CULCYT. Cultura Científica y Tecnológica
Vol. 22 | N.º 2 | Mayo-Agosto 2025 | PP 12-18

DOI: 10.20983/culcyt.2025.2.2.2

ISSN (electrónico) 2007-0411

e22202

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

# Ecuaciones de planos tangentes utilizando GeoGebra

*Equations of tangent planes using GeoGebra*

*Carlos López Ruvalcaba*[1], *Héctor Jesús Portillo Lara*[1], *María de los Ángeles Cruz Quiñones*[1], *Lucero Sáenz Coronado*[1]

[1]Maestría en Matemática Educativa y Docencia, Departamento de Física y Matemáticas, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Ciudad Juárez, Chihuahua, México

## RESUMEN

El presente trabajo brinda una propuesta para la enseñanza del tema plano tangente haciendo uso del software GeoGebra como instrumento didáctico. Se trata de obtener el mayor provecho posible de las diferentes representaciones semióticas (algebraica, gráfica y numérica) que el software es capaz de brindar, para obtener la ecuación del plano tangente a una función en $R^3$. El desarrollo del trabajo es a través de ejemplos que van aumentando su complejidad en la abstracción, culminando en una generalización original fuera del discurso tradicional. Por lo general, el tema es abordado por los libros de texto haciendo uso de vectores y todo un bagaje de conceptos para lograr la ecuación buscada. Con esta metodología el alumno solo requiere conocer dos conceptos matemáticos el cálculo de límites y determinantes.

**PALABRAS CLAVE:** plano tangente; GeoGebra; representación semiótica; límite; determinante.

## ABSTRACT

This paper provides a proposal for teaching calculus in several variables, specifically about tangent planes using the GeoGebra software as a teaching tool. It is about getting the most out of the different semiotic representations (algebraic, graphic and numerical) that the software is capable of providing, to obtain the equation of the plane tangent to a function in $R^3$. The development of the work is through examples that gradually increase their complexity in abstraction, culminating in an original generalization outside the traditional discourse. In general, the subject is approached by textbooks using vectors and a whole baggage of concepts to achieve the desired equation. With this methodology, the student only needs to know two mathematical concepts such as the calculation of limits and determinants.

**KEYWORDS:** tangent plane; GeoGebra; semiotic representation; limit; determinant.

Correspondencia:
**DESTINATARIO**: Carlos López Ruvalcaba
**INSTITUCIÓN**: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez / Instituto de Ingeniería y Tecnología
**DIRECCIÓN**: Ave. del Charro núm. 450 norte, colonia Partido Romero, C. P. 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México
**CORREO ELECTRÓNICO**: clopez@uacj.mx

Fecha de recepción: 13 de noviembre de 2024. Fecha de aceptación: 28 de mayo de 2025. Fecha de publicación: 6 de junio de 2025.

acceso abierto UACJ

REVISTA ARBITRADA

# I. INTRODUCCIÓN

Los conceptos del cálculo se abordan, por lo general, de manera algebraica por parte de maestros y alumnos [1]. La acción de intervención eficaz en el sistema didáctico para un mejor aprendizaje de las matemáticas excede el proceder de buena voluntad. Más bien, requiere del compromiso de adentrarse en la problemática y hacer de la práctica docente un lugar de reflexión sobre el conocimiento adquirido. Esto lleva a un debate en la comunidad de investigadores acerca del cómo enseñar y qué debe enseñarse en cálculo [2].

Cantoral y Montiel [3] mencionan lo siguiente sobre el proceso de visualizar:

> La visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos, numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales.

La tecnología ha tenido una injerencia importante en la forma de aprender matemáticas por parte de los estudiantes y ha generado ya cambios sustanciales en el aprendizaje. Estos ambientes emplean y proporcionan condiciones para identificar, examinar y comunicar distintas ideas por parte del alumno [4].

Este trabajo muestra una propuesta de enseñanza para encontrar la ecuación del plano tangente a una superficie en el espacio con el uso del software GeoGebra, cuya dinamicidad puede mejorar la comprensión del objeto y que a su vez sea posible medir el nivel cognitivo alcanzado por el estudiante. Para ello, es necesario apoyarse de una teoría cognitiva como APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) [5].

Se pretende que los estudiantes de ingeniería apliquen conocimientos previos con el objetivo de lograr formas alternativas a las propuestas por los libros de texto para encontrar, por ejemplo, planos tangentes a una superficie. La exploración juega un papel importante en el proceso, ya que el software permite utilizar las representaciones numéricas, geométricas y algebraicas para la verificación de las conjeturas planteadas por ellos.

Los objetivos de implementar una propuesta como la aquí presentada son:

a) Plantear problemas a los alumnos para que le den solución en las diferentes representaciones (gráfico, algebraico y numérico).

b) Promover el uso de una herramienta didáctica no convencional para plantear y resolver un problema específico: encontrar la ecuación de un plano tangente a una superficie en un punto.

c) Que el alumno llegue a una generalización del problema para que lo utilice en otros casos.

Existen teorías cognitivas que pueden utilizarse para realizar investigación en matemática educativa, pero también, pueden ser usadas para diseños didácticos, ya que, de cierta manera, teorizan cómo se aprende. La teoría APOE explica que, ante el aprendizaje de determinado concepto matemático, la primera etapa es la manipulación de objetos para formar Acciones, estas a su vez se interiorizan y forman Procesos, los cuales se encapsulan para dar paso a la construcción de Objetos que, a su vez, se pueden volver a desencapsular para volver hacia el Proceso que lo formó. En conclusión, las Acciones, Procesos y Objetos se pueden organizar en Esquemas [5] (Figura 1).

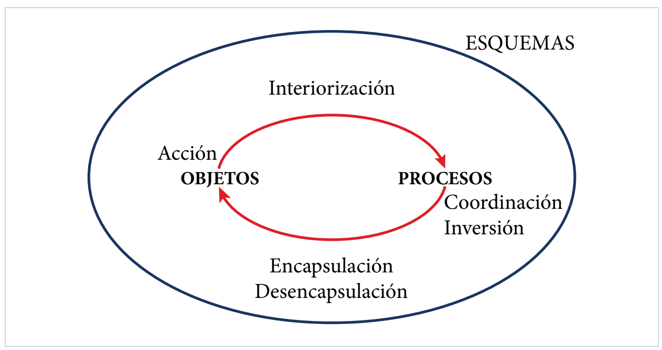

Figura 1. Ciclo APOE.

GeoGebra dispone de un Sistema de Cómputo Algebraico (CAS, por sus siglas en inglés; Computer Algebra System), es decir, permite la manipulación algebraica además de la manipulación dinámica de objetos geométricos, que se denomina DGS (Dynamic Geometry System). Aunado a ello, se pueden trabajar en una misma pantalla las representaciones algebraicas, numérica y gráficas de un objeto matemático [6].

## II. METODOLOGÍA

La presentación del tema *planos tangentes a una superficie* por parte de los docentes, sigue un proceso tradicional, iniciando con el uso de vectores y sus propiedades, seguido de la derivada parcial y el gradiente, para concluir con la ecuación del plano. Con referencia a los libros de texto, se revisó a Larson [7], donde se explica cómo encontrar dicho plano con la siguiente definición y el uso de la ecuación del plano tangente.

Sea $F$ una función de varias variables diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de una superficie dada por $F(\mathrm{x}, y, z) = 0$, de manera que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. El plano que pasa por $P$ y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama plano tangente. Si $F$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0, z_0)$, la ecuación del plano tangente a la superficie de $F(\mathrm{x}, y, z) = 0$ en ese punto es:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

En la Figura 2 se muestra un ejemplo de un plano tangente a un paraboloide. El programa GeoGebra permite dividir la pantalla en diferentes ventanas (vista álgebra, vista gráfica, vista gráfica 3D, por mencionar algunos ejemplos). Las vistas que se quiere trabajar se activan o desactivan, según lo requerido por el usuario. En este caso, la primera columna muestra una vista algebraica (representación algebraica) y la segunda despliega una vista gráfica en 3D de un plano tangente al paraboloide $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ en el punto (1, 1, 3), cuya ecuación es $2x + 2y - z = 1$.

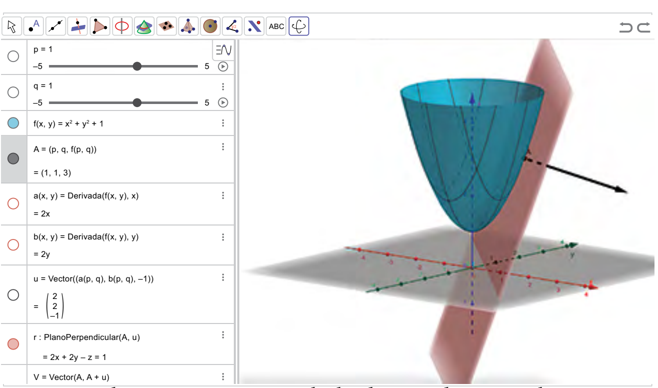


Figura 2: Plano tangente a paraboloide usando GeoGebra.

La Figura 3 muestra la construcción de un plano a través de un determinante. Como primera actividad para el alumno, se le solicitó que encuentre ecuaciones de planos usando un determinante del estilo presentado en Ávila *et al.* [8].

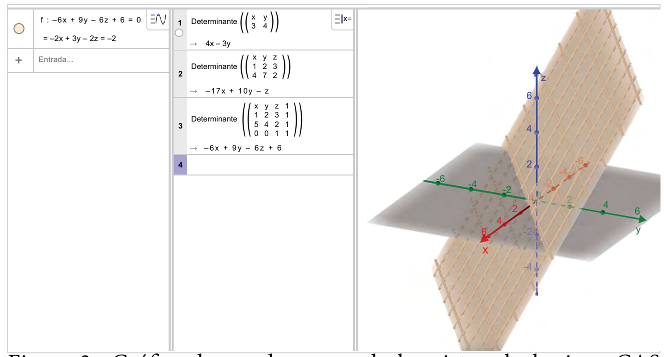


Figura 3. Gráfica de un plano usando las vistas algebraicas, CAS y gráfica.

Para obtener el plano que pasa por los puntos (1, 2, 3), (5, 4, 2), (0, 0, 1), se utilizó el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6x + 9y - 6z + 6 \qquad (2)$$

El resultado obtenido se igualó a cero para obtener la ecuación del plano que pasa, quedando esta ecuación de la siguiente manera:

$$-6x + 9y - 6z + 6 = 0 \qquad (3)$$

Como segunda actividad se pidió adecuar el determinante para encontrar la ecuación del plano tangente a una función particular en un punto de esta. Se consideró el caso de la función $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, escrita en función de las variables $x$ e $y$, y quedó como $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. El punto de tangencia debe estar en (1, 1, 3).

El determinante es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1 & (1+h)^2 + 1^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1+h & 1^2 + (1+h)^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Este se interpreta de la siguiente manera: el primer renglón debe contener las variables para que la ecuación salga en esos términos, y el segundo renglón contiene al punto de tangencia, colocando cada valor en su variable correspondiente. El tercer renglón muestra que hay un incremento en cuanto al valor $x$ de una cantidad $h$ con respecto a su valor inicial y el renglón cuatro tiene un adelanto con respecto al valor de y de la misma cantidad $h$.

El resultado obtenido por el software GeoGebra para el determinante es:

$$2h^3 + h^2 - h^3x - 2h^2x - h^3y - 2h^2y + h^2z \tag{5}$$

Este resultado se igualó a cero para que pueda representar la ecuación de un plano:

$$2h^3 + h^2 - h^3x - 2h^2x - h^3y - 2h^2y + h^2z = 0 \tag{6}$$

La ecuación se puede simplificar, ya que todos los términos contienen al menos un $h^2$, quedando de la siguiente manera:

$$2h + 1 - hx - 2x - hy - 2y + z = 0 \tag{7}$$

El incremento $h$, al hacerlo pequeño, produce el efecto de acercar los puntos incrementados al punto de tangencia y además la ecuación del plano va tendiendo a hacer la correcta, como se muestra en la Tabla 1.

TABLA 1
Ecuaciones de Planos para Diferentes Valores de $h$

| $h$ | Ecuación |
|---|---|
| 1 | $2 - 3x - 3y + z = 0$ |
| 0.1 | $1.2 - 2.1x - 2.1y + z = 0$ |
| 0.01 | $1.02 - 2.01x - 2.01y + z = 0$ |
| 0.001 | $1.002 - 2.001x - 2.001y + z = 0$ |
| 0.0001 | $1.0002 - 2.0001x - 2.0001y + z = 0$ |
| 0.00001 | $1.00002 - 2.00001x - 2.00001y + z = 0$ |
| 0.000001 | $1.000002 - 2.000001x - 2.000001y + z = 0$ |

Si el proceso se sigue indefinidamente, la ecuación del plano tangente tiende a ser la siguiente:

$$1 - 2x - 2y + z = 0 \tag{8}$$

La ecuación (8) es equivalente a la mostrada al final de la primera columna de la Figura 2.

La tercera actividad va encaminada a que el estudiante realice variantes al determinante y argumente la razón del resultado obtenido.

Los determinantes propuestos son los siguientes:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1-h & 1 & (1-h)^2 + 1^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1-h & 1^2 + (1-h)^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1 & (1+h)^2 + 1^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1-h & 1^2 + (1-h)^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+n\cdot h & 1 & (1+n\cdot h)^2 + 1^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1+n\cdot h & 1^2 + (1+n\cdot h)^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

La ecuación (11) requiere la condición que $n \in$ R, con $n \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1+h & (1+h)^2 + (1+h)^2 + 1 & 1 \\ 1+h & 1 & (1+h)^2 + 1^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1+h & (1+h)^2 + (1+h)^2 + 1 & 1 \\ 1-h & 1-h & (1-h)^2 + (1-h)^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Un análisis de los determinantes es el siguiente: la ecuación (10), muestra un retroceso de una cantidad $h$ con respecto al punto de tangencia, esto da origen a la siguiente ecuación para el plano tangente cuando $h$ tiende a cero:

$$1 - 2x - 2y + z = 0$$

que es idéntica a la ecuación (8).

La ecuación (10), por su parte, muestra un adelanto con respecto a $x$ a partir del punto de tangencia y un retraso con respecto a $y$ respecto al mismo, hecho esto en el tercero y cuarto renglón del determinante. La ecuación que se obtiene cuando $h$ tiende a cero es la siguiente:

$$-1 + 2x + 2y - z = 0$$

y el resultado es equivalente a la ecuación (8).

La respuesta para las ecuaciones (11) y (12) se muestran en la Figura 4, cuya salida se obtiene en GeoGebra utilizando la ventana CAS.

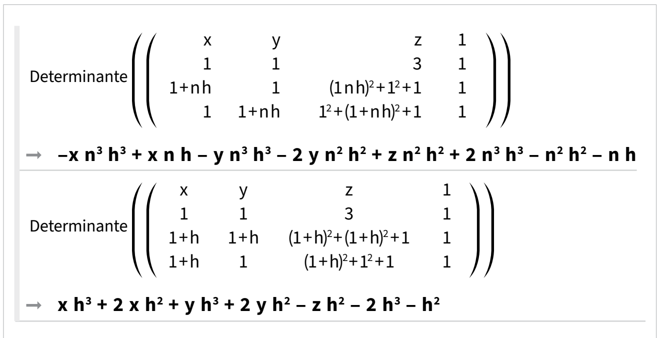


Figura 4. Salida de GeoGebra de los casos (11) y (12).

El caso del determinante (11) indica que el primer punto del tercer renglón del determinante incrementa a la variable $x$ en un múltiplo de $h$, es decir, $nh$, mientras que el segundo punto en el cuarto renglón es con respecto a la variable $y$. Este resultado generaliza los casos anteriores.

El determinante (12), en su tercer renglón, indica un incremento $h$ a partir del punto de tangencia con respecto a las variables $x$ e $y$, mientras que en el cuarto renglón solamente lo hace con respecto a $x$, obteniendo el resultado correcto. Si el incremento hubiese sido con respecto a la variable $y$, el resultado sigue siendo el esperado.

En el caso del determinante (13), se realizaron incrementos en el primer punto con respecto a las variables $x$ e $y$; el tercer renglón muestra esos incrementos. Con respecto a la variable $y$, en el cuarto renglón hubo un decremento en esas mismas variables, dando como resultado la imposibilidad de obtener la ecuación de un plano, ya que la variable $z$ fue eliminada en el proceso. La ecuación (14) muestra esta situación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ h+1 & h+1 & 2h^2+4h+3 & 1 \\ -h+1 & -h+1 & 2h^2-4h+3 & 1 \end{vmatrix} = 4h^3x - 4h^3y \tag{14}$$

Una forma simple de escribir la ecuación del plano, tomando únicamente los casos de los determinantes de las ecuaciones (4), (11) y (12), respectivamente, serían las siguientes:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1 & (1+h)^2+1^2+1 & 1 \\ 1 & 1+h & 1^2+(1+h)^2+1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+n\cdot h & 1 & (1+n\cdot h)^2+1^2+1 & 1 \\ 1 & 1+n\cdot h & 1^2+(1+n\cdot h)^2+1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 \tag{16}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1+h & 1+h & (1+h)^2+(1+h)^2+1 & 1 \\ 1+h & 1 & (1+h)^2+1^2+1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 \tag{17}$$

Como última actividad, se buscó una expresión que generalice los casos anteriores. Sea $z = f(x, y)$ una función en $R^3$ y $(x_0, y_0, z_0)$ un punto diferenciable de la función $z$; entonces, la ecuación del plano tangente queda definida por la expresión siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_0+h & y_0 & f(x_0+h,\ y_0) & 1 \\ x_0 & y_0+h & f(x_0,\ y_0+h) & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 \tag{18}$$

Enseguida, la demostración correspondiente:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_0+h & y_0 & f(x_0+h,\ y_0) & 1 \\ x_0 & y_0+h & f(x_0,\ y_0+h) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{x\,f(x_0,y_0)}{h} - \frac{x\,f(x_0+h,y_0)}{h} + \frac{y\,f(x_0,y_0)}{h} - \frac{y\,f(x_0,y_0+h)}{h} \\ &- \frac{x_0\,f(x_0,y_0)}{h} - \frac{y_0\,f(x_0,y_0)}{h} + \frac{y_0\,f(x_0,y_0+h)}{h} \\ &+ \frac{x_0\,f(x_0+h,y_0)}{h} - f(x_0,y_0) + z \end{aligned} \tag{19}$$

Se factorizan los términos $[x - x_0]$ y $[y - y_0]$ y se obtiene:

$$- [x - x_0] \left[ \frac{f(x_0 + h, y_0)}{h} + \frac{f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$$- [y - y_0] \left[ \frac{f(x_0, y_0 + h)}{h} + \frac{f(x_0, y_0)}{h} \right] - f(x_0, y_0) + z \tag{20}$$

Se aplica el límite cuando $h$ tiende a cero a la expresión anterior:

$$- \lim_{h \to 0} [x - x_0] \lim_{h \to 0} \left[ \frac{f(x_0 + h, y_0)}{h} + \frac{f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$$- \lim_{h \to 0} [y - y_0] \lim_{h \to 0} \left[ \frac{f(x_0, y_0 + h)}{h} + \frac{f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$$- \lim_{h \to 0} f(x_0, y_0) + \lim_{h \to 0} z \tag{21}$$

Se simplifica e iguala a cero:

$$-[x - x_0]\, fx(x_0, y_0) - [y - y_0]\, fy(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) + z = 0 \tag{22}$$

Se despeja la variable $z$:

$$z = [x - x_0]\, fx(x_0, y_0) + [y - y_0]\, fy(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \tag{23}$$

## III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con respecto a la ecuación plano tangente, Martinez-Planell y Trigueros [9] reportan que los alumnos confunden la existencia de la derivada parcial y la diferenciabilidad, tema que se debe considerar para la existencia del plano tangente a una superficie. Por otro lado, consideran que los recursos digitales ayudan a una mejor comprensión y visualización del cálculo multivariable.

La metodología empleada va totalmente conforme a la teoría utilizada; esta va llevando al alumno a planteamientos cognitivos de un nivel cada vez mayor. En el primer planteamiento (4) se incrementa solo a una de las variables que se utilizan en los renglones 3 y 4 del determinante. Como segundo planteamiento (9) se hacen decrementos en una sola variable en los mismos renglones. En el tercer planteamiento (10) se hacen combinaciones de incrementos y decrementos. En el cuarto (11) se tiene una primera generalización importante como una consecuencia de los casos anteriores, que es agregar un múltiplo del incremento. El quinto caso (12), se hace un salto en la generalización: en el renglón tres se incrementan las dos variables y en el cuarto renglón solamente a una de ellas. En el sexto caso (13), se muestra un incremento en ambas variables del tercer renglón del determinante y un decremento en ambas en el cuarto renglón, lo que lleva a una conclusión inesperada: la imposibilidad de tener un plano tangente bajo esas condiciones; este resultado se analizó con mayor detenimiento y se observó en el determinante la desaparición de la variable $z$, lo que significa que bajo esas condiciones el plano corta en el punto de tangencia a la superficie.

Por lo tanto, se puede concluir bajo este análisis que para obtener la ecuación de un plano tangente a una superficie derivable en el punto, se pueden hacer todas las combinaciones de incrementos y decrementos en las variables, con la restricción de hacer incrementos o decrementos en las dos variables en ambos renglones del determinante. Aunque la ecuación de un plano tangente es conocida, la metodología empleada y la definición obtenida son inéditas.

La actividad en matemáticas necesita una coherencia interna, que se construye entre los registros de representación. Sin esta coherencia, dos tipos de representación pueden significar dos objetos disímiles, carentes de relación entre ellos; no se puede ni se debe considerar una separación entre ellas [10]. La generalización es de los más importantes procesos cognitivos en la actividad matemática, es ir de lo particular a lo general [11]. Los resultados obtenidos mediante el software deben tener un análisis por parte del alumno para que lo lleve desde el accionar con los objetos hasta un nivel de esquema. Cabe destacar la metodología utilizada en este trabajo, que es guiada por la teoría APOE, y las herramientas empleadas, que fueron los límites y determinantes de matrices 4×4, las cuales se encuentran fuera del discurso para encontrar la ecuación de planos tangentes.

## IV. CONCLUSIONES

Del presente trabajo se puede concluir lo siguiente:

- Se tiene una fórmula nueva diferente a las ya conocidas para encontrar la ecuación de un plano tangente.

- El uso o empleo de esta fórmula está al alcance de los alumnos que tengan conocimiento de límites y determinantes.
- Se pueden explorar variantes en los elementos de la expresión para mejorar la comprensión del objeto plano tangente y así obtener otras variantes de la expresión.
- El desarrollo de la expresión conduce a la fórmula conocida para la ecuación de planos tangentes.

## REFERENCIAS

[1] M. Artigue, "Una perspectiva histórica sobre la enseñanza de los principios del cálculo", en *Ingeniería didáctica en educación matemática*, M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, eds. Bogotá, Colombia: Pedro Gómez Editorial Iberoamérica, 1995.

[2] C. Cuevas y F. Pluvinage, "Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo". *El Cálculo y su Enseñanza*, vol. 4. México: Cinvestav-IPN, 2013.

[3] R. Cantoral y G. Montiel, "Visualización y pensamiento matemático". http://www.tbu.uan.edu.mx/_Lib_Art_En/_Arts/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf

[4] D.E, Meel, "Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE", *RELIME*, vol. 6, n.º 3, pp. 221-278, 2003.

[5] M. Trigueros, "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, n.º 1, pp. 5-31, 2005.

[6] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter, Y. Kreis y Z. Lavicza, eds., "Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra", en *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México, 2008.

[7] R. Larson y E. Bruce, *Cálculo*, tomo II, 10.ª ed. Editorial CENGAGE Learning Editores, S.A. de C. V., 2014.

[8] M. S. Ávila, C. López y H. Portillo, *Métodos alternativos para abordar tópicos del cálculo diferencial e integral una exploración mediante el uso de los determinantes y el software Mathematica*, España: Editorial Académica Española, 2012.

[9] R. Martínez-Planell y M. Trigueros, "Multivariable calculus results in different countries", en *ZDM Mathematics Education*, Spring Nature, 2021, cap. 53, pp. 695-707, doi: 10.1007/s11858-021-01233-6.

[10] R. Duval, "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 1, pp. 143-168, 2006.

[11] P. Salinas y J. Alanís, "Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa", *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, vol. 12, n.º 3, pp. 355-382, 2009.