

Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial

Non-traditional dynamic vibration absorber for controlling inertial force

José Gabriel Mendoza-Larios¹✉, Eduardo Barredo-Hernández¹, Irving Abdiel Maldonado-Bravo²

¹Universidad Tecnológica de la Mixteca.

²Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).

RESUMEN

En este artículo se aborda el problema de optimización del absorbedor dinámico de vibración no tradicional (NDVA) para el control pasivo de vibración en una estructura de un grado de libertad sometida a excitación inercial. Para la obtención de los parámetros óptimos de diseño del NDVA, se aplicaron dos enfoques diferentes: la técnica de los puntos fijos y el criterio \mathcal{H}_∞ . De la implementación de la técnica de los puntos fijos en combinación con la técnica de ajuste de frecuencias de Krenk se obtuvieron relaciones simples para los parámetros de diseño del NDVA. Por otro lado, mediante el método de Nishihara y el Teorema de Vieta se redujo el problema de optimización del criterio \mathcal{H}_∞ a la solución de un sistema restringido de ecuaciones no lineales. Este sistema se resolvió para el rango de valores de la relación de masa $1\% \leq \mu \leq 20\%$. Para este rango de valores el NDVA, en comparación con el absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA), presenta una mejora de 0.36 – 15.7 % en la supresión de vibración.

PALABRAS CLAVE: técnica de los puntos fijos; frecuencias invariantes; optimización \mathcal{H}_∞ ; NDVA; excitación inercial.

ABSTRACT

This paper deals with solution for the constrained nonlinear multivariable optimization problem which provides the optimal design to the non-traditional dynamic vibration absorber when coupled to the single degree-of-freedom structure under inertial force. For the calculation of NDVA's design optimal parameters, it was necessary to apply two different approaches which are the following: the fixed-points technique and the \mathcal{H}_∞ criterion. When the fixed-points technique is combined with the Krenk's frequency tuning approach, short closed-form solutions are obtained for the optimal design of NDVA. By applying the Nishihara's method and the Vieta's theorem to numerically solve the \mathcal{H}_∞ optimization problem, a better dynamic balance between resonant points can be obtained unlike the fixed-points technique. For the mass ratio range from 1% to 20%, it was proved that NDVA yields 0.36-15.7% improvement compared with the classic dynamic vibration absorber.

KEYWORDS: fixed-points technique; invariant frequencies; \mathcal{H}_∞ optimization; NDVA; inertial excitation.

Correspondencia:

DESTINATARIO: José Gabriel Mendoza Larios
INSTITUCIÓN: Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM)
DIRECCIÓN: Carretera Huajuapán-Acatlím, km 2.5
Huajuapán de León, Oaxaca, México, C.P. 69000
CORREO ELECTRÓNICO: jgml@mixteco.utm.mx

Fecha de recepción: 14 de febrero de 2022. **Fecha de aceptación:** 20 de mayo de 2022. **Fecha de publicación:** 14 de junio de 2022.



I. INTRODUCCIÓN

Es común que las máquinas y estructuras experimentan ciertos niveles de vibración debido a la acción de fuerzas externas que actúan sobre ellas. Más aún, si la frecuencia de las fuerzas de excitación se iguala a las frecuencias naturales del sistema, se producirá el fenómeno conocido como resonancia. Bajo esta condición, los niveles de vibración crecen de forma descontrolada y pueden causar daños en máquinas y estructuras o en algunos de los elementos que las componen. Por esto, se vuelve necesaria la implementación de sistemas de amortiguación para mitigar las amplitudes de vibración del sistema. Entre estos sistemas de amortiguación se encuentran: topes de impacto, amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración, inersores y amortiguadores con fluidos inteligentes, entre otros [1]. Asimismo, la principal función de un sistema de amortiguamiento es disminuir o inclusive cancelar las vibraciones mecánicas.

En las últimas décadas, el control pasivo de vibraciones mediante la aplicación de absorbedores dinámicos de vibración se ha incrementado notablemente en diferentes áreas de la ingeniería. Este aumento se debe principalmente a su simplicidad en cuanto a diseño e implementación. El primer absorbedor de vibración fue inventado por Frahm alrededor de 1911 [2], el cual consistía en una masa secundaria y un resorte conectado entre el sistema principal y la masa secundaria. Más tarde se añadiría un amortiguador al sistema secundario, para el que Ormondroyd y Den Hartog [3] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA (*Dynamic Vibration Absorber*) utilizando la técnica de los puntos fijos.

Posteriormente, Krenk [4] propuso una teoría de ajuste de frecuencias para el cálculo del factor de amortiguamiento óptimo, que produce la misma amplitud de vibración en el rango de frecuencias de operación del DVA. Por su parte, Asami et al. [5] y Nishihara y Asami [6] utilizaron los criterios de optimización \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 para el desarrollo de soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. Adicionalmente, Argentini et al. [7] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA sujeto a una fuerza inercial derivada de una masa desbalanceada. Por otro lado, Ren [8] propuso una modificación del DVA clásico al fijar a tierra una de las terminales del elemento amortiguador, configuración que se conoce como absorbedor de vibración no tradicional (*Nonlinear Dynamic Vibration Absorber*: NDVA).

Posteriormente, Heidari y Monjezi [9] implementaron tanto el DVA clásico como el NDVA para el control de vibraciones en un rotor tipo Jeffcott y los resultados muestran que el NDVA mejora la supresión de vibración comparado con el DVA clásico.

En este trabajo se presenta un estudio para el control de vibraciones de una estructura sometida a excitación inercial, mediante la implementación de un NDVA. Se obtuvieron ecuaciones simplificadas para los parámetros de diseño óptimo del NDVA, a partir de la técnica de los puntos fijos. Cabe señalar que la ecuación para el cálculo del factor de amortiguamiento óptimo no se ha reportado en la literatura. También, se implementó la optimización del índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ y mediante el método de Nishihara se obtuvieron los parámetros de diseño óptimos del NDVA de forma numérica. Adicionalmente, se presenta el incremento de supresión de vibración que provee el NDVA en comparación con el DVA clásico.

II. METODOLOGÍA

Este trabajo de investigación se realizó mediante el seguimiento de la metodología que se presenta enseguida:

1. Investigación sobre el estado del arte del control pasivo de vibraciones de sistemas mecánicos utilizando absorbedores de vibración.
2. Definición del problema y modelado matemático del sistema mecánico con absorbedor de vibración bajo excitación inercial.
3. Obtención de la Función de respuesta en frecuencia del sistema (FRF) y cálculo de los parámetros óptimos de diseño del sistema absorbedor de vibraciones, mediante la implementación de la técnica de los puntos fijos y el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ .
4. Análisis de los resultados y conclusiones.

En el siguiente apartado se muestra el desarrollo del modelado matemático y la obtención de la FRF del sistema con el NDVA.

MODELADO MATEMÁTICO

En esta parte se desarrolla el modelo matemático del sistema mecánico con absorbedor de vibración no tradicional (NDVA), así como, su FRF.

En la Figura 1 se muestra el sistema de estudio, que está compuesto por una masa primaria sometida a excita-

ción inercial y un sistema secundario constituido por una masa, un resorte conectado entre las masas y un amortiguador de fluido viscoso entre la masa secundaria y la tierra mecánica.

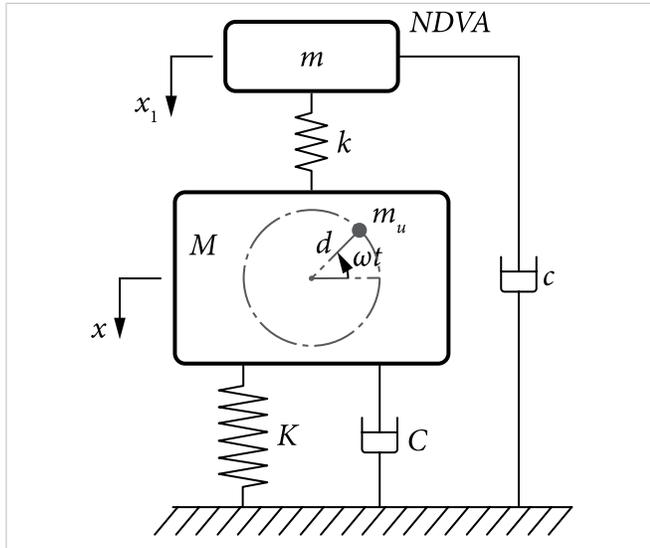


Figura 1. Sistema con NDVA bajo excitación inercial.

Por lo tanto, después de la aplicación del formulismo Euler-Lagrange para sistemas no conservativos y, en especial, al sistema mecánico mostrado en la Figura 1, se obtiene el modelo matemático que rige su comportamiento dinámico, el cual se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + k(x - x_1) &= F_0 \text{sen}\omega t \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k(x_1 - x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{con } F_0 = m_u d \omega^2$$

donde M , C y K representan la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema primario. Asimismo, para el sistema secundario, m , c y k constituyen su masa, su amortiguamiento y su rigidez. Además, m_u es una masa que se ubica a una distancia d y representa la excitación inercial cuya frecuencia es ω . Adicionalmente, como la excitación inercial es de tipo armónica, el sistema representado por la Ecuación (1), al considerar una solución de tipo armónica, con $C \cong 0$ y después de un tratamiento matemático consistente, la FRF adimensional del sistema primario se da como sigue:

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)| = \Omega^2 \left[\frac{A(q, \Omega) + B(q, \zeta, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega) + D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} A &= [(q + \Omega)(q - \Omega)]^2 \\ B &= (2q\zeta\Omega)^2 \end{aligned}$$

$$C = \{[1 + (\mu + 1)q^2]\Omega^2 - q^2 - \Omega^4\}^2$$

$$D = [(2q\zeta\Omega)(1 + \mu q^2 - \Omega^2)]^2$$

donde

$$\mu = \frac{m}{M}, \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_2}, \quad \Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y los parámetros adimensionales μ , q , ζ y Ω definidos anteriormente representan la relación de masas, la relación de frecuencias naturales no amortiguadas, el factor de amortiguamiento y la relación de frecuencia forzada, respectivamente. Estos parámetros adimensionales se pueden verificar mediante un análisis dimensional al implementar el teorema II de Buckingham [10]. Adicionalmente, el diseño del NDVA quedará especificado a partir de los valores de estos parámetros.

En la siguiente subsección, se implementará la técnica de los puntos fijos con la finalidad de obtener los parámetros óptimos de diseño del sistema absorbente de vibraciones, a partir de relaciones matemáticas simplificadas.

TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS

La técnica de los puntos fijos consiste en un proceso de calibración de frecuencias al considerar dos estados de operación límite del absorbente. Estos estados de operación límite se dan cuando el amortiguamiento del sistema toma los valores $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$. Bajo estas condiciones se producen los llamados puntos fijos o puntos invariantes, que son independientes del factor de amortiguamiento.

Para la implementación de la técnica de los puntos fijos se considera la FRF del sistema descrito en la Figura 1, representada por la Ecuación (2). Si se evalúa la FRF del sistema en los estados de operación límite cuando $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$, se obtienen las siguientes dos ecuaciones que son independientes del amortiguamiento:

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow 0} = \left[\frac{A(q, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$|H(\mu, q, \zeta, \Omega)|_{\zeta \rightarrow \infty} = \left[\frac{B(q, \zeta, \Omega)}{D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

De la igualación de las Ecuaciones (3) y (4) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{A(q, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega)} = \pm \frac{B(q, \zeta, \Omega)}{D(\mu, q, \zeta, \Omega)} \quad (5)$$

La Ecuación (5) arroja un resultado trivial cuando se resuelve considerando el signo positivo y, en contraste, con el signo negativo se obtiene la Ecuación (6):

$$a\Omega^2 + b(\mu, q)\Omega + c(\mu, q) = 0 \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b(\mu, q) &= -(\mu q^2 + q^2 + 1) \\ c(\mu, q) &= \frac{1}{2}q^2(\mu q^2 + 2) \end{aligned}$$

Por otra parte, se puede obtener una expresión matemática equivalente a la Ecuación (6) expresada en función de la magnitud $|H|$. Esto se logra al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación (4) y con un tratamiento algebraico adecuado, lo que resulta en la Ecuación (7).

$$\tilde{a}(|H|)\Omega^2 + \tilde{b}(\mu, q, |H|)\Omega + \tilde{c}(\mu, q, |H|) = 0 \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{a}(|H|) &= |H|^2 - 1 \\ \tilde{b}(\mu, q, |H|) &= -2|H|^2(\mu q^2 + 1) \\ \tilde{c}(\mu, q, |H|) &= |H|^2(\mu q^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Es importante notar que las Ecuaciones (6) y (7) son bicuadráticas y que sus soluciones son dos raíces reales que corresponden a las frecuencias invariantes del NDVA. En la Figura 2 se muestra la FRF de la estructura principal para diferentes valores del factor de amortiguamiento. En esta se pueden apreciar los puntos fijos denotados por P_1 y P_2 , que son independientes del amortiguamiento del sistema. Asimismo, a cada punto fijo le corresponde una frecuencia invariante.

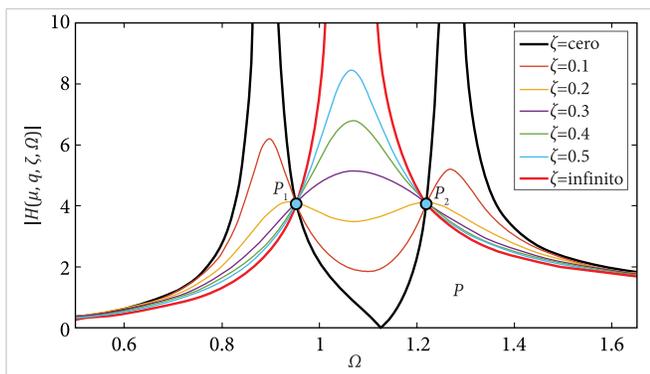


Figura 2. FRF de la estructura primaria para diferentes valores del factor de amortiguamiento.

Por otro lado, para obtener las expresiones simplificadas de los parámetros óptimos de diseño del NDVA que producen la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes, se emplea el Teorema de Vieta. Por consiguiente, la suma y producto de las raíces reales de los polinomios mónicos derivados de las Ecuaciones (6) y (7) se pueden expresar a partir de lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 = \sum_{i=1}^2 \Omega_{\zeta \rightarrow \infty, i}^2 \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^2 \Omega_i^2 \Omega_j^2 = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^2 (\Omega_i^2 \Omega_j^2)_{\zeta \rightarrow \infty} \quad (9)$$

Después de sustituir las sumas y los productos de las raíces de los polinomios mónicos en las Ecuaciones (8) y (9) respectivamente, se obtienen las Ecuaciones (10) y (11):

$$-(\mu q^2 + q^2 + 1) = \frac{-2|H|^2(\mu q^2 + 1)}{|H|^2 - 1} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}q^2(\mu q^2 + 2) = \frac{|H|^2(\mu q^2 + 1)^2}{|H|^2 - 1} \quad (11)$$

Al resolver simultáneamente las Ecuaciones (10) y (11), se obtienen expresiones analíticas simplificadas tanto para la variable adimensional de ajuste de frecuencias $q_{\text{ópt}}(\mu)$ como para la magnitud calibrada $|H(\mu)|$ correspondiente a los puntos fijos. Estas soluciones están en función de la relación de masas μ , y se expresan como sigue:

$$q_{\text{ópt}}(\mu) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} \quad (12)$$

$$|H(\mu)| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu} - \mu}{\mu}} \quad (13)$$

$$\Omega^2 - \mu q_{\text{ópt}}^2 - 1 = 0 \quad (14)$$

$$\Omega_{\zeta \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu}} \quad (15)$$

Por último, para determinar el factor de amortiguamiento que aplanan la función de respuesta en frecuencia de la estructura principal, es necesario sustituir $q_{\text{ópt}}(\mu)$, $|H(\mu)|$ y $\Omega_{\zeta \rightarrow \infty}$ en la Ecuación (2) y resolver la ecuación resultante para la relación de amortiguamiento ζ . Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo se expresa como sigue:

$$\zeta_{\text{ópt}}(\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\mu}} \quad (16)$$

Con la implementación de la técnica de los puntos fijos se logró la obtención de ecuaciones algebraicas simplificadas para el diseño óptimo del absorbedor de vibración no tradicional bajo excitación inercial. Adicionalmente, en la siguiente subsección se presenta el cálculo numérico de los parámetros óptimos de diseño del NDVA, considerando el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ .

ÍNDICE DE RENDIMIENTO \mathcal{H}_∞

En este apartado se utiliza el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ con el objetivo de optimizar los parámetros de diseño del NDVA mediante la minimización de las máximas amplitudes de vibración de la estructura principal en las frecuencias resonantes. El criterio \mathcal{H}_∞ se conoce comúnmente en la literatura como la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$ [11]. La implementación de esta norma conduce a un problema de optimización multivariable no lineal con restricciones de igualdad, el cual se define como sigue:

$$\min_{P_{\text{opt}}} \left(\max_{\Omega} (|H_{\text{NDVA}}(\Omega)|) \right) = \max_{\Omega} \left(|H_{\text{NDVA}}(P_{\text{opt}}, \mu, \Omega)| \right) \quad (17)$$

sujeto a

$$\frac{\partial |H(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0$$

donde $P_{\text{opt}}(q, \zeta)$ representa los parámetros de diseño del NDVA que deben optimizarse. Adicionalmente, el problema de optimización se restringe a soluciones reales positivas $P_{\text{opt}}(q, \zeta) \geq 0$. Con esto en mente, en este trabajo de investigación se utiliza el método de Nishihara [12] para resolver el problema de optimización planteado en la Ecuación (17). La idea novedosa de Nishihara fue proponer un artificio matemático para minimizar la FRF de la estructura principal mediante la siguiente función:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (18)$$

Esta función también se puede expresar como sigue:

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} = 0 \quad (19)$$

Al combinar la FRF de la estructura primaria definida por la Ecuación (2) con las Ecuaciones (18) y (19) se obtiene una expresión que garantiza que las amplitudes de vibración en las frecuencias resonantes sean iguales. Tal expresión se define por la Ecuación (20):

$$\Omega^4 + c_1\Omega^3 + c_2\Omega^2 + c_3\Omega + c_4 = 0 \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned} c_1(\mu, q, \zeta, r) &= 2\{q^2[(2\zeta^2 - 1)r^2 - \mu] - 1\}/r^2 \\ c_2(\mu, q, \zeta, r) &= \{\mu(\mu + 2 - 8\zeta^2) + r^2q^4 + 2(\mu - 4\zeta^2 + 2)q^2 + 1\}/r^2 \\ c_3(\mu, q, \zeta, r) &= 2q^2[2q^4\mu^2\zeta^2 + (4\mu\zeta^2 - \mu - 1)q^2 + \zeta^2 - 1]/r^2 \\ c_4(q, r) &= q^4/r^2 \end{aligned}$$

De esta forma se minimiza el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ al minimizar la variable desconocida r . Posteriormente, de la aplicación del Teorema de Vieta, la suma y el producto de las raíces de la Ecuación (20) genera un conjunto de ecuaciones no lineales en términos de los coeficientes c_i para $i=1, \dots, 4$, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow c_1\sqrt{c_4} - c_3 = 0 \\ f_2 &\rightarrow c_1\sqrt{c_4} - c_3 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Este sistema de ecuaciones está en función de los parámetros de diseño del absorbedor y de la variable desconocida r . Con la finalidad de resolver el sistema de ecuaciones (21), se agrega una ecuación de restricción, la cual proporciona una condición necesaria para alcanzar una solución óptima a la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$. La ecuación resultante se obtiene al utilizar la matriz jacobiana de la variación infinitesimal de la variable r con respecto a los parámetros de diseño del absorbedor. Esta matriz jacobiana se expresa como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

La matriz jacobiana tiene un tamaño de 2×3 y se satisface para cualquier determinante menor de 2×2 igualado a cero. Por lo tanto, la ecuación de restricción se define por la Ecuación (23):

$$f_3 \rightarrow \det = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Asimismo, se puede observar que el proceso de optimización mediante el cálculo de la norma $\|H_\infty\|$ utilizando el método de Nishihara se reduce a la solución del sistema de ecuaciones no lineales conformado por las Ecuaciones (21) y (23). El sistema de ecuaciones resultante se resuelve mediante el método de Newton-Raphson, al tomar como datos de inicio los valores de

los parámetros óptimos obtenidos a partir de la técnica de los puntos fijos.

En la siguiente sección se presentan los resultados de los parámetros de diseño óptimo del DVA que se obtuvieron a partir de la técnica de los puntos fijos y la norma $\|H_\infty\|$. Además, se calcula el incremento de reducción de vibración que proporciona la implementación del NDVA en comparación con el DVA clásico.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las expresiones analíticas resultantes de la implementación de la técnica de los puntos fijos, constituyen una herramienta importante para el diseño óptimo del NDVA debido a su simplicidad y a que solo dependen de la relación de masas μ . En la Figura 3 se muestran los resultados de las FRF óptimas de la estructura principal para diferentes valores de la relación de masas μ y considerando los parámetros $q_{\text{ópt}}(\mu)$ y $\zeta_{\text{ópt}}(\mu)$ calculados a partir de las Ecuaciones (12) y (16).

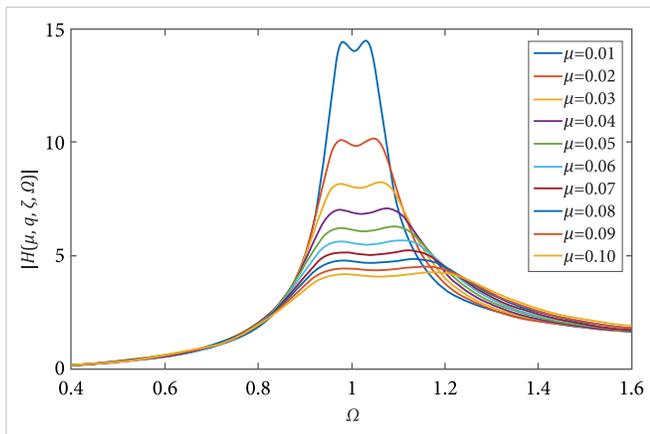


Figura 3. FRF óptimas de la estructura principal para diferentes valores de la relación de masas $0.01 \leq \mu \leq 0.1$.

Tal como se esperaba, en la Figura 3 se observa que la magnitud de vibración optimizada de la estructura principal desciende al incrementar el valor de la relación de masas μ . Asimismo, en la Figura 4 se muestra la comparación de las FRF de la estructura principal con NDVA y DVA clásico, considerando una relación de masas $\mu \in [0.1, 0.2]$.

En la Figura 4 es evidente que el rendimiento del dispositivo NDVA, respecto a la supresión de vibración, es mayor que el del DVA clásico. También, la integración del NDVA hace que la FRF de la estructura principal sea más

plana en la zona de operación del dispositivo. Asimismo, el ancho de operación se desplaza hacia adelante.

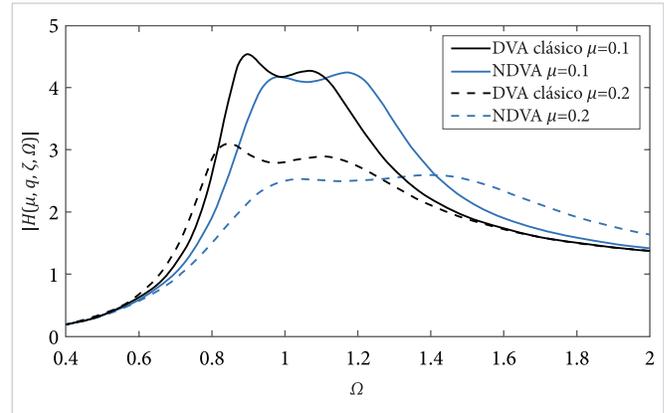


Figura 4. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, para $\mu \in [0.1, 0.2]$.

Por otro lado, en la Tabla 1 se muestran los resultados numéricos de los parámetros óptimos de diseño del NDVA obtenidos a partir del criterio H_∞ , para diferentes valores del parámetro de relación de masas dentro del rango $1\% \leq \mu \leq 20\%$. Se considera este rango de valores de relación de masa para aplicaciones prácticas del NDVA [13], [14].

TABLA 1
PARÁMETROS ÓPTIMOS PARA EL NDVA OBTENIDOS
MEDIANTE EL CRITERIO H_∞

μ	$q_{\text{ópt}}$	$\zeta_{\text{ópt}}$	r_{min}	NORMA $\ H_\infty\ $
0.01	1.01021	0.06164	0.99746	14.03710
0.02	1.02085	0.08775	0.99483	9.84984
0.03	1.03197	0.10823	0.99212	7.97891
0.04	1.04360	0.12583	0.98930	6.85363
0.05	1.05580	0.14175	0.98637	6.07840
0.06	1.06861	0.15645	0.98333	5.50033
0.07	1.08211	0.17042	0.98017	5.04616
0.08	1.09636	0.18377	0.97686	4.67575
0.09	1.11146	0.19674	0.97340	4.36503
0.1	1.12750	0.20940	0.96978	4.09853
0.2	1.39264	0.34538	0.91643	2.49880

En la Figura 5 se muestra la comparación de las normas $\|H_\infty\|$ de la estructura principal con NDVA y DVA clásico cuando se considera una relación de masas $\mu=0.1$.

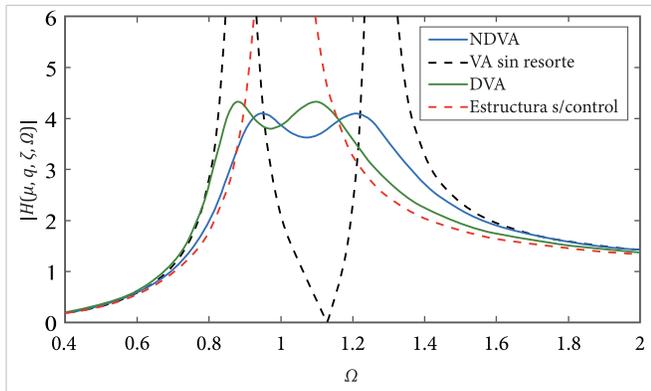


Figura 5. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el NDVA son $q_{\text{ópt}}=1.1275$, $\zeta_{\text{ópt}}=0.20940$ y la norma $\|H_{\infty}\|=4.09853$; y para el DVA clásico $q_{\text{ópt}}=0.95254$, $\zeta_{\text{ópt}}=0.19219$ y la norma $\|H_{\infty}\|=4.32175$.

En la Figura 5 se observa que la norma $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ para el NDVA es menor que la del DVA clásico. Adicionalmente, el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema se puede calcular como en [15].

$$\%SP_{\text{NDVA}} = \left(\frac{SP_{\text{DVA}} - SP_{\text{NDVA}}}{SP_{\text{DVA}}} \right) 100 \% \quad (24)$$

El porcentaje de reducción de vibración del sistema con NDVA comparado con el DVA clásico es del 0.36-15.7 %, para el rango de valores de relación de masas que se muestra en la Tabla 1.

Por su parte, en la Figura 6 se muestra la comparación gráfica de las FRF de la estructura principal, generadas a partir de la técnica de los puntos fijos y la norma $\|H(\Omega)\|_{\infty}$, para una relación de masas de $\mu=0.1$.

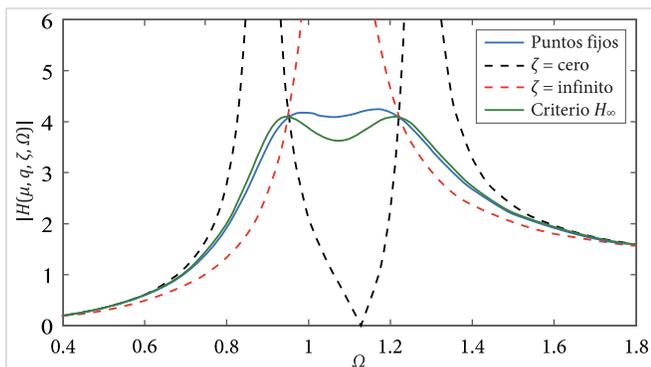


Figura 6. Comparación de las curvas FRF óptimas del NDVA y el DVA clásico, norma $\|H(\Omega)\|_{\infty}$ y puntos fijos.

De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 6, la curva de amplitud óptima de vibración (Técnica de los Puntos Fijos) es semejante a la curva generada a

partir del índice de rendimiento \mathcal{H}_{∞} . Cabe mencionar que, aunque la técnica de los puntos fijos provee un camino relativamente más fácil para resolver el problema de diseño óptimo del NDVA, el índice de rendimiento \mathcal{H}_{∞} proporciona una alta precisión para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño [16].

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se abordó el problema de control pasivo de vibraciones de una estructura de un grado de libertad, sometida a una fuerza de excitación inercial. Se consideró, como elemento de control pasivo, un absorbedor de vibración dinámico no tradicional (NDVA). Para el diseño óptimo del dispositivo NDVA se aplicaron dos enfoques diferentes: la técnica de los puntos fijos y el índice de rendimiento \mathcal{H}_{∞} . Como resultado de la implementación de la técnica de los puntos fijos, se logró el desarrollo de ecuaciones algebraicas simplificadas, para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño del NDVA.

Asimismo, mediante la teoría de ajuste de frecuencias de Krenk, se obtuvo una ecuación simplificada para el factor de amortiguamiento óptimo, misma que no ha sido reportada en la literatura. Además, por ser una ecuación compacta, facilita el diseño del NDVA para el control de fuerza inercial. De igual forma, el problema de optimización utilizando el criterio \mathcal{H}_{∞} se llevó a cabo mediante la utilización del método de Nishihara, para el cual es necesario considerar la función $h=1/\sqrt{1-r^2}$, con el fin de minimizar la función de respuesta en frecuencia de la estructura principal. Por lo que después de un tratamiento matemático conveniente y el uso del Teorema de Vieta, el problema de optimización se redujo a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales restringido. De la solución de este sistema de ecuaciones se obtuvieron los parámetros óptimos de diseño del NDVA de forma numérica.

Por otro lado, de la comparación de los resultados de las FRF de la estructura principal con NDVA y DVA clásico, se observa que el NDVA proporciona una mayor supresión de vibración. De hecho, para el rango de relación de masas utilizado de $1\% \leq \mu \leq 20\%$, se obtuvo un porcentaje de reducción de vibración del 0.36 – 15.7 %. Lo anterior significa que, con el mismo valor de masa física del absorbedor, el NDVA produce un mayor rendimiento de supresión de vibración que el DVA clásico. En contraste,

de la Figura 5 es evidente que el incremento de ancho de banda que proporciona el NDVA en comparación con el DVA clásico no es significativo. Asimismo, se observa que los resultados obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos, son similares a los que arroja la optimización utilizando el criterio \mathcal{H}_∞ .

REFERENCIAS

- [1] C. Mazón, “Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico”, Tesis de maestría, CENIDET, Cuernavaca, Mor., México, 2019.
- [2] S. Pani, S. K. Senapati, K. C. Patra y P. Nath, “Review of an Effective Dynamic Vibration Absorber for a Simply Supported Beam and Parametric Optimization to Reduce Vibration Amplitud”, *Int. J. Eng. Res. Appl.*, vol. 7, no. 7, pp 49-77, jul. 2017, doi: 10.9790/9622-0707034977.
- [3] D. J. Ormondroyd, “The theory of dynamic vibration absorber”, *Trans., ASME, Applied Mechanics*, vol. 50, pp 9-22, 1928.
- [4] S. Krenk, “Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper”, *J. Appl. Mech.*, vol. 72, no. 6, pp. 936-942, may. 2005, doi: 10.1115/1.2062867.
- [5] T. Asami, O. Nishihara y A. M. Baz, “Analytical Solutions to H_∞ and H_2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 2, pp. 284-295, Apr, 2002, doi: 10.1115/1.1456458.
- [6] O. Nishihara y T. Asami, “Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 4, pp. 576-582, oct. 2002, doi: 10.1115/1.1500335.
- [7] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani, “A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 137, no. 3, pp. 034501, jun. 2015, doi: 10.1115/1.4029576.
- [8] M. Z. Ren, “A variant design of the dynamic vibration absorber”, *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 4, pp. 762-770, Aug, 2001, doi: 10.1006/jsvi.2001.3564.
- [9] H. Heidari y B. Monjezi “Vibration control of imbalanced Jeffcott rotor by virtual passive dynamic absorber with optimal parameter values”, *Proc IMechE Part C-J Mechanical Engineering Science*, vol. 232, no. 23, pp. 4278-4288, en. 2018, doi: 10.1177/0954406217752024.
- [10] J. A. Çengel y J. M. Cimbala. *Mecánica de Fluidos Fundamentos y Aplicaciones*, 4.ª ed. México: McGraw Hill, 2018.
- [11] Y. Hu y M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 99, pp. 297-307, ag. 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [12] T. Asami, Y. Mizukawa y T. Ise, “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 140, no. 6, pp. 061012, dic. 2018, doi: 10.1115/1.4040229.
- [13] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, J. Colín y M. Arias-Montiel, “Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration”, *Eng. Struct.*, vol. 195, pp. 469-489, jun. 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.05.105.
- [14] D. J. Inman, *Engineering Vibration*, 5.ª ed. Estados Unidos: Pearson, 2022.
- [15] G. López, “Diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico basado en inersor conectado a una estructura tipo viga” Tesis de licenciatura, Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oax., México, 2021.
- [16] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Colín, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, M. Arias-Montiel, “A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber”, *J. Sound Vib.*, vol. 485, pp. 1-24, oct. 2020, doi: 10.1016/j.jsv.2020.115583.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado económicamente por el “Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP) de la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM)” con número de oficio 511-6/2020-8637.