

Diseño de un controlador en tiempo discreto para sistemas no lineales

Design of a discrete-time controller for nonlinear systems

Miguel Hernández González¹ ✉ 

¹Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

RESUMEN

En este trabajo se diseñó un controlador en tiempo discreto que estabiliza una ecuación en diferencias escalar, donde es posible elegir el tiempo de convergencia al origen como un parámetro en la ley de control. En ausencia de perturbaciones, se realizó un análisis del controlador para verificar que la solución converge al origen en un número de pasos finito. Con presencia de perturbaciones acotadas, se agregó al controlador propuesto un término integral discreto que rechaza dichas perturbaciones y al mismo tiempo se logran los objetivos de control. Finalmente, se aplicaron los resultados obtenidos a un sistema de ecuaciones en diferencias para comprobar la factibilidad de dicho estudio.

PALABRAS CLAVE: control discreto; tiempo de convergencia; perturbaciones; sistema no lineal.

ABSTRACT

In this work, a discrete-time controller was designed that stabilizes a scalar difference equation, where it is possible to choose the convergence time to the origin as a parameter in the control law. In the absence of disturbances, an analysis of the controller was performed to verify that the solution converges to the origin in a finite number of steps. In the presence of bounded disturbances, a discrete integral term was added to the proposed controller that rejects such disturbances and at the same time achieves the control objectives. Finally, the results obtained were applied to a system of difference equations to verify the feasibility of said study.

KEYWORDS: discrete-time controller; convergence time; disturbances; nonlinear system.

Correspondencia:

DESTINATARIO: Miguel Hernández González
INSTITUCIÓN: Universidad Autónoma de Nuevo León
DIRECCIÓN: Pedro de Alba s/n, Ciudad Universitaria, C. P. 66455, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
CORREO ELECTRÓNICO: miguel.hernandezgnz@uanl.edu.mx

Fecha de recepción: 10 de marzo de 2024. **Fecha de aceptación:** 2 de octubre de 2024. **Fecha de publicación:** 14 de octubre de 2024.



I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas lineales y no lineales ha sido objeto de estudio por una gran variedad de investigadores en décadas recientes y diversos algoritmos se han ido desarrollando a lo largo de los años, como el control de sistemas lineales [1], H infinito [2] y control óptimo [3]. Para el control de sistemas no lineales se pueden mencionar el de modos deslizantes [4], [5] y el de retroalimentación del estado [6], el primero de los cuales ha recibido mucha atención debido a su robustez ante perturbaciones externas y a la variación de parámetros [7]. Este tipo de controlador se diseña utilizando una función discontinua que conmuta a muy alta frecuencia, lo que produce un fenómeno conocido como *chattering* causado por dinámicas no modeladas. Esta desventaja en el algoritmo por modos deslizantes se puede minimizar por medio de los modos deslizantes de segundo orden introducido por A. Levant [8].

Otro tipo de controladores que en años recientes han recibido mucha atención son los de tiempo de convergencia en tiempo finito [9], tiempo fijo [10] y tiempo predeterminado [11], [12]. En el primero de ellos, el tiempo de convergencia al origen depende de las condiciones iniciales, por lo que si estas no están acotadas, el tiempo de convergencia tampoco. Esta desventaja se resolvió con los controladores cuyo tiempo de convergencia se presenta en tiempo fijo, es decir, tal tiempo de convergencia está acotado por una constante independientemente de cualquier condición inicial. Finalmente, en los controladores cuyo tiempo de convergencia es predeterminado, el parámetro que indica la convergencia al origen aparece explícitamente en la ley de control (véase [11], por ejemplo).

Por otro lado, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para el diseño de controladores de sistemas dinámicos, la mayoría de ellos han sido desarrollados para sistemas en tiempo continuo, pero su contraparte, en tiempo discreto, no ha recibido la misma atención o no ha sido aún tan amplia. Algunos trabajos que han contribuido al control en tiempo discreto se pueden encontrar en [13], [14], [15], [16], en donde se emplean técnicas como linealización por retroalimentación del estado y modos deslizantes en tiempo discreto [13], modos deslizantes integrales en tiempo discreto [14], *super-twisting* en tiempo discreto [16] y control en tiempo finito para sistemas discretos lineales variantes en el tiempo [17], entre otros.

Con base en las anteriores consideraciones, en este trabajo se presenta una propuesta de un controlador en tiempo discreto donde el tiempo de convergencia ante la ausencia de perturbaciones se puede seleccionar como parámetro en la ley de control. Si el sistema original está sujeto a perturbaciones externas acotadas, en la ley de control se agrega un término integral discreto que compensa dicha perturbación.

II. METODOLOGÍA

A. CONTROL EN AUSENCIA DE PERTURBACIONES

Considérese el siguiente sistema en tiempo discreto:

$$x(k+1) = u(k) \quad (1)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x(k) \in \mathbb{R}$ es el estado del sistema y $u(k) \in \mathbb{R}$ es una entrada de control.

El objetivo de la entrada de control $u(k)$ es llevar el estado del sistema desde la condición inicial x_0 al origen en un tiempo discreto k_f previamente asignado. Se propone la siguiente ley de control para el sistema (1):

$$u(k) = \begin{cases} x(k) - \frac{x_0}{k_f}, & 0 \leq k \leq k_f \\ x(k), & k > k_f \end{cases} \quad (2)$$

donde k_f es el número de pasos preasignados para llegar al origen, $k_f = \frac{t_f}{T}$, t_f es el tiempo en segundos para llegar al origen y T el periodo de muestreo.

B. ANÁLISIS DE LA LEY DE CONTROL

Considérese el intervalo de tiempo $0 \leq k \leq k_f$. Se sustituye la entrada de control $u(k)$ en la ecuación (1):

$$x(k+1) = x(k) - \frac{x_0}{k_f} \quad (3)$$

Se resuelve la ecuación (3) con $k = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Observe de la ecuación (2) que los valores que k puede tomar están limitados por k_f , $k \leq k_f$.

$$x(1) = x_0 - \frac{x_0}{k_f} \quad (4)$$

$$x(2) = x_0 - \frac{2x_0}{k_f} \quad (5)$$

y así sucesivamente, hasta $k = n$:

$$x(n) = x_0 - \frac{nx_0}{k_f} \quad (6)$$

Finalmente, en el paso $n = k_f$, $x(n = k_f) = 0$, es decir, cuando se han realizado k_f pasos desde la condición inicial en $k = 0$, la evolución del estado x alcanza al origen.

Enseguida, se sustituye ahora la ley de control $u(k) = x(k)$, para toda $k > k_f$, $x(k + 1) = x(k)$, con la condición inicial $x(k_f) = 0$. Supóngase que el estado $x(k)$ ha llegado al origen en el paso k_f , es decir, $x(k_f) = 0$, por lo que en el paso $k_f + 1$ se mantendrá en el origen, es decir, $x(k_f + 1) = x(k_f) = 0$, dada la condición inicial, y así sucesivamente para los tiempos posteriores, $x(k + 1) = x(k) = 0$, para toda $k \geq k_f$. Con esto se concluye el análisis.

El siguiente ejemplo ilustra la ley de control presentada en la ecuación (2).

Ejemplo 1. Considérese la siguiente ecuación en diferencias lineal:

$$x(k + 1) = 2x(k) + u(k) \quad (7)$$

donde $x(k) \in R$ es el estado del sistema, $u(k) \in R$ es la entrada de control y con la condición inicial $x(0) = x_0$. Se elige la ley de control $u(k)$ de acuerdo con la ecuación (2) como sigue:

$$u(k) = \begin{cases} -x(k) - \frac{x_0}{k_f}, & k_0 \leq k \leq k_f \\ -x(k), & k > k_f \end{cases} \quad (8)$$

Observe que si se sustituye en el intervalo de tiempo $0 \leq k \leq k_f$, la ley de control (8) en la ecuación lineal (7), la ecuación en diferencias resultante es similar a la ecuación (3). Por lo tanto, la convergencia al origen se alcanza en $n = k_f$ pasos. De igual forma para el intervalo de tiempo $k > k_f$.

Para el ejemplo 1, el tiempo de muestreo T se ha elegido como $T = 0.001$ segundos, $k_f = 500$, por lo que en el tiempo $t_f = 0.5$ segundos el estado $x(k)$ convergerá al origen sin importar la condición inicial. La Figura 1 muestra la evolución temporal del estado $x(k)$ y la entrada de control $u(k)$ en el intervalo de tiempo $[0, 1.5]$

segundos para diferentes condiciones iniciales. Observe que cuando $t_f = 0.5$ segundos, ambos el estado y la entrada de control convergen al origen y permanecen allí para tiempos futuros, $k > k_f$.

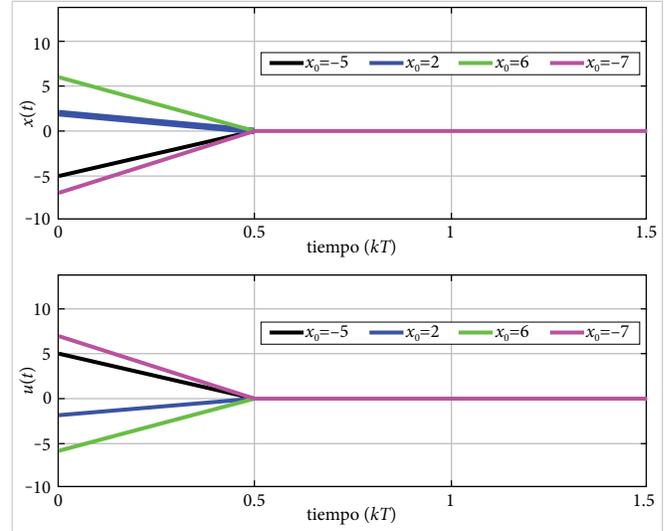


Figura 1. Evolución temporal de la variable $x(k)$ y $u(k)$.

C. RECHAZO DE PERTURBACIONES

Considérese ahora la siguiente ecuación:

$$x(k + 1) = u(k) + \rho(k) \quad (9)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$. $k \in N \cup \{0\}$, $x(k) \in R$ es el estado del sistema, $u(k) \in R$ es una entrada de control y $\rho(k)$ es una perturbación externa acotada.

La ley de control $u(k)$ propuesta es

$$u(k) = \begin{cases} x(k) - \frac{x_0}{k_f} - b_1 \sqrt{|x(k)|} \text{sign}(x(k)) \\ \quad + \delta(k), & k_0 \leq k < k_f \\ x(k) - b_2 \sqrt{|x(k)|} \text{sign}(x(k)) \\ \quad + \delta(k), & k \geq k_f \end{cases} \quad (10)$$

donde $\delta(k + 1) = \delta(k) - T b_3 \text{sign}(x(k))$ es el término que rechaza la perturbación $\rho(k)$ con la condición inicial $\delta(0) = 0$, y b_1, b_2, b_3 son constantes positivas. El término $\sqrt{|x(k)|} \text{sign}(x(k))$ ayuda a mantener al estado $x(k)$ en el origen. Note que el término $x(k) - \frac{x_0}{k_f}$ en (10) es el mismo propuesto en la ley de control (2). El siguiente ejemplo ilustra la aplicabilidad de la ley de control (10).

Ejemplo 2. Considérese la siguiente ecuación en diferencias no lineal

$$x(k + 1) = x^2(k) + u(k) + \rho(k) \quad (11)$$

con condición inicial $x_0 = 5$ y perturbación externa $\rho(k) = 0.5\text{sen}\left(\frac{2\pi kT}{3}\right)$. La ley de control (10) toma la siguiente forma:

$$u(k) = \begin{cases} -x^2(k) + x(k) - \frac{x_0}{k_f} - b_1\sqrt{|x(k)|}\text{sign}(x(k)) + \delta(k), & k_0 \leq k < k_f \\ -x^2(k) - b_2\sqrt{|x(k)|}\text{sign}(x(k)) + x(k) + \delta(k), & k \geq k_f \end{cases} \quad (12)$$

y $\delta(k + 1) = \delta(k) - Tb_3\text{sign}(x(k))$, con $\delta(0) = 0$.

Los resultados de simulación se realizaron con los siguientes parámetros: $k_f = 100$, $T = 0.01$, $b_1 = 0.2$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 5$, que se muestran en la Figura 2. Observe que después del tiempo de convergencia $t_f = 1$ segundo, el estado del sistema $x(k)$ permanece en 0 para todo $k > k_f$, aun en presencia de perturbaciones (Figuras 2 y 3).

La Figura 2 ilustra la evolución temporal del estado $x(k)$ junto con la evolución temporal de la ley de control $u(k)$ aplicada (12).

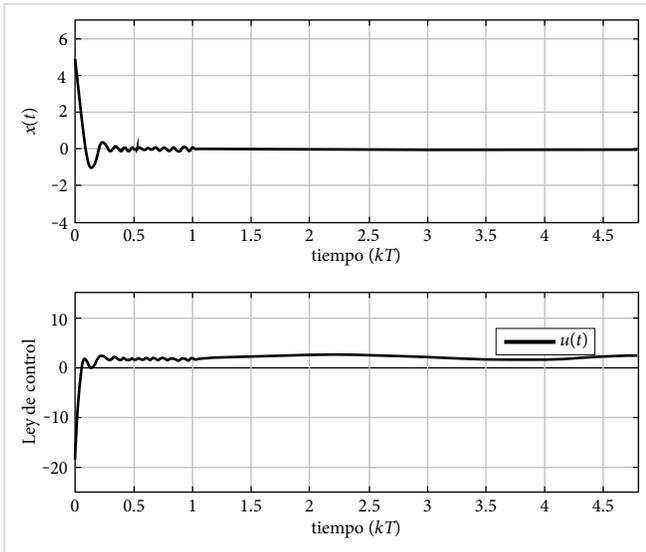


Figura 2. Evolución temporal del estado $x(k)$ y la entrada de control $u(k)$.

La Figura 3 ilustra la evolución temporal de la perturbación $\rho(k)$ (línea negra) y el término $\delta(k)$ que rechaza dicha perturbación.

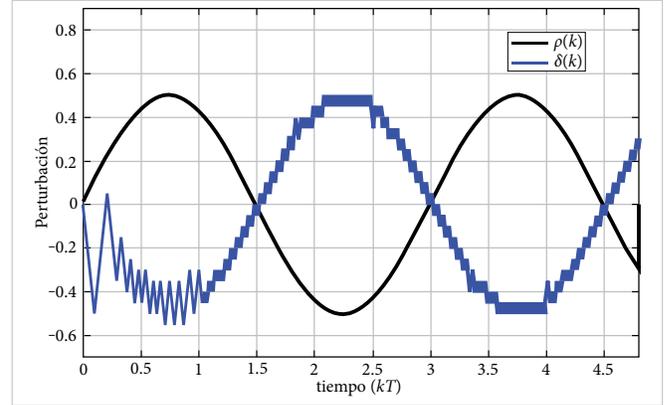


Figura 3. Línea negra: perturbación aplicada al sistema. Línea azul: variable que rechaza la perturbación.

En la sección II D se presenta un ejemplo de la ley de control propuesta a un sistema de ecuaciones en diferencias.

D. SISTEMA DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1(k + 1) &= x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k + 1) &= x_2(k) + u(k) + \rho(k) \end{aligned} \quad (13)$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$. $\rho(k)$ es una perturbación externa desconocida, pero acotada. La metodología para estabilizar el sistema de ecuaciones en (13) es como sigue.

Se define una nueva variable

$$z_1(k) = x_1(k) \quad (14)$$

y se toma un paso adelante

$$z_1(k + 1) = x_1(k) + x_2(k) \quad (15)$$

considerando $x_2(k)$ como una variable de control virtual, y para el intervalo de tiempo $k \geq 0$

$$x_2^{\text{des}}(k) = (l_1 - 1)z_1(k) \quad (16)$$

Se define una nueva variable de error $z_2(k) = x_2(k) - x_2^{\text{des}}(k)$ y tomando un paso adelante

$$z_2(k + 1) = x_2(k) + u(k) + \rho(k) - x_2^{\text{des}}(k + 1) \quad (17)$$

donde $x_2^{\text{des}}(k + 1) = (l_1 - 1)(x_1(k) + x_2(k))$.

Para la ecuación (17), considérese la siguiente ley de control:

$$u(k) = \vartheta(k) + (l_1 - 1)(x_1(k) + x_2(k)) - x_2(k) \quad (18)$$

Con la ley de control (18), la ecuación (17) se escribe como sigue:

$$z_2(k + 1) = \vartheta(k) + \rho(k) \quad (19)$$

Observe que la ecuación (19) toma la forma de la ecuación (9) de la sección II C, por lo que la ley de control $\vartheta(k)$ se obtiene de (10) y toma la forma siguiente:

$$\vartheta(k) = \begin{cases} z_2(k) - \frac{z_{20}}{k_f} - b_1 \sqrt{|z_2(k)|} \text{sign}(z_2(k)) \\ \quad + \delta(k), & 0 \leq k < k_f \\ z_2(k) - b_2 \sqrt{|z_2(k)|} \text{sign}(z_2(k)) \\ \quad + \delta(k), & k \geq k_f \end{cases} \quad (20)$$

donde $\delta(k + 1) = \delta(k) - T b_3 \text{sign}(z_2(k))$.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados de simulación se obtuvieron con las siguientes condiciones iniciales y parámetros: $x_1(0) = -5$, $x_2(0) = 8$, $b_1 = b_2 = 0.3$, $l_1 = 0.3$, $\delta(0) = 0$, $k_f = 150$, $N = 480$, $T = 0.01$. Las Figuras 4, 5 y 6 muestran los resultados de simulación en el intervalo de tiempo de 0 a 4.8 segundos. La Figura 4 muestra la evolución temporal de los estados $x_1(k)$, $x_2(k)$ del sistema de ecuaciones (13) ante la ausencia de control, es decir, $u(k) = 0$, y $\rho(k) = 0.5 \text{sen}(\frac{2\pi k T}{3})$.

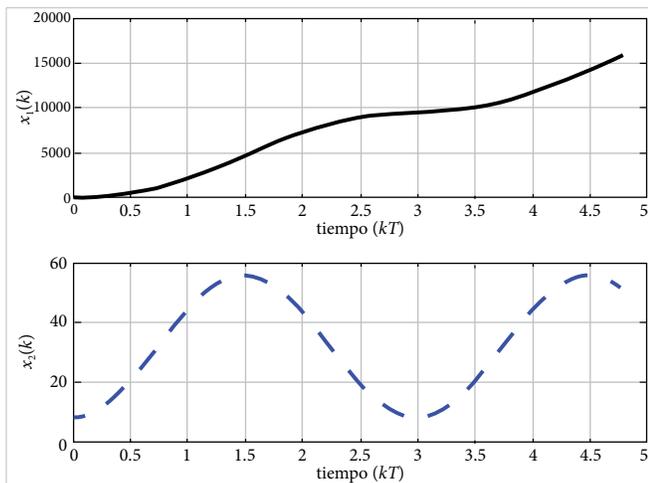


Figura 4. Evolución temporal de los estados $x_1(k)$, $x_2(k)$ en la ecuación (13) ante la ausencia de control $u(k) = 0$, y en presencia de la perturbación $\rho(k) = 0.5 \text{sen}(\frac{2\pi k T}{3})$.

DOI : 10.20983/culcyt.2024.3.2.4

El objetivo del controlador propuesto en las ecuaciones (18) y (20) es llevar al origen las variables de estado $x_1(k)$, $x_2(k)$, en las ecuaciones en diferencias (13), aun ante la presencia de perturbaciones.

La Figura 5 muestra los resultados obtenidos al aplicar la ley de control (18) al sistema de ecuaciones en (13), donde $\vartheta(k)$ está dada por la ecuación (20). Observe que los estados son mantenidos en el origen por la ley de control $u(k)$ (18), aun ante la presencia de perturbaciones. La ley de control $u(k)$, una vez que se compensa la perturbación, se mantiene en un valor de 0, como se ve en la Figura 5.

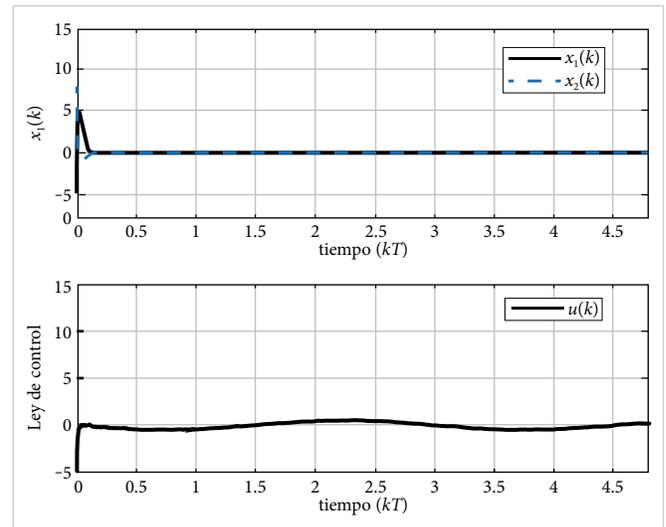


Figura 5. Arriba: evolución temporal de los estados $x_1(k)$, $x_2(k)$. Abajo: ley de control $u(k)$ que mantiene a los estados alrededor del origen.

La Figura 6 ilustra la perturbación $\rho(k) = 0.5 \text{sen}(\frac{2\pi k T}{3})$ aplicada al sistema (13) junto con la variable $\delta(k)$ (20) que rechaza dicha perturbación. Observe que ambas gráficas son similares, solo que de signo contrario. Esto es, con la suma de la perturbación $\rho(k)$ más el término que lo rechaza $\delta(k)$ en la ley de control $u(k)$ se obtiene 0.

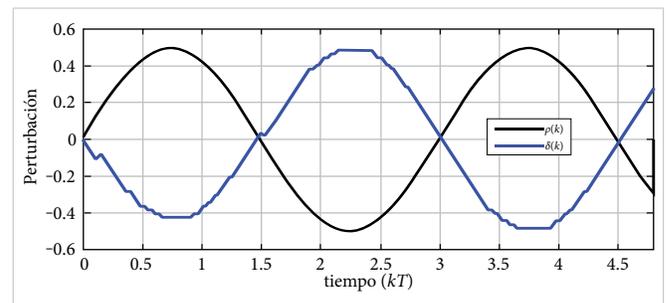


Figura 6. La línea negra representa la perturbación $\rho(k)$ aplicada en la ecuación (13), y la línea azul es la evolución temporal $\delta(k)$ en (20) que compensa la perturbación.

Como se puede ver en la metodología propuesta y en los resultados de los ejemplos numéricos, es posible aplicar este controlador en tarjetas programables, como pueden ser Arduino y Beagle Bone, entre otras, ya que no es necesario realizar complicadas operaciones y la ley de control se obtiene de manera recursiva.

IV. CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado el diseño de una ley de control en tiempo discreto donde, en ausencia de perturbaciones, es posible elegir el tiempo de convergencia al origen para sistemas escalares.

A pesar de que el diseño del controlador se ha propuesto para sistemas escalares, es posible extenderlo a sistemas de ecuaciones en tiempo discreto como se ve en el ejemplo propuesto.

Como trabajo futuro se plantea otros tipos de controladores en tiempo discreto y su aplicación en tiempo real.

REFERENCIAS

- [1] E. Hendricks, O. Jannerup y P. H. Sørensen, "Linear control system design", en *Linear systems control. Deterministic and stochastic methods*, E. Hendricks, O. Jannerup y P. H. Sørensen, eds., 1.ª ed. Berlín, Alemania: Springer, 2008, cap. 4, pp. 193-291, doi: [10.1007/978-3-540-78486-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78486-9).
- [2] J. B. Burl, "H infinity control", en *Linear optimal control*, J. B. Burl, ed., 1.ª ed. Menlo Park, Estados Unidos de América: Addison-Wesley, 1999, cap. 3, pp. 329-368.
- [3] D. E. Kirk, *Optimal control theory. An introduction*, 1.ª ed. Nueva York, Estados Unidos de América: Dover Publications, 2004.
- [4] V. I. Utkin, *Sliding modes in control optimization*, 1ª ed. Berlín, Alemania: Springer, 1992, doi: [10.1007/978-3-642-84379-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-84379-2).
- [5] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman y A. Levant, *Sliding mode control and observation*, 1ª ed. Londres, Reino Unido: Birkhauser, 2014, doi: [10.1007/978-0-8176-4893-0](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4893-0).
- [6] A. Isidori, "Elementary theory of nonlinear feedback for single-input single-output systems", en *Nonlinear Control Systems*, A. Isidori, eds., 2.ª ed. Berlin, Alemania: Springer, 1989, cap. 4, pp. 145-233, doi: [10.1007/978-1-84628-615-5](https://doi.org/10.1007/978-1-84628-615-5).
- [7] V. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, n.º 2, pp. 212-222, abr. 1977, doi: [10.1109/TAC.1977.1101446](https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101446).
- [8] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", *Int. J. Control*, vol. 58, n.º 6, pp. 1247-1263, mar. 2007, doi: [10.1080/00207179308923053](https://doi.org/10.1080/00207179308923053).
- [9] S. Bhat, D. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems", *SIAM J. Control Optim.*, vol. 38, n.º 3, pp. 751-766, 2000, doi: [10.1137/S0363012997321358](https://doi.org/10.1137/S0363012997321358).
- [10] A. Polyakov, "Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, n.º 8, pp. 2106-2110, ag. 2012, doi: [10.1109/TAC.2011.2179869](https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2179869).
- [11] A. Garza-Alonso, M. Basin y P. Rodriguez-Ramirez, "Predefined-time stabilization permanent-magnet synchronous motor", *Trans. Inst. Meas. Control*, vol. 43, n.º 13, pp. 3044-3054, jun. 2021, doi: [10.1177/01423312211016741](https://doi.org/10.1177/01423312211016741).
- [12] J. D. Sánchez-Torres, D. Gómez-Gutiérrez, E. López y A. Loukianov, "A class of predefined-time stable dynamical systems", *IMA J. Math. Control. Inf.*, vol. 35, n.º 1, pp. i1-i29, abr. 2018, doi: [10.1093/imamci/dnx004](https://doi.org/10.1093/imamci/dnx004).
- [13] M. Galicia, A. Loukianov, J. Rivera y V. I. Utkin, "Discrete-time sliding mode regulator for nonminimum phase systems", *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Maui, HI, EUA, 2012, pp. 7708-7713, doi: [10.1109/CDC.2012.6425813](https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6425813).
- [14] K. Abidi, J.-X. Xu y Y. Xinghuo, "On the Discrete-Time Integral Sliding-Mode Control", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, n.º 4, pp. 709-715, abr. 2007, doi: [10.1109/TAC.2007.894537](https://doi.org/10.1109/TAC.2007.894537).
- [15] K. C. Veluvolu, Y. C. Soh y W. Cao, "Robust discrete-time nonlinear sliding mode state estimation of uncertain nonlinear systems", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 17, n.º 9, pp. 803-828, nov. 2006, doi: [10.1002/rnc.1154](https://doi.org/10.1002/rnc.1154).

- [16] I. Salgado, S. Kamal, I. Chairez, B. Bandyopadhyay y L. Fridman, "Super-twisting-like algorithm in discrete time nonlinear systems", *The 2011 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, Zhengzhou, China, 2011, pp. 497-502.
- [17] F. Amato, M. Ariola y C. Cosentino, "Finite-time control of discrete-time linear systems: Analysis and design

conditions", *Automatica*, vol. 46, n.º 5, pp. 919-924, may. 2010, doi: [10.1016/j.automatica.2010.02.008](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.02.008).

RECONOCIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo brindado.