

Identificación paramétrica para un amortiguador regenerativo electromecánico

Parametric identification for an electromechanical regenerative shock absorber

Josmar Emmanuel Martínez Pérez^{1a} ✉, Miguel Alberto Domínguez Gurría^{1b} , José Gabriel Mendoza Larios^{1a} ,
Eduardo Barredo Hernández² 

¹ ^a{Instituto de Ingeniería Industrial y Automotriz}, ^b{División de Estudios de Posgrado}, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

² Departamento de Ingeniería en Sistemas Automotrices, Universidad Politécnica de Tapachula, Tapachula - Puerto de San Benito, Chiapas, México

RESUMEN

Este estudio presenta el desarrollo de identificadores paramétricos basados en un enfoque algebraico, aplicados a una suspensión pasiva moderna con un amortiguador regenerativo electromecánico. Mediante un modelo generalizado del vehículo, se abordan los efectos de las vibraciones mecánicas, cuyo control es esencial para evitar fallos estructurales y mejorar el desempeño del sistema. La correcta estimación y sintonización de parámetros permite no solo una mitigación eficiente de las vibraciones, sino también optimizar la generación de energía eléctrica en sistemas regenerativos. Se validan los identificadores propuestos mediante pruebas de robustez y análisis de sensibilidad, demostrando su eficacia y confiabilidad en condiciones operativas variables.

PALABRAS CLAVE: amortiguador regenerativo; identificación algebraica; suspensión automotriz regenerativa; parámetros físicos.

ABSTRACT

This study presents the development of parametric identifiers based on an algebraic approach, applied to a modern passive suspension system with an electromechanical regenerative shock absorber. Using a generalized vehicle model, the study addresses the effects of mechanical vibrations, whose control is essential to prevent structural failures and enhance system performance. Accurate parameter estimation and tuning enable not only efficient vibration mitigation but also the optimization of electrical energy generation in regenerative systems. The proposed identifiers are validated through robustness tests and sensitivity analysis, demonstrating their effectiveness and reliability under varying operating conditions.

KEYWORDS: regenerative shock absorber; algebraic identification; automotive regenerative suspension; physical parameters.

Correspondencia:

DESTINATARIO: Josmar Emmanuel Martínez Pérez
INSTITUCIÓN: Universidad Tecnológica de la Mixteca
DIRECCIÓN: Av. Dr. Modesto Seara Vázquez núm. 1, Acatlima
Huajuapán, C. P. 69004, Oaxaca, México
CORREO ELECTRÓNICO: mapj000119@gs.utm.mx

Fecha de recepción: 15 de noviembre de 2025. **Fecha de aceptación:** 9 de enero de 2026. **Fecha de publicación:** 6 de marzo de 2026.



I. INTRODUCCIÓN

La actual crisis climática, impulsada por el uso de combustibles fósiles y las emisiones de CO₂, ha llevado a las industrias del sector privado y/o público a buscar soluciones más sostenibles en el sector transporte, como los vehículos híbridos y eléctricos. Aunque estas tecnologías reducen las emisiones, enfrentan desafíos relacionados con la autonomía, el costo y la eficiencia de las baterías. Para mejorar indirectamente su rendimiento, se han desarrollado estrategias de gestión energética y tecnologías de recuperación, como sistemas de freno regenerativo (KERs) [1], aprovechamiento del calor del motor mediante el uso de los Generadores Termoeléctricos (TEMs) [2] y los amortiguadores regenerativos (RSAs) [3]. Estos últimos, estudiados desde los años 80, representan mayor densidad de regeneración de energía que los KERs, produciendo hasta 2.5 veces mayor energía eléctrica que su contraparte [4].

Los amortiguadores regenerativos electromecánicos (RSAs), tanto convencionales como híbridos, no solo permiten recuperar la energía vibratoria del sistema de suspensión, sino que también contribuyen al mejoramiento del confort y la seguridad en la conducción del vehículo [5]. Estos dispositivos de tecnología renovable logran un equilibrio adecuado entre distintos requerimientos dinámicos del vehículo, equilibrio que depende principalmente de la capacidad disipativa del sistema de amortiguación híbrido [6]. En general, el comportamiento de amortiguamiento de los RSAs híbridos se modela teóricamente como la superposición de las componentes de amortiguamiento generadas por cada unidad de conversión de energía, las cuales están altamente influenciadas por las no-linealidades del sistema [7]. Por ello, el mecanismo de disipación de energía en los RSAs resulta complejo de evaluar y caracterizar con precisión.

Recientemente, Zhang *et al.* determinaron empíricamente, mediante un proceso de prueba y error, el coeficiente de amortiguamiento mecánico de un RSA lineal con accionamiento indirecto, utilizando perfiles armónicos como fuente de excitación [8]. Posteriormente, los mismos autores consideraron la contribución del amortiguamiento eléctrico al amortiguamiento total en un RSA rotatorio, calculando teóricamente el amortiguamiento global del dispositivo a partir de las ecuaciones de balance de energía [9]. Asimismo, Salman *et al.* emplearon un enfoque similar para analizar cómo varía el amortiguamiento en función de la resistencia eléctrica

de carga en el circuito de recolección de energía [10]. Sin embargo, en la mayoría de los distintos tipos de RSAs, el amortiguamiento aún no ha sido identificado mediante técnicas robustas y alternativas de identificación.

La correcta identificación del amortiguamiento en los amortiguadores regenerativos inteligentes (RSAs) es fundamental para asegurar el desempeño óptimo del sistema de suspensión. Esto permite maximizar la capacidad de recuperación de energía sin comprometer no solo la efectividad de mitigación de vibraciones, sino también la seguridad estructural de los elementos mecánicos móviles y fijos del sistema [11].

Actualmente, una técnica innovadora, conocida como *identificación algebraica*, se presenta como una herramienta eficiente para estimar parámetros físicos a partir del modelo matemático del sistema. Esta metodología es aplicable tanto en el dominio temporal como en el frecuencial, siendo adecuada para sistemas lineales y no lineales [12], [13]. Entre sus principales ventajas destacan su independencia de las condiciones iniciales y su alta robustez frente a perturbaciones [14]. La técnica ha sido aplicada con éxito en la identificación de parámetros como el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez en sistemas de suspensión pasivos y semiactivos [15]. Adicionalmente, algunas comparaciones entre la técnica de identificación algebraica y los métodos clásicos de identificación, así como sus ventajas y desventajas, se pueden encontrar en [16].

Por lo tanto, este trabajo de investigación tiene como objetivo desarrollar identificadores algebraicos para un RSA electromecánico, cuyo modelo dinámico ha sido previamente reportado en la literatura. Con el fin de evaluar la robustez de los identificadores frente a incertidumbres paramétricas, se emplea un modelo generalizado del vehículo que incorpora tanto la dinámica del RSA como las perturbaciones estocásticas inducidas por las irregularidades del camino.

II. METODOLOGÍA

La presente investigación se desarrolló siguiendo de manera sistemática las distintas etapas de la metodología, las cuales se describen a continuación:

- A. Revisión del estado del arte sobre técnicas de identificación paramétrica en sistemas dinámicos.

- B. Derivación de las ecuaciones de movimiento del sistema de suspensión regenerativo.
- C. Desarrollo de los identificadores utilizando la metodología de identificación algebraica en el dominio frecuencial, considerando la presencia de excitaciones aleatorias.
- D. Simulación numérica de los identificadores algebraicos en Matlab/Simulink.
- E. Análisis y discusión de los resultados. Finalmente se presentan las conclusiones.

A. MODELADO MATEMÁTICO

La [Figura 1](#) muestra el RSA electromecánico de accionamiento indirecto desarrollado por Zhang *et al.* [9], acoplado al modelo de un cuarto de vehículo sometido a vibraciones aleatorias. Adicionalmente, se presenta el circuito de recolección de energía, el cual representa el proceso mediante el cual el RSA convierte la energía mecánica en energía eléctrica.

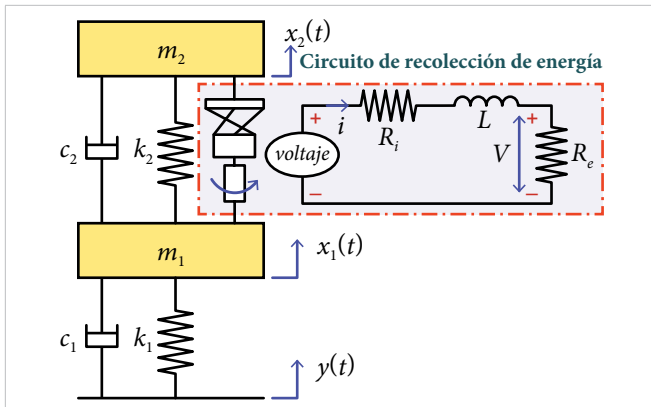


Figura 1. Modelo generalizado del vehículo basado en el RSA electromecánico con circuito de recolección de energía [17].

En la [Figura 1](#), la masa m_1 representa la masa no suspendida, que incluye el neumático, el disco de freno y el mecanismo de sujeción del sistema de suspensión, mientras que la masa m_2 corresponde a la masa suspendida, es decir, la masa del chasis del vehículo. Los coeficientes de amortiguamiento y rigidez (c_1 , k_1) y (c_2 , k_2) representan las propiedades dinámicas del neumático y del sistema de suspensión, respectivamente. En el circuito de recuperación de energía se detallan los componentes eléctricos del RSA: la resistencia interna R_i y la inductancia L del cable de la bobina, así como la resistencia de carga

R_e . Para derivar el modelo matemático del sistema, se emplea la formulación lagrangiana para el dominio mecánico y la Ley de Kirchhoff para el dominio eléctrico, dado que el sistema involucra la interacción entre dos dominios físicos acoplados. Como resultado, se obtienen las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de la suspensión regenerativa.

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) + (c_2 + c_L)(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) - \frac{Bl}{R_e} \left(\frac{\kappa r_g}{r} \right) V(t) = 0 \quad (1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1(t) - b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) - k_2(x_2(t) - x_1(t)) - (c_2 + c_L)(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_1(x_1(t) - y(t)) + c_1(\dot{x}_1(t) - \dot{y}_1(t)) + \frac{Bl}{R_e} \left(\frac{\kappa r_g}{r} \right) V(t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{L}{R_e} \dot{V}(t) + \frac{(R_i + R_e)}{R_e} V(t) - \frac{k_e \kappa}{r} (\dot{x}_s(t) - \dot{x}_u(t)) = 0 \quad (3)$$

donde b , c_L , r y κ representan, respectivamente, la inercia, el coeficiente de amortiguamiento mecánico, el radio equivalente y la relación de transmisión del transductor de movimiento del RSA. Por otro lado, Bl , k_e y r_g corresponden al coeficiente de acoplamiento electromecánico, a la constante del generador y al radio del eje del mismo, respectivamente. Cabe destacar que en la ecuación (3), $V(t)$ representa el voltaje inducido en la bobina. Además, en la ecuación (2), la fuerza de excitación que actúa sobre el sistema de suspensión se origina principalmente por la deformación del neumático, la cual puede expresarse como $F_0 = k_1 y(t)$, asumiendo que el coeficiente de amortiguamiento del neumático es pequeño y puede despreciarse, es decir, $c_1 \approx 0$.

En la siguiente sección se desarrolla la formulación de los identificadores algebraicos destinados a la determinación de los parámetros físicos del sistema, con especial énfasis en el coeficiente de amortiguamiento global. Dichos estimadores se diseñan considerando diferentes tipos de perfiles artificiales de carretera.

B. DESARROLLO Y FORMULACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES

La implementación de la técnica de identificación algebraica parte del modelo matemático del sistema dinámico. A partir de dicho modelo, se procede al desarrollo de los estimadores algebraicos correspondientes para los parámetros físicos de interés. Dado que esta metodología permite su implementación tanto en el do-

minio temporal como en el frecuencial, y considerando que el sistema bajo estudio presenta un comportamiento lineal, se optó por formular los identificadores en el dominio de la frecuencia, utilizando el formalismo del cálculo operacional.

Desarrollo de los identificadores asociados a los parámetros físicos m_1 , b , k_1 y k_2

En una primera etapa, se procedió a estimar los parámetros correspondientes a la masa y rigidez del neumático m_1 y k_1 , el coeficiente de rigidez k_2 y la inercia b del amortiguador electromecánico. Para ello, se tomó como punto de partida la ecuación (2), utilizando como fuente de excitación la fuerza desarrollada por la deformación del neumático F_0 , debido al perfil irregular de la carretera al cual se somete el sistema de suspensión. A partir del despeje de F_0 , se obtuvo la siguiente ecuación diferencial:

$$m_1\ddot{x}_1(t) - b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + k_1x_1(t) - k_2(x_2(t) - x_1(t)) = F_0 \quad (4)$$

Posteriormente, al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (4), esta se representa ahora en el dominio frecuencial:

$$m_1\{s^2X_1(s) - sX_1(0) - \dot{x}_1(0)\} - b\{s^2(X_2(s) - X_1(s)) - s(x_2(0) - x_1(0)) - (\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0))\} + k_1X_1(s) - k_2\{(X_2(s) - X_1(s))\} = F_0(s) \quad (5)$$

A continuación, al derivar la ecuación dos veces respecto a la variable compleja s , se eliminan las condiciones iniciales y se obtiene la ecuación resultante:

$$m_1\left\{2X_1(s) + 4s\frac{dX_1(s)}{ds} + s^2\frac{d^2X_1(s)}{ds^2}\right\} - b\left\{2(X_2(s) - X_1(s)) + 4s\frac{d(X_2(s) - X_1(s))}{ds} + s^2\frac{d^2(X_2(s) - X_1(s))}{ds^2}\right\} + k_1\left\{\frac{d^2X_1(s)}{ds^2}\right\} - k_2\left\{\frac{d^2(X_2(s) - X_1(s))}{ds^2}\right\} = \frac{d^2F_0(s)}{ds^2} \quad (6)$$

Enseguida, al multiplicar ambos lados de la ecuación por s^{-2} , se genera una expresión que, al llevarla al dominio del tiempo, resulta libre de derivadas:

$$m_1\left\{2s^{-2}X_1(s) + 4s^{-1}\frac{dX_1(s)}{ds} + \frac{d^2X_1(s)}{ds^2}\right\} - b\left\{2s^{-2}(X_2(s) - X_1(s)) + 4s^{-1}\frac{d(X_2(s) - X_1(s))}{ds} + \frac{d^2(X_2(s) - X_1(s))}{ds^2}\right\} + k_1\left\{s^{-2}\frac{d^2X_1(s)}{ds^2}\right\} - k_2\left\{s^{-2}\frac{d^2(X_2(s) - X_1(s))}{ds^2}\right\} = s^{-2}\frac{d^2F_0(s)}{ds^2} \quad (7)$$

Dado que la ecuación (7) se encuentra representada en el dominio frecuencial, es necesario convertirla al dominio del tiempo y para ello se aplicaron las transformadas inversas correspondientes a la derivada y al cociente, obteniéndose así la siguiente ecuación:

$$m_1\left\{2\int^{(2)}x_1(t) - 4\int tx_1(t) + t^2x_1(t)\right\} - b\left\{2\int^{(2)}(x_2(t) - x_1(t)) - 4\int t(x_2(t) - x_1(t)) + t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} + k_1\left\{\int^{(2)}t^2x_1(t)\right\} - k_2\left\{\int^{(2)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} = \int^{(2)}t^2F_0(t) \quad (8)$$

Dado que los parámetros a identificar corresponden a m_1 , b , k_1 y k_2 , y solo se dispone de una ecuación, es preciso obtener tres ecuaciones adicionales que permitan conformar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Para lograr esto, la ecuación (8) se integra de manera iterativa, obteniéndose así las ecuaciones necesarias:

$$m_1\left\{2\int^{(3)}x_1(t) - 4\int^{(2)}tx_1(t) + \int t^2x_1(t)\right\} - b\left\{2\int^{(3)}(x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(2)}t(x_2(t) - x_1(t)) + \int t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} + k_1\left\{\int^{(3)}t^2x_1(t)\right\} - k_2\left\{\int^{(3)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} = \int^{(3)}t^2F_0(t) \quad (9)$$

$$m_1\left\{2\int^{(4)}x_1(t) - 4\int^{(3)}tx_1(t) + \int^{(2)}t^2x_1(t)\right\} - b\left\{2\int^{(4)}(x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(3)}t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(2)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} + k_1\left\{\int^{(4)}t^2x_1(t)\right\} - k_2\left\{\int^{(4)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} = \int^{(4)}t^2F_0(t) \quad (10)$$

$$m_1\left\{2\int^{(5)}x_1(t) - 4\int^{(4)}tx_1(t) + \int^{(3)}t^2x_1(t)\right\} - b\left\{2\int^{(5)}(x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(4)}t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(3)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} + k_1\left\{\int^{(5)}t^2x_1(t)\right\} - k_2\left\{\int^{(5)}t^2(x_2(t) - x_1(t))\right\} = \int^{(5)}t^2F_0(t) \quad (11)$$

Una vez determinadas las ecuaciones (8), (9), (10) y (11), se obtuvo un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, a partir del cual se definió el conjunto de ecuaciones simultáneas de la siguiente forma:

$$P(t)\Theta = Q(t) \quad (12)$$

donde, $\Theta = \{m_1, b, k_1, k_2\}^T$ representa el vector de parámetros a identificar, mientras que $P(t)$ y $Q(t)$ son matrices de dimensiones 4×4 y 4×1 , respectivamente, definidas por,

$$P(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{pmatrix}, Q(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Finalmente, al resolver la expresión (13), se obtuvieron los identificadores asociados a los parámetros desconocidos,

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ b &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \\ k_1 &= \frac{\Delta_3(t)}{\det[P(t)]} \\ k_1 &= \frac{\Delta_4(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

Cabe destacar que tanto la matriz $P(t)$ como $Q(t)$ dependen únicamente de la respuesta vibratoria del sistema, mientras que el vector de parámetros $\{\Theta\}$ resulta identificable de manera algebraica siempre que se cumpla la condición $\det[P(t)] \neq 0$ [18]. De acuerdo con lo reportado en la literatura, esta condición se mantiene válida dentro de un intervalo pequeño de tiempo, definido por: $(t_0, t_0 + \epsilon]$, donde ϵ representa un valor positivo suficientemente pequeño.

Desarrollo de los identificadores asociados a los parámetros físicos m_2 y $(c_2 + c_L)$

En esta parte, se procedió a estimar los parámetros correspondientes a la masa suspendida m_2 , equivalente a una cuarta parte del peso total del chasis, y al coeficiente de amortiguamiento equivalente $(c_2 + c_L)$ del sistema de suspensión regenerativo.

Para el desarrollo de los identificadores se partió de la ecuación (1), incorporando los parámetros previamente identificados en la resolución de la ecuación (13) como datos de entrada, por lo que se tiene la siguiente ecuación:

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + (c_2 + c_L)(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) = F_0 \quad (14)$$

Al aplicar un tratamiento matemático análogo al empleado en la ecuación (2), se obtienen las siguientes ecuaciones en el dominio del tiempo:

$$m_2 \left\{ 2 \int^{(2)} \ddot{x}_2(t) - 4 \int t \ddot{x}_2(t) + t^2 \ddot{x}_2(t) \right\} + (c_2 + c_L) \left\{ -2 \int^{(2)} t(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + \int t^2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) \right\} = \int^{(2)} t^2 F_1(t) \quad (15)$$

$$m_2 \left\{ 2 \int^{(3)} x_1(t) - 4 \int^{(2)} t x_1(t) + \int t^2 x_1(t) \right\} + (c_2 + c_L) \left\{ -2 \int^{(3)} t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(2)} t^2 (x_2(t) - x_1(t)) \right\} = \int^{(3)} t^2 F_1(t) \quad (16)$$

Con el fin de obtener un sistema con el número adecuado de ecuaciones e incógnitas, la ecuación (15) se inte-

gró una vez. Así, las ecuaciones (15) y (16) conforman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, que puede representarse de forma matricial análoga a la ecuación (12) como sigue:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}, Q_1(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Finalmente, al resolver dicho sistema se determinaron los valores estimados de los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= \frac{\Delta_5(t)}{\det[P_1(t)]} \\ (c_2 + c_L) &= \frac{\Delta_6(t)}{\det[P_1(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

Desarrollo de los identificadores asociados a los parámetros eléctricos $(R_i + R_e)$ y L

Para concluir el proceso de identificación, se procedió a la estimación de los parámetros eléctricos correspondientes a la resistencia equivalente $(R_i + R_e)$, la inductancia (L) y un factor de acoplamiento, los cuales caracterizan el comportamiento dinámico del circuito de recolección de energía del sistema. Se partió de la ecuación (3) sobre la cual se aplica la misma metodología empleada previamente en las ecuaciones (1) y (2), permitiendo obtener la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{L}{R_e} \left\{ \int^2 V(t) - \int t V(t) \right\} + \frac{(R_i + R_e)}{R_e} \left\{ -\int^2 t V(t) \right\} + \frac{k_e K}{r} \left\{ \int^2 x_1(t) - \int t x_1(t) \right\} = -\int^2 t F_2(t) \quad (18)$$

Considerando que existen tres términos a identificar, se requiere la formulación de un sistema de ecuaciones de 3×3 . Con este fin, la ecuación (18) se integró dos veces de manera iterativa, dando lugar a las siguientes expresiones:

$$\frac{L}{R_e} \left\{ \int^3 V(t) - \int^2 t V(t) \right\} + \frac{(R_i + R_e)}{R_e} \left\{ -\int^3 t V(t) \right\} + \frac{k_e K}{r} \left\{ \int^3 x_1(t) - \int^2 t x_1(t) \right\} = -\int^3 t F_2(t) \quad (19)$$

$$\frac{L}{R_e} \left\{ \int^4 V(t) - \int^3 t V(t) \right\} + \frac{(R_i + R_e)}{R_e} \left\{ -\int^4 t V(t) \right\} + \frac{k_e K}{r} \left\{ \int^4 x_1(t) - \int^3 t x_1(t) \right\} = -\int^4 t F_2(t) \quad (20)$$

Estas ecuaciones son un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas que pueden representarse de forma matricial, análoga a las desarrolladas en secciones anteriores:

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) & e_{13}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) & e_{23}(t) \\ e_{31}(t) & e_{32}(t) & e_{33}(t) \end{pmatrix}, Q_2(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} \quad (21)$$

La resolución del sistema permitió obtener los términos desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{R_e} &= \frac{\Delta_7(t)}{\det[P_2(t)]} \\ \frac{(R_i + R_e)}{R_e} &= \frac{\Delta_8(t)}{\det[P_2(t)]} \\ \frac{k_e K}{r} &= \frac{\Delta_9(t)}{\det[P_2(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones realizadas para identificar los parámetros físicos del sistema de suspensión basado en un amortiguador regenerativo electromecánico, correspondiente a un cuarto de automóvil (Figura 1). Se plantearon dos escenarios de simulación en Matlab/Simulink, la primera considerando una excitación armónica, mientras que en la segunda se aplica una señal aleatoria. Los parámetros físicos empleados en cada simulación se detallan en las Tablas 1 y 2. Para la integración numérica de las ecuaciones del sistema se utilizó el método de Runge-Kutta ya que presenta mayor precisión y estabilidad en los identificadores desarrollados.

TABLA 1

PARÁMETROS FÍSICOS DE LA SUSPENSIÓN IMPLEMENTANDO UNA RED MECÁNICA C4 BASADA EN INERSOR

PARÁMETRO	VALOR
b	217 kg
k_1	22 000 N/m
k_2	10 000 N/m
c_2	1067 (N·s)/m
m_2	320 kg
m_1	45 kg

TABLA 2

PARÁMETROS FÍSICOS DEL CIRCUITO DE RECOLECCIÓN DE ENERGÍA

PARÁMETRO	VALOR
k_e	0.065 V/rad
r	0.033 m
κ	22.6
L_e	9.4×10^{-4} H
R_i	10 Ω
R_e	10 Ω

A. SIMULACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN BAJO EXCITACIÓN ARMÓNICA

Para evaluar el desempeño de los identificadores de los parámetros físicos m_2 , $(c_2 + c_L)$, b , k_1 , k_2 , $(R_i + R_e)$ y L , se consideró como fuente de excitación un camino que puede representarse mediante una función armónica, la cual se define a partir de:

$$x_0 = 0.2 \sin(10t) \quad (22)$$

donde x_0 corresponde al desplazamiento aplicado en la base del sistema, considerando una amplitud de ± 0.2 m y una frecuencia de 10 rad/s. En la Figura 2 se muestra el perfil armónico de vibración empleado en las simulaciones.

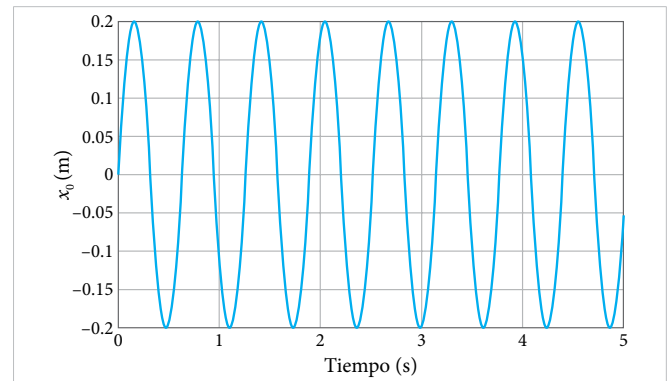


Figura 2. Respuesta vibratoria del sistema al considerar una excitación armónica.

Las Figuras 3 a 9 ilustran con claridad la evolución de los identificadores desarrollados en el transcurso del tiempo evidenciando la rapidez, precisión y efectividad del método para aproximarse a los valores reales del sistema en un lapso muy corto de tiempo.

Estas gráficas muestran un acercamiento progresivo y estabilización a los valores reales de los parámetros. Asimismo, permite detectar posibles fluctuaciones y evaluar la consistencia del proceso de identificación, aspectos fundamentales para corroborar la robustez de la metodología aplicada.

Este análisis resulta clave para medir el desempeño de los identificadores y determinar su viabilidad en los escenarios reales o prácticos, donde la rapidez y precisión en la estimación de parámetros son esenciales para garantizar el óptimo y correcto funcionamiento del sistema.

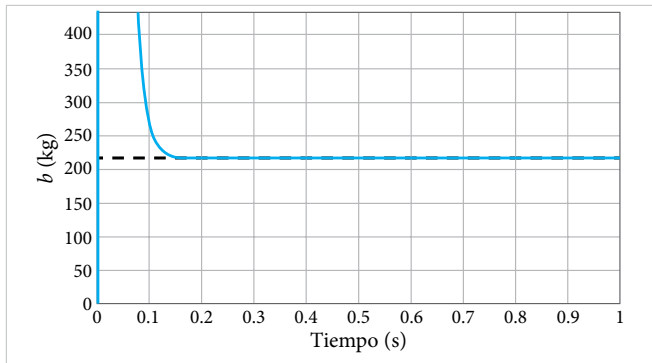


Figura 3. Identificación de la inercia b del amortiguador electromecánico bajo una señal armónica.

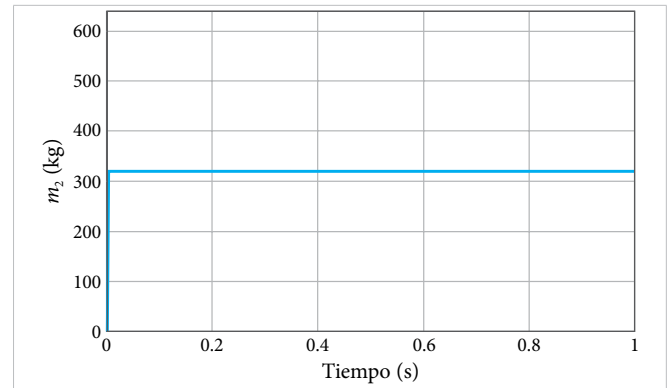


Figura 7. Identificación de la masa del chasis m_2 de un cuarto de vehículo bajo una señal armónica.

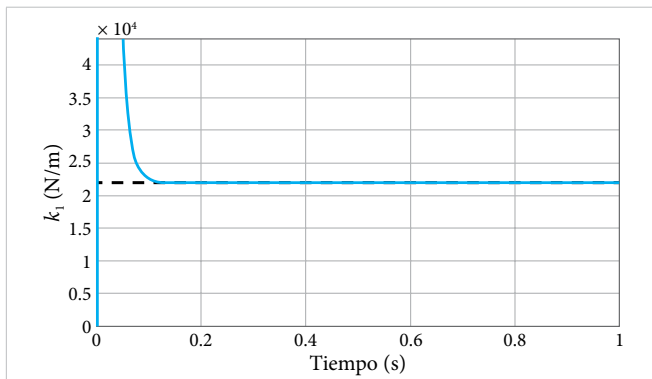


Figura 4. Identificación del coeficiente de rigidez del neumático k_1 bajo una señal armónica.

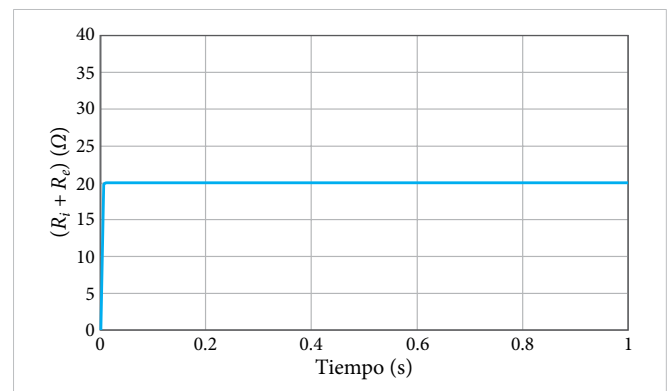


Figura 8. Identificación de la resistencia equivalente ($R_i + R_e$) del circuito de recolección de energía bajo una señal armónica.

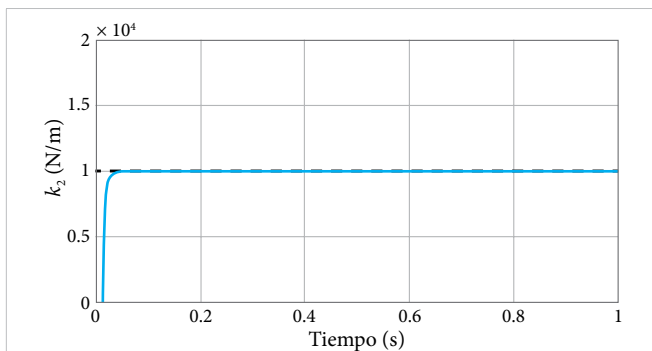


Figura 5. Identificación del coeficiente de rigidez de la suspensión k_2 bajo una señal armónica.

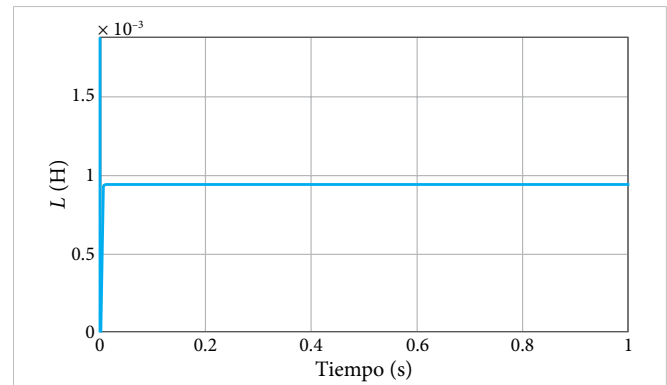


Figura 9. Identificación de la inductancia L del circuito de recolección de energía bajo una señal armónica.

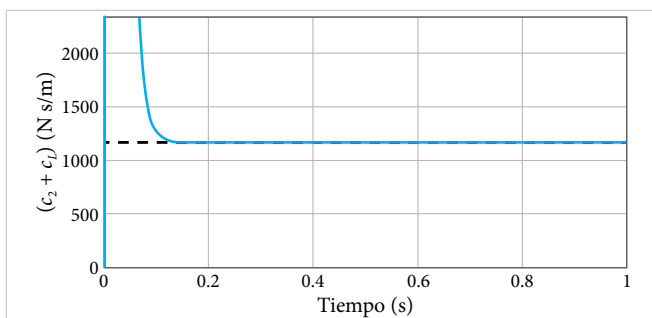


Figura 6. Identificación del coeficiente de amortiguamiento equivalente ($c_2 + c_L$) de la suspensión bajo una señal armónica.

La revisión de las Figuras 3 a 9 evidencian que los identificadores propuestos logran alinearse con rapidez a los parámetros físicos de la suspensión y del circuito de recolección de energía. Esta convergencia veloz confirma la eficiencia del método aplicado y valida su capacidad para estimar con precisión los parámetros de la suspensión de un cuarto de automóvil bajo condiciones de excitación armónica.

B. SIMULACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES DE LA SUSPENSIÓN BAJO EXCITACIÓN ALEATORIA

A continuación, se evaluó la robustez de los estimadores desarrollados mediante la técnica de identificación algebraica. Para ello, la suspensión se sometió a una señal de entrada aleatoria que simula un perfil irregular de la carretera. La [Tabla 3](#) presenta los niveles de rugosidad utilizados para generar las excitaciones estocásticas del camino [19]. Estas pruebas son esenciales para verificar la capacidad de los estimadores frente a variaciones imprevistas y oscilaciones en las condiciones de entrada, asegurando que los identificadores funcionen de manera confiable y óptima bajo escenarios de operación realistas.

TABLA 3
RUGOSIDAD DE LA CARRETERA. NORMA ISO 8608 [19]

GRADO DEL PERFIL DE LA CARRETERA	$G_x(\eta_0)(10^{-6}) \text{ m}^3, \eta_0 = 0.1[\text{m}^{-1}]$ MEDIA GEOMÉTRICA
Clase - A	16
Clase - B	46
Clase - C	256
Clase - D	1024
Clase - E	4096
Clase - F	65 536
Clase - G	262 144

La señal aleatoria que representa el perfil irregular de la carretera se generó a partir de la ecuación diferencial estocástica:

$$\dot{x}_0 = -2\pi f_0 x_0(t) + 2\pi\eta W(t)\sqrt{G_x(\eta_0)V(t)} \quad (23)$$

donde $f_0 = 0.0628 \text{ Hz}$ es la frecuencia de corte, mientras que $\eta = 0.1[\text{m}^{-1}]$ define la frecuencia espacial, $G_x(\eta_0)$ denota el coeficiente de rugosidad de la carretera, $W(t)$ describe un proceso estocástico estacionario (ruido blanco gaussiano) y x_0 es el perfil irregular de la carretera [20].

Los perfiles empleados para las simulaciones son generados a partir de la ecuación diferencial (23), la cual permite obtener trayectorias de referencia con características aleatorias. En este estudio se adoptó un perfil de clase C, ya que su comportamiento representa de forma más realista las condiciones de desplazamiento de un vehículo sobre un camino o carretera.

La [Figura 10](#) muestra el perfil de la carretera de clase C, considerando una velocidad de conducción de 60 km/h. A continuación, se muestran los resultados obtenidos

de los identificadores sometidos a esta perturbación de entrada:

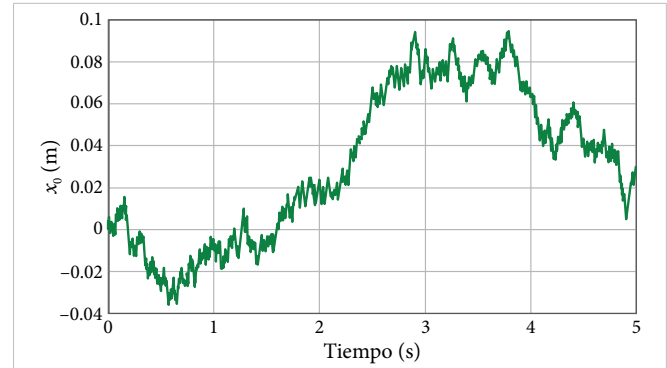


Figura 10. Perfil artificial de la carretera de clase C.

Las [Figuras 11 a 17](#) representan la respuesta dinámica de los identificadores cuando el sistema es excitado mediante la señal aleatoria. En dichas gráficas, las líneas discontinuas corresponden a los valores de referencia de los parámetros, mientras que las continuas describen las estimaciones obtenidas mediante el procedimiento propuesto. Los resultados evidencian que los estimadores logran una convergencia rápida hacia los valores reales, alcanzando estabilidad en intervalos menores a 0.2 segundos.

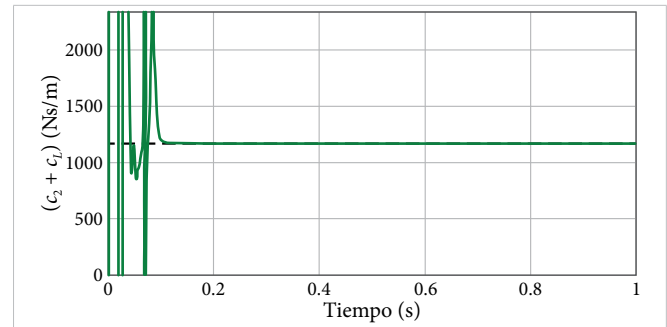


Figura 11. Identificación del coeficiente de amortiguamiento equivalente $(c_2 + c_L)$ de la suspensión bajo una señal aleatoria.

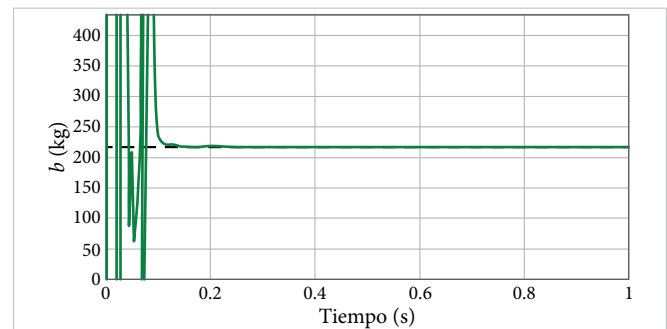


Figura 12. Identificación de la inercia b del amortiguador electromecánico bajo una señal aleatoria.

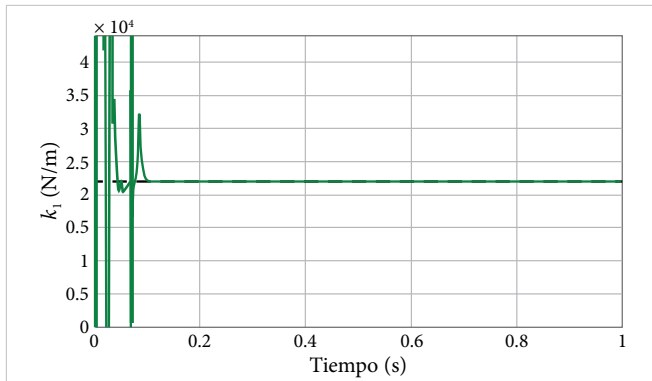


Figura 13. Identificación del coeficiente de rigidez del neumático k_1 bajo una señal aleatoria.

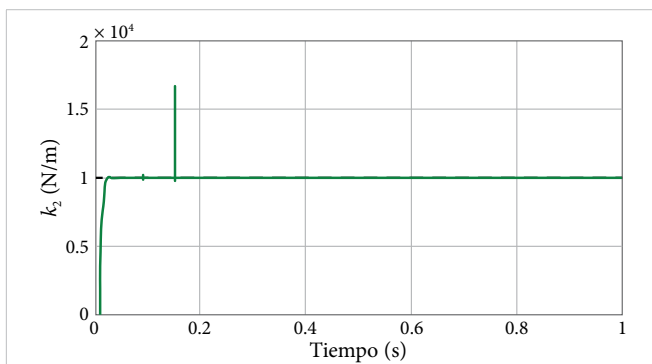


Figura 14. Identificación del coeficiente de rigidez de la suspensión k_2 bajo una señal aleatoria

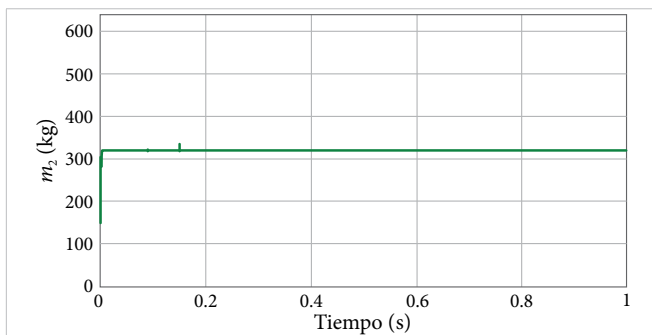


Figura 15. Identificación de la masa del chasis m_2 de un cuarto de vehículo bajo una señal aleatoria.

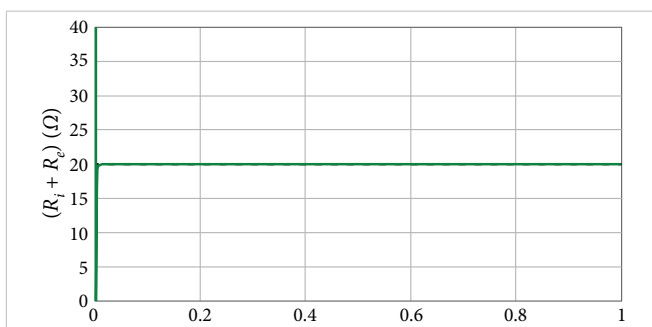


Figura 16. Identificación de la resistencia equivalente ($R_f + R_e$) del circuito de recolección de energía bajo una señal aleatoria.

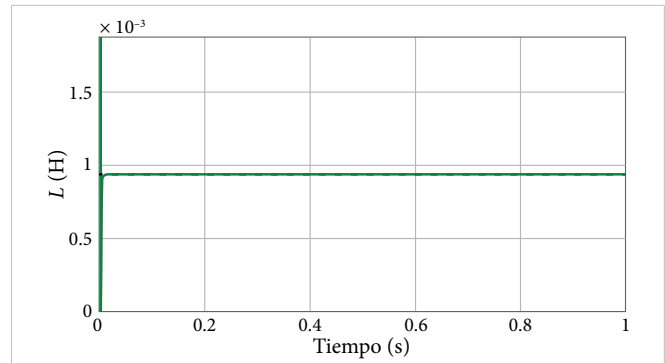


Figura 17. Identificación de la inductancia L del circuito de recolección de energía bajo una señal aleatoria.

C. PRUEBA DE ROBUSTEZ PARA EL IDENTIFICADOR DEL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE ($c_2 + c_L$)

A continuación se analizó la respuesta del identificador correspondiente al amortiguamiento equivalente del sistema, al ser expuesto a diversas excitaciones de tipo aleatorio, con el propósito de evaluar su desempeño bajo condiciones de entrada variables. Para esto, se llevaron a cabo simulaciones en perfiles de carretera tipo A, B y C, descritas con anterioridad.

Los resultados mostrados en la Figura 18 evidencian que el identificador mantiene un desempeño estable frente a distintos tipos de irregularidades del camino. En dicha gráfica, la línea discontinua representa el valor de referencia del parámetro analizado, mientras que las líneas continuas ilustran la respuesta obtenida por el identificador bajo diversas condiciones de excitación.

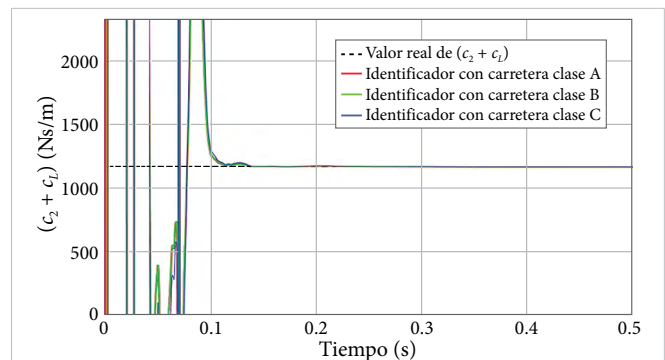


Figura 18. Respuesta del identificador del coeficiente de amortiguamiento equivalente ($c_2 + c_L$) ante distintas señales aleatorias.

Se observa que la estimación converge rápidamente hacia el valor real, alcanzando estabilidad en intervalos inferiores a 0.2 segundos, sin depender del perfil de entrada aplicado al sistema.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un conjunto de identificadores destinados a estimar los parámetros físicos de una suspensión automotriz basada en amortiguadores electromecánicos de un cuarto de vehículo. La estimación de parámetros se llevó a cabo mediante el enfoque de identificación algebraica, utilizando como base el modelo dinámico correspondiente a la suspensión mostrada en la [Figura 1](#).

El método permitió determinar parámetros asociados a la masa suspendida, la inercia del amortiguador electromecánico, la rigidez de la suspensión y el neumático, el coeficiente de amortiguamiento del dispositivo de fluido viscoso, resistencia equivalente e inductancia del circuito de recolección de energía. Dado que los identificadores algebraicos se basan en la respuesta vibratoria del sistema, se evaluaron mediante dos tipos de excitaciones: una de naturaleza armónica y otra aleatoria.

Los resultados obtenidos evidenciaron que, bajo una excitación armónica, los identificadores convergen de forma rápida y estable hacia los valores físicos reales en lapsos muy cortos de tiempo, tanto para el sistema de suspensión como para el circuito de recolección de energía. En las representaciones gráficas se aprecia cómo los identificadores mantienen un comportamiento estable alrededor de los valores de referencia, lo que confirma su precisión y consistencia.

Cuando se aplicaron las señales aleatorias, con el fin de emular el comportamiento de la carretera, los identificadores conservaron un desempeño robusto frente a incertidumbres paramétricas, ruido y efectos no modelados. Además, la convergencia hacia los valores reales se alcanzó en tiempos menores a 0.2 segundos, lo que demuestra la eficiencia del método algebraico propuesto y su potencial aplicación en entornos reales, contribuyendo a optimizar el funcionamiento de suspensiones regenerativas basadas en amortiguadores electromecánicos en vehículos.

Como trabajo futuro, se propone extender la técnica de identificación algebraica a sistemas de suspensión de medio vehículo y de vehículo completo equipados con amortiguadores regenerativos electromecánicos. El objetivo es validar el desempeño de la técnica en escenarios de simulación más realistas y complejos.

REFERENCIAS

- [1] C. A. de Sousa, S. L. Pereira y R. S. Guedes, "Review and trends in regenerative braking energy recovery for traction power system with inverter substation in subway's of São Paulo city", *J. Rail Transp. Plan. Manag.*, vol. 30, p. 100443, jun. 2024, doi: [10.1016/j.jrtpm.2024.100443](https://doi.org/10.1016/j.jrtpm.2024.100443).
- [2] A. Gabriel-Buenaventura y B. Azzopardi, "Energy recovery systems for retrofitting in internal combustion engine vehicles: A review of techniques", *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 41, pp. 955-964, en. 2015, doi: [10.1016/j.rser.2014.08.083](https://doi.org/10.1016/j.rser.2014.08.083).
- [3] J. L. Míguez, M. Á. Gómez, S. Rodríguez y J. Porteiro, "Geostrategic study of the evolution of energy harvesting systems based on the patent activity of flywheels and regenerative shock absorbers", *Energy Rep.*, vol. 12, pp. 1777-1793, dic. 2024, doi: [10.1016/j.egy.2024.07.061](https://doi.org/10.1016/j.egy.2024.07.061).
- [4] D. Tuncer y E. Yilmaz Ulu, "Contribution of regenerative suspension module to charge efficiency and range in hydrogen fuel cell electric vehicles", *Int J Hydrogen Energy*, vol. 75, pp. 547-556, jul. 2024, doi: [10.1016/j.ijhydene.2024.03.219](https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2024.03.219).
- [5] X.-X. Bai, W.-M. Zhong, Q. Zou, A.-D. Zhu y J. Sun, "Principle, design and validation of a power-generated magnetorheological energy absorber with velocity self-sensing capability", *Smart Mater Struct*, vol. 27, n.º 7, pp. 1-18, jul. 2018, doi: [10.1088/1361-665X/aac7ef](https://doi.org/10.1088/1361-665X/aac7ef).
- [6] J. Song et al., "An electromagnetic-pneumatic hybrid regenerative shock absorber for extended range of space exploration vehicles", *Mech Syst Signal Process*, vol. 210, p. 111161, mar. 2024, doi: [10.1016/j.ymssp.2024.111161](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.111161).
- [7] H. Zhu, Y. Li, W. Shen y S. Zhu, "Mechanical and energy-harvesting model for electromagnetic inertial mass dampers", *Mech Syst Signal Process*, vol. 120, pp. 203-220, abr. 2019, doi: [10.1016/j.ymssp.2018.10.023](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.10.023).
- [8] R. Zhang, X. Wang y Z. Liu, "A novel regenerative shock absorber with a speed doubling mechanism and its Monte Carlo simulation", *J Sound Vib*, vol. 417, pp. 260-276, mar. 2018, doi: [10.1016/j.jsv.2017.12.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.017).
- [9] R. Zhang, X. Wang, E. Al, S. John, L. Zuo y C. H. Wang, "A novel indirect-drive regenerative shock absorber for energy harvesting and comparison with a conventional

- direct-drive regenerative shock absorber”, *Appl Energy*, vol. 229, pp. 111-127, nov. 2018, doi: [10.1016/j.apenergy.2018.07.096](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.07.096).
- [10] W. Salman et al., “A high-efficiency energy regenerative shock absorber using helical gears for powering low-wattage electrical device of electric vehicles”, *Energy*, vol. 159, pp. 361-372, sept. 2018, doi: [10.1016/j.energy.2018.06.152](https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.06.152).
- [11] X. Yang, T. Zhang, Y. Shen, Y. Liu, V. C. Bui y D. Qiu, “Tradeoff analysis of the energy-harvesting vehicle suspension system employing inerter element”, *Energy*, vol. 308, p. 132841, 2024, doi: [10.1016/j.energy.2024.132841](https://doi.org/10.1016/j.energy.2024.132841).
- [12] E. Y. Santos, E. Barredo, J. G. Mendoza y J. F. Canseco, “Identificadores algebraicos para un sistema de suspensión pasivo basado en inersor”, *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 22, n.º 1, pp. 69-79, abr. 2025, doi: [10.20983/culcyt.2025.1.2.7](https://doi.org/10.20983/culcyt.2025.1.2.7).
- [13] E. Barredo, J. G. Mendoza, L. A. Baltazar y S. J. Landa, “Identificación algebraica de los parámetros físicos de un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad”, *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 21, n.º 1, pp. 4-12, 2024, doi: [10.20983/culcyt.2024.1.2.1](https://doi.org/10.20983/culcyt.2024.1.2.1).
- [14] H. Sira-Ramírez y M. Fliess, “On discrete-time uncertain visual based control of planar manipulators: an online algebraic identification approach”, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*, Las Vegas, NV, EUA, 2002, pp. 4509-4514 vol. 4, doi: [10.1109/CDC.2002.1185084](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185084).
- [15] D. Hernandez-Alcantara, R. Morales-Menendez, L. Amezcua-Brooks, O. Sename y L. Dugard, “Fault estimation methods for semi-active suspension systems”, *2015 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, Ixtapa, México, 2015, pp. 1-5, doi: [10.1109/ROPEC.2015.7395138](https://doi.org/10.1109/ROPEC.2015.7395138).
- [16] J. R. Trapero, “Técnicas de identificación algebraicas y espectrales de señales armónicas: aplicaciones en mecatrónica y economía”, tesis doctoral, Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, España, 2008.
- [17] M. A. A. Abdelkareem, R. Zhang, X. Jing, X. Wang y M. K. A. Ali, “Characterization and implementation of a double-sided arm-toothed indirect-drive rotary electromagnetic energy-harvesting shock absorber in a full semi-trailer truck suspension platform”, *Energy*, vol. 239, pp. 1-21, en. 2022, doi: [10.1016/j.energy.2021.121976](https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.121976).
- [18] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, “An algebraic framework for linear identification”, *ESAIM: COCV*, vol. 9, pp. 151-168, feb. 2003, doi: [10.1051/cocv:2003008](https://doi.org/10.1051/cocv:2003008).
- [19] G. E. Zheng, W. Weirui, L. I. Guangping y R. Daogong, “Design, parameter optimisation y performance analysis of active tuned inerter damper (TID) suspension for vehicle”, *J. Sound Vib.*, vol. 525, p. 116750, may. 2022, doi: [10.1016/j.jsv.2022.116750](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116750).
- [20] B. Huang, C.-Y. Hsieh, F. Golnaraghi y M. Moallem, “Development and optimization of an energy-regenerative suspension system under stochastic road excitation”, *J. Sound Vib.*, vol. 357, pp. 16-34, nov. 2015, doi: [10.1016/j.jsv.2015.07.004](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.07.004).

APÉNDICE

$$\begin{aligned}\Delta_1(t) = & -a_{12}a_{23}a_{34}b_4 + a_{12}a_{23}a_{44}b_3 + a_{12}a_{24}a_{33}b_4 - a_{12}a_{24}a_{43}b_3 \\ & - a_{12}a_{33}a_{44}b_2 + a_{12}a_{34}a_{43}b_2 + a_{13}a_{22}a_{34}b_4 - a_{13}a_{22}a_{44}b_3 \\ & - a_{13}a_{24}a_{32}b_4 + a_{13}a_{24}a_{42}b_3 + a_{13}a_{32}a_{44}b_2 \\ & - a_{13}a_{34}a_{42}b_2 - a_{14}a_{22}a_{33}b_4 + a_{14}a_{22}a_{43}b_3 + a_{14}a_{23}a_{32}b_4 \\ & - a_{14}a_{23}a_{42}b_3 - a_{14}a_{32}a_{43}b_2 + a_{14}a_{33}a_{42}b_2 + a_{22}a_{33}a_{44}b_1 \\ & - a_{22}a_{34}a_{43}b_1 - a_{23}a_{32}a_{44}b_1 + a_{23}a_{34}a_{42}b_1 + a_{24}a_{32}a_{43}b_1 \\ & - a_{24}a_{33}a_{42}b_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(t) = & a_{11}a_{23}a_{34}b_4 - a_{11}a_{23}a_{44}b_3 - a_{11}a_{24}a_{33}b_4 + a_{11}a_{24}a_{43}b_3 \\ & + a_{11}a_{33}a_{44}b_2 - a_{11}a_{34}a_{43}b_2 - a_{13}a_{21}a_{34}b_4 + a_{13}a_{21}a_{44}b_3 \\ & + a_{13}a_{24}a_{31}b_4 - a_{13}a_{24}a_{41}b_3 - a_{13}a_{31}a_{44}b_2 + a_{13}a_{34}a_{41}b_2 \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}b_4 - a_{14}a_{21}a_{43}b_3 - a_{14}a_{23}a_{31}b_4 + a_{14}a_{23}a_{41}b_3 \\ & + a_{14}a_{31}a_{43}b_2 - a_{14}a_{33}a_{41}b_2 - a_{21}a_{33}a_{44}b_1 + a_{21}a_{34}a_{43}b_1 \\ & + a_{23}a_{31}a_{44}b_1 - a_{23}a_{34}a_{41}b_1 - a_{24}a_{31}a_{43}b_1 + a_{24}a_{33}a_{41}b_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(t) = & -a_{11}a_{22}a_{34}b_4 + a_{11}a_{22}a_{44}b_3 + a_{11}a_{24}a_{32}b_4 - a_{11}a_{24}a_{42}b_3 \\ & -a_{11}a_{32}a_{44}b_2 + a_{11}a_{34}a_{42}b_2 + a_{12}a_{21}a_{34}b_4 - a_{12}a_{21}a_{44}b_3 \\ & -a_{12}a_{24}a_{31}b_4 + a_{12}a_{24}a_{41}b_3 + a_{12}a_{31}a_{44}b_2 - a_{12}a_{34}a_{41}b_2 \\ & -a_{14}a_{21}a_{32}b_4 + a_{14}a_{21}a_{42}b_3 + a_{14}a_{22}a_{31}b_4 - a_{14}a_{22}a_{41}b_3 \\ & -a_{14}a_{31}a_{42}b_2 + a_{14}a_{32}a_{41}b_2 + a_{21}a_{32}a_{44}b_1 - a_{21}a_{34}a_{42}b_1 \\ & -a_{22}a_{31}a_{44}b_1 + a_{22}a_{34}a_{41}b_1 + a_{24}a_{31}a_{42}b_1 - a_{24}a_{32}a_{41}b_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_4(t) = & a_{11}a_{22}a_{33}b_4 - a_{11}a_{22}a_{43}b_3 - a_{11}a_{23}a_{32}b_4 + a_{11}a_{23}a_{42}b_3 \\ & + a_{11}a_{32}a_{43}b_2 - a_{11}a_{33}a_{42}b_2 - a_{12}a_{21}a_{33}b_4 + a_{12}a_{21}a_{43}b_3 \\ & + a_{12}a_{23}a_{31}b_4 - a_{12}a_{23}a_{41}b_3 - a_{12}a_{31}a_{43}b_2 + a_{12}a_{33}a_{41}b_2 \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}b_4 - a_{13}a_{21}a_{42}b_3 - a_{13}a_{22}a_{31}b_4 + a_{13}a_{22}a_{41}b_3 \\ & + a_{13}a_{31}a_{42}b_2 - a_{13}a_{32}a_{41}b_2 - a_{21}a_{32}a_{43}b_1 + a_{21}a_{33}a_{42}b_1 \\ & + a_{22}a_{31}a_{43}b_1 - a_{22}a_{33}a_{41}b_1 - a_{23}a_{31}a_{42}b_1 + a_{23}a_{32}a_{41}b_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det[P(t)] = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ & + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ & + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ & + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ & + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}a_{11} &= 2\int^{(2)} x_1(t) - 4\int tx_1(t) + t^2x_1(t) \\ a_{21} &= 2\int^{(3)} x_1(t) - 4\int^{(2)} tx_1(t) + \int t^2x_1(t) \\ a_{31} &= 2\int^{(4)} x_1(t) - 4\int^{(3)} tx_1(t) + \int^{(2)} t^2x_1(t) \\ a_{41} &= 2\int^{(5)} x_1(t) - 4\int^{(4)} tx_1(t) + \int^{(3)} t^2x_1(t) \\ a_{21} &= 2\int^{(2)} (x_2(t) - x_1(t)) - 4\int t(x_2(t) - x_1(t)) + t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{22} &= 2\int^{(3)} (x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(2)} t(x_2(t) - x_1(t)) + \int t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{23} &= 2\int^{(4)} (x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(3)} t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(2)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{24} &= 2\int^{(5)} (x_2(t) - x_1(t)) - 4\int^{(4)} t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(3)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{31} &= \int^{(2)} t^2x_1(t) \\ a_{32} &= \int^{(3)} t^2x_1(t) \\ a_{33} &= \int^{(4)} t^2x_1(t) \\ a_{34} &= \int^{(5)} t^2x_1(t) \\ a_{41} &= \int^{(2)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{42} &= \int^{(3)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{43} &= \int^{(4)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ a_{44} &= \int^{(5)} t^2(x_2(t) - x_1(t)) \\ b_1 &= \int^{(2)} t^2F_0(t) \\ b_2 &= \int^{(3)} t^2F_0(t) \\ b_3 &= \int^{(4)} t^2F_0(t) \\ b_4 &= \int^{(5)} t^2F_0(t)\end{aligned}$$

Además,

$$\Delta_5(t) = -c_{12}d_2 + c_{22}d_1$$

$$\Delta_6(t) = c_{11}d_2 - c_{21}d_1$$

$$\det [P_1(t)] = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

con

$$c_{11} = 2\int^{(2)}x_2(t) - 4\int tx_2(t) + t^2x_2(t)$$

$$c_{12} = 2\int^{(3)}x_1(t) - 4\int^{(2)}tx_1(t) + \int t^2x_1(t)$$

$$c_{21} = -2\int^{(2)}t(x_2(t) - x_1(t)) + \int t^2(x_2(t) - x_1(t))$$

$$c_{22} = -2\int^{(3)}t(x_2(t) - x_1(t)) + \int^{(2)}t^2(x_2(t) - x_1(t))$$

$$d_1 = \int^{(2)}t^2F_1(t)$$

$$d_2 = \int^{(3)}t^2F_1(t)$$

Por último,

$$\Delta_7(t) = e_{12}e_{23}f_3 - e_{12}e_{33}f_2 - e_{13}e_{22}f_3 + e_{13}e_{32}f_2 + e_{22}e_{33}f_1 - e_{23}e_{32}f_1$$

$$\Delta_8(t) = -e_{11}e_{23}f_3 + e_{11}e_{33}f_2 + e_{11}e_{21}f_3 - e_{13}e_{31}f_2 - e_{21}e_{33}f_1 + e_{23}e_{31}f_1$$

$$\Delta_9(t) = e_{11}e_{22}f_3 - e_{11}e_{32}f_2 - e_{12}e_{21}f_3 + e_{12}e_{31}f_2 + e_{21}e_{32}f_1 - e_{22}e_{31}f_1$$

$$\det [P_2(t)] = e_{11}e_{22}e_{33} - e_{11}e_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{12}e_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - e_{13}e_{22}e_{31}$$

donde

$$e_{11} = \int^2 v(t) - \int tv(t)$$

$$e_{12} = \int^3 v(t) - \int^2 tv(t)$$

$$e_{13} = \int^4 v(t) - \int^3 tv(t)$$

$$e_{21} = -\int^2 tv(t)$$

$$e_{22} = -\int^3 tv(t)$$

$$e_{23} = -\int^4 tv(t)$$

$$e_{31} = \int^2 x_1(t) - \int tx_1(t)$$

$$e_{32} = \int^3 x_1(t) - \int^2 tx_1(t)$$

$$e_{33} = \int^4 x_1(t) - \int^3 tx_1(t)$$

$$f_1 = -\int^2 tF_2(t)$$

$$f_2 = -\int^3 tF_2(t)$$

$$f_3 = -\int^4 tF_2(t)$$