar un software para realizar las operaciones aritméticas y algebraicas. De los 27 alumnos, 16 aprobaron en exámenes parciales, 10 en examen ordinario y solo una persona se presentó al examen extraordinario y lo aprobó. Lo anterior es un resultado alentador, en virtud de que indica que se presentó un avance significativo en las evaluaciones de los estudiantes en comparación con los otros grupos. Sin embargo, queda mucho trabajo por delante y sobre todo la secuencia didáctica debe ser aplicada con otros grupos para probar su eficacia.

Como se mencionó, el curso de álgebra lineal tiene características teóricas, es un curso abstracto con enfoque axiomático e inductivo, pero al ser un curso de tercer semestre y ser uno de los primeros cursos abstractos que llevan los estudiantes, la evaluación se basa en un 70 % en problemas prácticos y 30 % en problemas donde los alumnos deben demostrar algunas propiedades. A pesar de que la mayoría aprobó en exámenes parciales y en examen ordinario, muchos de estos alumnos no realizaron con éxito los problemas de demostración. Por lo tanto, es necesario hacer propuestas para que los estudiantes desarrollen más el pensamiento analítico-estructural.

REFERENCIAS

- [1] C. B. Boyer, *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1986.
- [2] I. Kleiner, *A history of abstract algebra*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] J.-L. Dorier, "Towards a formal axiomatic theory", en *On the teaching of linear algebra*, J.-L. Dorier ed., 1.ª ed. Nueva York, EUA: Kluwer Academic Publishers, 2002, parte 1, pp. 30-60.
- [4] M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo Veintiuno Editores, 1976.
- [5] S. Stewart, C. Andrews-Larson y M. Zandieh, "Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities", *ZDM Mathematics Education*, vol. 51, n.º 7, pp. 1017-1030, 2019, doi: [10.1007/s11858-019-01104-1](https://doi.org/10.1007/s11858-019-01104-1).
- [6] S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman y M. Zandieh, *Challenges and strategies in teaching linear algebra*, 1.ª ed. Cham, Suiza: Springer Nature, 2018.
- [7] S. Stewart y J. Troup, "Linear algebra education: a scoping review", *ZDM Mathematics Education*, vol. 57, n.º 4, pp. 815-827, 2025, doi: [10.1007/s11858-025-01702-2](https://doi.org/10.1007/s11858-025-01702-2).
- [8] K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra Lineal*, 1.ª ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.
- [9] I. S. Grossman y J. J. Flores-Godoy, *Álgebra Lineal*, 8.ª ed. México: Mc Graw Hill, 2019.
- [10] A. Sierpinska, "Theory is not necessary. Practice of theory is. On the necessity of practical understanding of theory", ponencia presentada en ICME-10 en Copenhagen, en TSG22. Disponible: https://www.researchgate.net/profile/Anna-Sierpinska/publication/242425261_theory_is_not_necessary_practice_of_theory_is/links/55c418cc08aebc967df1bcd4/theory-is-not-necessary-practice-of-theory-is.pdf
- [11] M. Piroi, "The emergence of the analytic-structural way of thinking in linear algebra as a blended space", *Educ. Stud. Math.*, vol. 118, n.º 1, pp. 101-117, 2025, doi: [10.1007/s10649-024-10354-0](https://doi.org/10.1007/s10649-024-10354-0).
- [12] V. Pérez y L. A. Montero. "Programa de la Experiencia Educativa Álgebra Lineal I", Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, Xalapa. Programa de experiencia educativa, 2020. [En línea]. Disponible: <https://www.uv.mx/matematicas/files/2021/01/MTAG-18005-Algebra-Lineal-I-1.pdf>