

# Cuadernos Fronterizos

PUBLICACIÓN CUATRIMESTRAL DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ



7 DOSSIERS

1925-2025

Víctor M. Hernández Márquez  
Coordinador

Sandra Lazzer: Sobre las nociones *juicio* y *aserción* en la lógica de Frege • Víctor M. Hernández Márquez: ¿Fue Frege un filósofo del lenguaje? • Alfonso Ávila del Palacio: ¿Los números fregeanos son los números de la aritmética?

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

Daniel Constandse Cortez

*Rector*

Salvador Nava Martínez

*Secretario General*

Guadalupe Gaytán Aguirre

*Secretaria Académica*

Jesús Meza Vega

*Director del Instituto de Ciencias Sociales y Administración*

Jesús Alberto Urrútia de la Garza

*Jefa del Departamento de Ciencias Administrativas*

Beatriz Anguiano Escobar

*Jefa del Departamento de Humanidades*

Servando Pineda Jaimes

*Jefe del Departamento de Ciencias Sociales*

José Daniel Sayto Calzadillas

*Jefe del Departamento de Ciencias Jurídicas*

## Cuadernos Fronterizos

Ricardo León

*Director*

Servando Pineda Jaimes

*Director Editorial*

**Gestión Editorial:** Erika Sena Herrera

**Diseño:** Eduardo Ismael Reyes Vasquez

**Corrección:** Víctor M. Hernández Márquez

**Portada:** Eduardo Ismael Reyes Vasquez

**Coordinador de este número especial:** Víctor M. Hernández Márquez

**DOI:** <http://dx.doi.org/10.20983/cuadfront.2025.7de>

**CUADERNOS FRONTERIZOS**, es una publicación cuatrimestral de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez a través del Instituto de Ciencias Sociales y Administración (ICSA). Av. Universidad y H. Colegio Militar (zona Chamizal) s/n, CP. 32300, Ciudad Juárez, Chihuahua, México. Tels. (656) 688 3800 al 09 (comutador), extensión 3859.

Correo electrónico: [cuadernosfronterizos@uacj.mx](mailto:cuadernosfronterizos@uacj.mx)

**Editor responsable:** Ricardo León García. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo, versión impresa: No. 04-2018-112617515300-102, P-ISSN: 2007-1248. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo, versión digital: No. 04-2019-092616190100-203, E-ISSN: 2594-0422. Licitud de Título No. 14739, Licitud de Contenido No. 12312, ambos otorgados por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.

Los artículos firmados son responsabilidad de sus autores.

Se autoriza la reproducción total o parcial, siempre y cuando se cite la fuente.

### Comité Editorial

Víctor Orozco, Susana Báez, Iván  
Álvarez, Servando Pineda,  
Pedro Siller †, Jesús Camarillo,  
Enrique Cortazar, Benjamín  
Quezada †, Víctor Hernández,  
Cely Ronquillo, Rosa Elva  
Vázquez, Luis Ernesto Orozco,  
Luis Alfonso Herrera, Ángeles  
López-Nórez y Óscar Vázquez

### Consejo Editorial

Carlos Montemayor †  
Friedrich Katz †  
Enrique Semo  
Marcela Lagarde  
Silvia Gómez Tagle †  
José Luis Orozco †  
Federico Ferro Gay †  
Víctor Hugo Rascón Banda †  
Adrián Rentería



Fecha de publicación: 28 de Noviembre de 2025.

# CONTENIDO

## ↑ Centenario del fallecimiento de Gottlob Frege (†1925-2025)

### Presentación

Víctor M. Hernández Márquez

1	[	1
---	---	---

### Sobre las nociones *juicio* y *aserción* en la lógica de Frege

Sandra Lazzer

5	[	5
---	---	---

### ¿Los números fregeanos son los números de la aritmética?

Alfonso Ávila del Palacio

13	[	13
----	---	----

### ¿Fue Frege un filósofo del lenguaje?

Víctor M. Hernández Márquez

21	[	21
----	---	----

### El lado oscuro de Gottlob Frege

Víctor M. Hernández Márquez

31	[	31
----	---	----

### Tres cartas de Gottlob Frege

42	[	42
----	---	----

### Obras de Frege en español usadas en este número especial y otras traducciones

50	[	50
----	---	----

# ÍNDICE DE FIGURAS

## FIGURA 1 Frege en su vejez

Fotografía de Emil Tesch (1860-1931).

Restaurada con la IA upscale.media a partir de otra de dominio público de Emil Tesch (1860-1931), fotógrafo alemán, publicada en The Open court, vol. 30 (1916), p. 614.

4

## FIGURA 2 Perfil oculto

De la serie Perfiles de César Cabrera.

7

## FIGURA 3 Portada de *Function und Begriiff*

Extraída de la obra *Function und Begirff* de acceso público en: [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_BtwEAAAAYAAJ/page/n3/mode/2up](https://archive.org/details/bub_gb_BtwEAAAAYAAJ/page/n3/mode/2up)

12

## FIGURA 4 Falso Perfil

De la serie Perfiles de César Cabrera.

15

## FIGURA 5 Portada de *Die Grundlagen der Arithmetik*

Extraída como imagen de acceso público en: <https://archive.org/details/diegrundlagender48312gut>

20

## FIGURA 6 Doble perfil

De la serie Perfiles de César Cabrera.

25

## FIGURA 7 Joven Frege

De dominio público de autor desconocido (1879) extraída de [https://it.wikipedia.org/wiki/Gottlob\\_Frege#/media/File:Young\\_frege.jpg](https://it.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege#/media/File:Young_frege.jpg)

30

## FIGURA 8 Perfil Hormonal

De la serie Perfiles de César Cabrera.

37

## FIGURA 9 Definición de la teoría general de las series

Definición de la teoría general de las series, en Conceptografía.

41

## FIGURA 10 No perfil

De la serie Perfiles de César Cabrera.

44

## Presentación: Gottlob Frege (†1925-2025)

**Víctor M. Hernández Márquez**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

victor.hernandez@uacj.mx

ORCID: 0000-0001-6644-9116



A lo largo de las décadas, Gottlob Frege (1848-1925) ha sido considerado el padre de la lógica moderna y de la filosofía analítica. Dicha paternidad ha sido cuestionada en varias ocasiones, ya sea aludiendo a George Boole y a Augusto De Morgan, en el primer caso, y a Bertrand Russell y a George Edward Moore, en el segundo, sin especificar en ambas ocasiones sobre quién recae la maternidad. Bromas aparte, solo se trata de una forma de valorar la relevancia de Frege en esos ámbitos intelectuales, aunque no faltan quienes se toman demasiado en serio esa forma de expresión, como si la metáfora pudiese ser sometida a una suerte de prueba de ADN conceptual.

Pero ¿quién fue Frege? Para el público medianamente informado, resulta un desconocido en comparación con los cuatro pensadores previamente mencionados. Incluso me atrevo a afirmar que, durante varios años, muchos de los que han escrito y discutido sus contribuciones sabían muy poco sobre su vida, su personalidad y el medio intelectual en el cual se había formado. Y es que, en realidad, ese desconocimiento viene de lejos. En 1879, Frege publicó su ahora famosa *Begriffsschrift* (traducida como *Conceptografía*, *Ideografía* y *Notación conceptual* tanto al español como al inglés), la obra que autoriza a



muchos nombrarlo el creador de la lógica moderna (o simbólica o matemática, todos ellos nombres sujetos a objeciones desde el punto de vista histórico), pero ni el título ni los símbolos en los cuales estaba escrito sugerían que se trataba de un librito de lógica. Tan es así que, cuando James Ward le regaló a Russell un ejemplar bajo la advertencia de no haberlo leído y, por lo tanto, desconocer si poseía valor alguno, Russell no lo leyó, sino tiempo después, una vez que él mismo había elaborado por cuenta propia “mucho de lo que aquel libro contenía”. Pero allí no termina la cosa. A principios de los cincuenta del siglo pasado, época en la cual aparecen sus *Retratos de memoria y otros ensayos*, donde relata la anécdota anterior, todavía Russell sospechaba haber sido el primer lector de aquel raro librito.

Desde luego, su memoria lo traicionaba. La *Conceptografía* recibió la atención de un reducido, pero importante número de pensadores antes de que Russell, y por extensión el mundo angloparlante, tuviera cabal conocimiento de las aportaciones de Frege. Entre ese pequeño número figuraban dos exponentes de la nueva lógica: el matemático italiano Guisseppe Peano y el matemático alemán Ernst Schröder. Peano era en cierta medida un innovador, mientras que Schröder era un continuador y desarrollador del tratamiento algebraico iniciado por Boole en su panfleto *The mathematical analysis of logic* (1847). Edmund Husserl, conocido tiempo después como el fundador de la fenomenología, coincidió con Frege en algunos aspectos sobre la naturaleza de la lógica y en la crítica al sistema de Schröder, pero ambos se distanciaron por alrededor de 12 años, después de la aguda y abusiva reseña de Frege (1894/1998) (a decir de Claire Ortiz Hill) a la *Filosofía de la aritmética* (1891), la primera obra de Husserl en la cual formulaba una crítica a algunas ideas de Frege sobre el concepto de número.

Además, Frege mantuvo una polémica con los enfoques formalistas en matemáticas (según la cual lo importante son las reglas de manipulación de los signos) y, entre ellos, polemizó con David Hilbert debido a la ahora famosa axiomatización que este último hizo de la geometría elemental. A pesar del creciente repudio de la comunidad matemática por el uso extendido del nuevo simbolismo de la lógica en el tratamiento matemático, ya sea por medio de la influencia de Peano y su escuela, o bien por el influjo indirecto de Frege (por medio de Russell y Whitehead), Hilbert y los suyos prestaron atención a los nuevos sistemas e hicieron sus propias aportaciones. Pero para Hilbert, la lógica era parte de la matemática y, por consiguiente, no podía usarse para fundamentarla. A su juicio, la lógica requería también de fundamentación, cosa que haría Kurt Gödel más tarde (además de echar por tierra el proyecto de

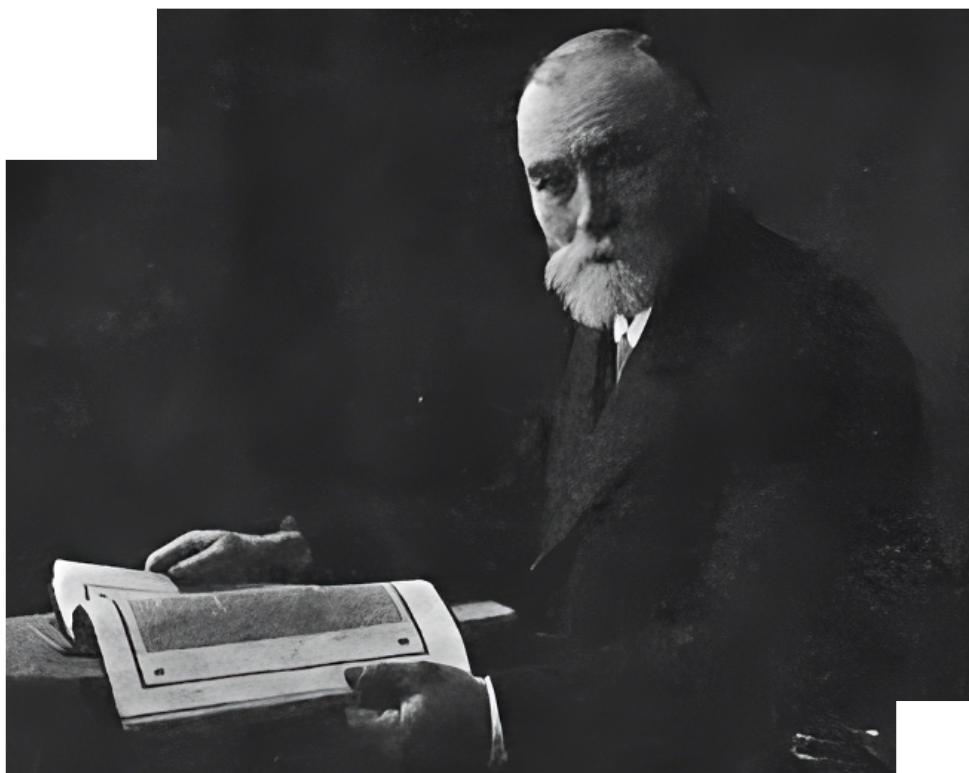
fundamentación de Hilbert para el resto de las matemáticas). Todo esto llegaría después de la muerte de Frege y solo queda especular sobre el impacto que hubiera provocado en su pensamiento si la vida le hubiera permitido conocer esos adelantos.

En filosofía, la influencia directa de Frege se dejó sentir por medio de Russell, Wittgenstein y, en menor medida, por Rudolf Carnap (quien estudió con Frege poco antes de pasar a retiro). Es Frege quien inspiró la idea de la lógica como método para tratar los problemas tradicionales de la filosofía y, si uno quiere entender mucho de los pensamientos dispersos de Wittgenstein, siempre debe tener en mente la inspiración que recibieron de Frege, en especial su artículo *“Über Sinn und Bedeutung”*, y sus dos libros *Die Grundlagen der Arithmetik* (Los fundamentos de la aritmética) y *Grundsetze der Arithmetik* (Las leyes básicas de la aritmética), los cuales leyó y discutió de manera obsesiva con sus amigos y estudiantes a lo largo de toda su vida. Tan es así que, en una de sus papeletas, (*Zettel*, § 712) escribió: “El estilo de mis formulaciones ha recibido el influjo excepcionalmente poderoso de Frege. Y si lo deseara, podría establecer tal influjo donde nadie lo advirtiera”. Para muchos de sus seguidores tal influjo pasa por lo regular desapercibido aun cuando G. E. M. Anscombe en su *An Introduction to Wittgenstein’s Tractatus* (1959), advertía que mucho de lo que hasta ese momento se había escrito sobre el *Tractatus* era irrelevante debido precisamente al desconocimiento de las aportaciones de Frege y su influencia sobre Wittgenstein.

Joan Weiner, una de las más sobresalientes investigadoras sobre la obra de Frege, sostiene que persiste a pesar de todo, particularmente en el mundo angloparlante, una interpretación dominante de la obra de Frege completamente errónea. No obstante, a la fecha se han elaborado otras interpretaciones, de las cuales haremos una breve referencia a dos en particular, la lectura feminista radical y la interpretación política, debido a la coincidencia de fondo entre ambas y a la aparición en el presente año del libro de Stephen D’Arcy *Frege and Fascism*.

En fin, en este sentido homenaje tratamos tres de los dominios sobre los que se posan las preocupaciones intelectuales de nuestro autor: la lógica, a cargo de Sandra Lazzer; la definición del número, discutida por Alfonso Ávila del Palacio, y la presunta filosofía del lenguaje, puesta en cuestión por mí, en una ruta distinta, pero a tono con la que encontramos en el trabajo pionero de Joan Weiner y luego extendido de manera formidable en su libro *Taking Frege at his word*. Las referencias a las obras de Frege en español se hacen al final

de los ensayos con el propósito de evitar repeticiones. Por último, doy a Sandra Lazzer y Alfonso Ávila las gracias por responder de manera expedita a mi invitación a participar y, de modo especial a Alfonso por atender puntualmente a todas mis observaciones editoriales. Por último, agradezco a nuestro director, Ricardo León, la sugerencia a convertir este dossier en un número especial de nuestra revista y de este modo poder comentar brevemente la interpretación de Andrea Nye y el nuevo libro de Stephen D'Arcy sobre el lado oscuro del pensamiento de Frege.



**Fig. 1** "Resulta patente que la prueba más firme es la que es puramente lógica; ésta, solo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. Por lo tanto, dividimos todas las verdades que requieren una fundamentación en dos clases: mientras que en el caso de unas la prueba puede proceder de una manera puramente lógica, las otras tienen que apoyarse en hechos empíricos" Frege 1879, prólogo. Fotografía de Emil Tesch (1860-1931).



## Sobre las nociones *juicio* y *aserción* en la lógica de Frege

**Sandra Lazzer**

IFF-SADAF-CONICET

Orcid: 0000-0002-0246-8331



1.- Aquello que en un sentido moderno consideramos lógica, tiene su origen fundamentalmente en la obra de Gottlob Frege. Esta paternidad es en nuestros días ampliamente aceptada, dado que solo se puede hablar de lógica moderna en un sentido pleno a partir del desarrollo de lo que identificamos como una teoría cuantificacional presentada como sistema formal de lógica con la obra de Frege. Es menos claro, sin embargo, cuál es la concepción de la lógica implícita en los desarrollos que dieron lugar a la creación de esta nueva lógica. Cuál sea la naturaleza de la lógica atribuible a Frege, no resulta una cuestión simple de resolver, en gran medida debido a que sus desarrollos lógicos estuvieron siempre condicionados por el propósito de establecer una fundamentación para la aritmética, más que por el propósito del desarrollo de una teoría lógica por sí misma.

Tal como actualmente entendemos la naturaleza de una teoría lógica, se plasma en la noción de un sistema formal y su correspondiente interpretación semántica. Esta manera de concebir la lógica que hoy es moneda corriente, ni es tan común encontrarla, ni es correcto presuponerla por anacrónica cuando se analizan las concepciones de la lógica inherentes a los orígenes de la lógica moderna. Algunas de las dudas al respecto fueron puestas de manifiesto, desde principios de los años sesenta, por quienes iniciaron una cierta tradición interpretativa donde se resaltan, por ejemplo, las diferencias entre el modo

como Frege entendía su lógica y el modo como es vista en la actualidad. En los últimos años, la polémica acerca de esta cuestión ha recibido un fuerte impulso y las discusiones se extendieron más allá de la mera revisión historiográfica, pasando a una discusión donde están en juego cuestiones de carácter filosófico en torno a la naturaleza misma de la lógica.

2.- Frege reparó tempranamente en que, para poder sustentar la tesis de que la aritmética constituye una extensión de la lógica (núcleo duro de su reconstrucción logicista de los fundamentos de esta ciencia), debían introducirse en la lógica importantes mejoras; había que poder explicar desde un comienzo todo cuanto pudiera requerirse para la demostración de los teoremas de la aritmética en términos puramente lógicos. Era imprescindible entonces reducir el procedimiento de la deducción a un corto número de pasos, siendo estos además perfectamente controlables, de suerte que no existiera posibilidad alguna de inconsistencias o contradicciones. Estas necesidades no podían ser satisfechas con la teoría lógica con que se contaba por entonces. Para alcanzar estos requisitos de rigor y sistematización de una “nueva” lógica, en 1879 Frege presentó su *Begriffsschrift* (*Conceptografía*). El lenguaje simbólico de esta nueva herramienta de la ciencia debía tener para Frege las ventajas y cualidades que Leibniz había pensado para el *calculus philosophicus et ratiocinator*, con lo cual sería posible una emancipación de la “nueva” lógica de la gramática del lenguaje ordinario. Esto solo podía realizarse si la ambigua terminología sujeto/predicado de la lógica tradicional era sustituida por una distinción más adecuada entre diversas formas proposicionales, sobre la base de su teoría de la función. Lo que en la *Conceptografía* se presenta es básicamente un lenguaje formal del pensamiento puro, un sistema simbólico provisto de los recursos adecuados que aseguran la precisión de los procesos deductivos. Es un error bastante común asimilar, sin más, las características filosóficas del tipo del lenguaje propuesto por Frege en la *Conceptografía* con lo que hoy se entiende como el lenguaje formal que constituye un sistema de lógica. Si el lenguaje de la *Conceptografía* es, tal como bien lo han señalado algunos autores, una conjectura acerca de los rasgos fundamentales del lenguaje natural en su empleo cognoscitivo, su relación con nociones como juicio, pensamiento y aserción se presenta de forma inmediata.

3.- Uno de los temas más importantes de la filosofía teórica del siglo XIX es el de los correlatos de los juicios. Definir la naturaleza (lógica, ontológica, psicológica, etc.) de dichos correlatos implica definir qué es aquello a lo cual hacen referencias nuestros juicios y proposiciones, que son la base de toda filosofía, ciencia y saber en general. Se trata de una temática que se puede rastrear

históricamente ya en los debates medievales sobre la naturaleza de los universales e incluso en las disputas entre Platón y Aristóteles y sus respectivas escuelas. Pero el aporte propiamente decimonónico consiste en el lugar privilegiado de lo proposicional y su primacía por sobre lo meramente conceptual. La valoración negativa de Frege sobre lo que habían logrado las teorías tradicionales del juicio creó la obligación por su parte de ofrecer una explicación más adecuada del contenido de una oración y del significado y de cómo presentar una oración como verdadera en un acto de afirmación. A diferencia de sus contemporáneos, Frege no creía que tal respuesta pudiera encontrarse en las líneas de una teoría tradicional del juicio, es decir, aquella parte de la teoría del conocimiento que trata del acto mental del juicio.

4.- Es importante tener presente que, en la visión que tenía Frege de la lógica, su concepción del juicio es central, ya que se transforma para él en la unidad básica del conocimiento, determinada especialmente por el llamado principio contextual y por la referencia (*Bedeutung*) de los enunciados, que son la forma de los juicios. Rompe así con la lógica clásica que ubicaba al “concepto” como unidad básica para la significación y el conoci-

miento, expresado en la forma del silogismo aristotélico. Los principales textos donde Frege analiza este tema son la ya mencionada *Conceptografía*, *Los fundamentos de la aritmética* (1884), “Sobre sentido y denotación” (1892), “El pensamiento” (1918) y “La negación” (1918). En estos textos, nunca discute cuestiones como ¿qué distingue un acto de juicio de un acto de tener una representación?, ¿hay que buscar la distinción relevante en los contenidos de estos actos mentales o en nuestras formas de verlos (en nuestro estar en diferentes estados intencionales)?, o ¿cómo se combinan las representaciones entre sí y en qué circunstancias podemos decir que su combinación da lugar a una creencia que presentamos como verdadera en un acto de juicio?, cuestiones todas estas en auge en la época cuando Frege desarrolla sus investigaciones. Aunque Frege era sin duda consciente de que se habían planteado este tipo de preguntas, pensaba que antes de poder darles una respuesta, debíamos aclarar una

cuestión más básica: la de dar cuenta del significado y la estructura de las oraciones mediante las cuales formulamos nuestros juicios. En su opinión, para comprender el contenido de una oración, debemos preguntarnos cómo



**Fig. 2:** Detalle de *Perfil oculto*, de César Cabrera.



se determina si es verdadera o falsa en virtud de las palabras que la componen y de la forma en que están unidas y para ello debemos encontrar una forma de representar su contenido de tal manera que se distingan claramente los elementos subjetivos de los objetivos. Sin embargo, esta no es la única tarea; además, debemos encontrar un medio de representar el contenido de manera que su composición sea clara y pueda ser tratada deductivamente.

5.- “Pensar” para Frege no es otra cosa sino la acción que permite captar o aprehender los pensamientos. Esta importante tesis fregeana significa dos cosas: por un lado, la acentuación realista del carácter receptivo-pasivo del pensar frente a cualquier teoría asociacionista; por otro, la negación de que el pensar pueda ser reducido a un tipo particular de síntesis de representaciones. Frege define el juzgar como un reconocimiento de la verdad. Así presentada, esta definición no deja de tener problemas, pues parece excluir de principio la posibilidad del juicio falso. La expresión muy usada también por Frege “tener por verdadero” parece más adecuada porque contempla la posibilidad de que ese “tener por verdadero” sea erróneo. En otras ocasiones Frege ofrece una definición, sin duda más apropiada del juicio, en la que este es definido como una “elección” entre valores de verdad, los cuales son opuestos excluyentes, de tal forma que el rechazo de uno implica la aceptación del otro. Como dijimos, la noción de juicio es esencial para la concepción de la lógica de Frege. Considera el juicio como una “actividad lógicamente primitiva” e introduce un símbolo especial para que los juicios sean reconocibles en las derivaciones lógicas. De hecho, el “trazo o barra del juicio”, que representa un descubrimiento tan importante para Frege, aparece como un elemento central aún en sus Escritos Póstumos al responder la pregunta: “¿Qué puedo considerar como resultado de mi trabajo?”. En la *Conceptografía* le dedicará un símbolo. El contenido judicable, aquel que guarda relevancia para el lenguaje científico, será señalado a partir de una barra horizontal (—), la “barra de contenido”. Si la barra precede a un conjunto de símbolos, ello indica que esos símbolos son agrupados formando un todo que se puede afirmar como hecho; lo que hoy día llamamos proposición. Mas, si lo que queremos es afirmar ese contenido como un hecho, se debe añadir a la ‘barra de contenido’ una línea vertical, conformándose así un nuevo símbolo (|), la ‘barra del juicio’. La barra de contenido se puede leer como ‘se da la circunstancia de x’ o ‘que x’, la barra del juicio se puede leer como “x es un hecho”; se asevera o afirma x. Por tanto:



Un juicio se expresará siempre por medio del símbolo |, colocado a la izquierda de los símbolos o combinaciones de símbolos que indican el contenido del juicio. Si se omite la pequeña barra vertical en el extremo

izquierdo de la horizontal esto transforma el juicio en una mera combinación de ideas acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce o no la verdad en ella. Por ejemplo, hagamos que  $\vdash A$  signifique el juicio: 'los polos magnéticos opuestos se atraen'; entonces — $A$  no expresará este juicio, sino que únicamente ha de provocar en el lector la representación de la atracción recíproca de los polos opuestos, para eventualmente sacar consecuencias de esto y, con ellas, probar la corrección de la idea (Frege, 1879/2016, §2).

En definitiva, Frege distingue claramente entre pensar y juzgar, o sea, entre la mera captación del pensamiento o aprehensión de un sentido y la atribución al mismo de un valor de verdad. Esta distinción reafirma su rechazo de toda teoría de la síntesis con su denuncia de la confusión entre síntesis y afirmación. Ni el pensar ni el juzgar pueden ser síntesis de representaciones.

6.- Si el juzgar consiste en la asunción interna del valor de verdad o falsedad de un pensamiento, la aseveración consiste en la expresión material de los juicios, por lo que se entiende que el predicado 'verdadero' no añade nada al juicio emitido por una oración aseverativa. Lo que Frege llama 'fuerza asertiva' de una oración será de vital importancia en este sentido, al constituirse ella misma —por su propia forma gramatical y sin necesidad de ningún signo como el de interrogación o exclamación— como la aserción de verdad. Esto no es siempre así. Puede darse el caso de que oraciones asertivas no aseveren nada, tal y como sucede en la ficción —por ejemplo, en la actuación de un actor durante una representación teatral. En casos como estos es menester, pues, preguntar si en realidad la oración con forma asertórica contiene una aserción.

7.- Al estudiar el acto de juzgar, se pueden distinguir dos puntos de vista diferentes: se puede estudiar el juicio desde un punto de vista empírico o desde un punto de vista lógico. Desde un punto de vista empírico, se entiende el juicio como un acontecimiento del mundo, representado por un predicado. En este caso, juzgar se concibe como una relación dual. La idea de que juzgar es una relación dual ha tenido mucha influencia en las teorías de las adscripciones de actitudes proposicionales. El término "actitud proposicional" fue introducido por Russell en 1918, refiriéndose a una teoría del juicio que él mismo había defendido anteriormente. Si uno entiende el acto de juzgar como una relación dual, lo trata como un acontecimiento en el mundo que debe ser expresado por un predicado, es decir, por una expresión de función. La noción empírica de juicio no es esencial para la lógica, al menos no lo es en la concepción no psicológica de la lógica a la que Frege defendía. Para comprender



el papel que desempeña el juicio en la lógica de Frege necesitamos un análisis del juicio desde un punto de vista lógico, un análisis en el que se dilucide la relación entre el juicio y la verdad. Necesitamos analizar el “acto de juzgar” en sí mismo y no las atribuciones de juicio a otros: el juicio no es, para Frege, una actitud proposicional. Para Frege “juzgar” no es entonces una relación dual. Juzgar no es simplemente una relación entre un sujeto que juzga y un objeto proposicional. Frege necesita, pues, una noción lógica del juicio, que se distinga del juicio como fenómeno empírico. Si se entiende el juicio como una “relación mental”, se pierde la comprensión del papel del trazo del juicio en su simbolismo. El trazo de juicio es un signo que difiere esencialmente de las palabras que se utilizan para describir o expresar un contenido. Se utiliza para mostrar, más que para describir, que se ha emitido un juicio. Es un signo pragmático de fuerza asertiva. Al utilizar el trazo de juicio en su lógica, Frege va más allá de la semántica. Aunque el lenguaje natural no tiene un signo especial para la fuerza asertiva, esta debe separarse del predicado. Si se expresara la fuerza del juicio mediante un predicado, tal como en algún sentido lo planteaba Wittgenstein en su crítica tractariana a Frege, se perdería la esencia de la teoría de Frege. En su sentido primordial, lógico, el juicio es un acto que no puede representarse en ningún sentido ordinario de ese término. Puesto que en nuestro sistema lógico hacemos afirmaciones, necesitamos un signo especial de fuerza asertiva.

8.- En "El pensamiento" de 1918, Frege señala que, ligados a una oración asertiva, hay tres tipos de actos distintos: 1. El aprender un pensamiento: el pensar; 2. El reconocimiento de la verdad de un pensamiento: el juzgar; 3. La manifestación de este juicio: el afirmar. 1. y 2. son actos internos y 3. es un acto externo. Un pensamiento se expresa mediante una oración asertiva. En una oración aseverativa se distingue, por un lado, el contenido del enunciado (un pensamiento), y por otro, la asercción (el afirmar), que consiste en la manifestación de un juicio. Para Frege, estos están así en estrecha conexión con la verdad. En "La negación (una investigación lógica)", también de 1918, aparece su tesis central del juicio que establece que el juzgar consiste en el reconocimiento de un pensamiento como verdadero. Y es la explicación que mantiene hasta uno de sus últimos escritos. Lo que distingue precisamente a las oraciones asertivas es la forma en la que expresan el pensamiento; a diferencia de otro tipo de oraciones que pueden expresar también el mismo pensamiento, la fuerza de una oración asertiva consiste en presentarlo reconociendo la verdad del mismo, esto es, manifestando que ese sentido, contenido o pensamiento es el caso. La forma estructural de las oraciones asertivas es la indicadora de que se está manifestando un juicio, esto es, de que se está reconociendo públicamente la verdad del pensamiento expresado por ellas. A diferencia de las

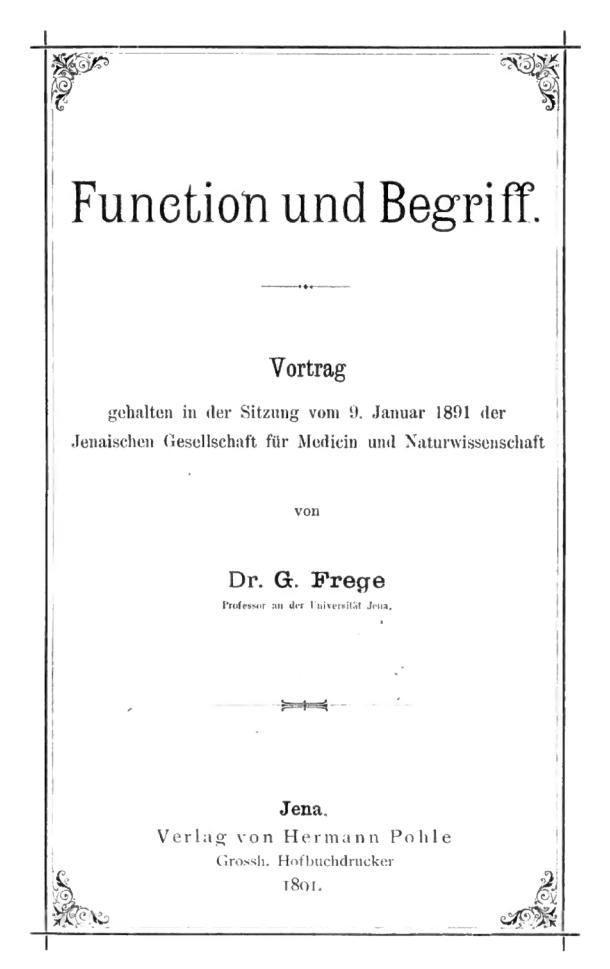


oraciones exclamativas, interrogativas o imperativas que van acompañadas de signos adicionales, las oraciones asertivas carecen de marcas especiales o signos que indiquen que se trata de la expresión de un pensamiento con fuerza asertiva. Las oraciones asertivas son las únicas que en este sentido comportan una estrecha relación con la verdad, expresada de entrada en su forma estructural que indica la manifestación de un juicio. Dicha relación no está sostenida por las partes que conforman la oración asertiva, sus palabras de forma aislada, sino únicamente en consideración de su contexto. Un enunciado asertivo mantiene su fuerza asertórica en función de su contexto en este sentido, en virtud de si se expresa un pensamiento manifestando el reconocimiento de su verdad, en el sentido de que sea afirmado en un contexto adecuado donde el que habla “habla en serio”, “con seriedad”. Así el contexto se constituye en una dimensión básica para los juicios.

9.- Para terminar, permítasenos hacer algunos señalamientos. Sabemos que es usual subrayar que Frege no tiene una respuesta para la importante pregunta sobre cómo captamos pensamientos, remitiendo esta a la psicología. Sabemos también que Frege identifica psicología y psicología naturalista y que no tiene la idea positiva de una psicología alternativa a la meramente asociacionista. Lo cierto es que en sus textos Frege oscila con respecto a cuál sea el problema que es remitido a la psicología, considerando el mismo a veces como el pensar, a veces como el juzgar, a veces no diferenciando entre ambos e, incluso, a veces como ambos. Sin embargo, aun cuando se pueda afirmar que Frege no explica el “cómo” aprehendemos pensamientos, no se puede ignorar que Frege sí ofrece importantes elementos a los efectos de una respuesta a la pregunta cómo juzgamos (aun cuando, por otro lado, también remita esta pregunta a la psicología), a saber, que lo hacemos en cuanto el juzgar implica una toma de decisión (o elección), siendo que las decisiones no están sometidas a las leyes asociativas. Estas cuestiones nos llevan al tema más amplio, que excede en mucho el contenido del presente texto, relativo a determinar en qué consiste el antipsicologismo fregeano. La gran mayoría de los autores se aproximan a Frege a partir de un esquema preconcebido que tiene su fuente de inspiración última en el prefacio a los “Prolegómenos” husserlianos. Según este esquema, la oposición de Frege al psicologismo consiste en una afirmación dogmática sobre la existencia de objetos ideales. Este esquema es falso y pasa por alto que ya en Frege la crítica al psicologismo es una crítica a la idea psicologista de subjetividad y que, por tanto, ella no se mueve meramente en el marco de una contraposición ontológica, sino también epistemológica. La crítica de Frege al psicologismo no reside únicamente en ver el psicologismo como un error respecto de aquello que “hay”, sino también de aquello que puede ser objeto de



conocimiento. Si leemos la crítica fregeana al psicologismo en el modo ontológico, y pasamos por alto el esencial aspecto epistemológico, entonces la consecuencia necesaria es subrayar una omisión esencial de Frege respecto de la cuestión de la aprehensión de los pensamientos.



**Fig. 3** "Parece que en la actualidad gana cada vez más partidarios la opinión de que la aritmética es lógica extensamente desarrollada, que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas nos retrotrae a leyes puramente lógicas y sólo a tales. También yo soy de esta opinión y en esto baso la exigencia de que el lenguaje simbólico aritmético debe ampliarse en uno lógico", Frege 1891/2016, 235-6.

## ¿Los números fregeanos son los números de la aritmética?<sup>1</sup>

Alfonso Ávila del Palacio

Universidad Juárez del Estado de Durango

acavila@dgo.megared.net.mx

ORCID: 0000-0002-7507-5811



Immanuel Kant, en el apartado “Axiomas de la intuición” de la *Crítica de la razón pura* (1787), afirmó que las matemáticas, tanto la geometría como la aritmética, estaban constituidas por juicios “sintéticos *a priori*”. Gottlob Frege no estuvo de acuerdo con eso y se propuso demostrar que los juicios de la matemática, particularmente los de la aritmética, eran juicios “analíticos”; donde por analíticos entiende lo mismo que lógicos. Es decir, que la aritmética no era sino lógica. Como se sabe, a eso se le llamó el *Programa Logicista*. Ahora bien, para llevar a cabo su refutación de Kant, Frege amplía primero la lógica de su tiempo en su famosa *Conceptografía*. Una vez sentada esa base, en *Los Fundamentos de la aritmética*, Frege se propuso definir el concepto de número en términos puramente lógicos, que es a la definición que nos referiremos en este artículo.

Para Frege el número es un conjunto que agrupa conceptos equinuméricos; aunque, en realidad, agrupa las extensiones de los conceptos, es decir, los conjuntos de objetos que caen bajo esos conceptos. O, con otras palabras, el número para Frege es un conjunto de conjuntos equinuméricos. Pero ¿estos nú-



<sup>1</sup> Este artículo es una actualización de un fragmento del capítulo 4 de mi libro *Vigencia de la definición fregeana de número*. México, Plaza y Valdés, 2014.

meros son realmente los mismos números de la aritmética? En primer lugar, los números fregeanos, que examinaremos a partir de la versión de Russell como clases de clases, o conjuntos de conjuntos en la versión de John von Neumann, parecen muy artificiales y más complicados que los números de la aritmética. Mientras que podemos sumar muy fácilmente dos números aritméticos, cuando queremos sumar dos números fregeanos, necesitamos hacer varias operaciones complicadas. Para sumar en la versión de Russell la clase de todos los pares con la clase de todos los tríos, debemos escoger un elemento de la primera clase y escoger otro elemento de la segunda clase que cumplan ciertas condiciones: básicamente, que ambos elementos sean disyuntos y agrupen elementos del mismo tipo. Una vez que hemos seleccionado de esa forma un par de la primera clase y un trío de la segunda, los juntamos y obtenemos un conjunto con cinco elementos del mismo tipo. Finalmente, formamos una nueva clase con todos los conjuntos que sean equinuméricos con ese conjunto de cinco elementos. Esta clase es el resultado de la suma.

De forma similar, la suma de números en la versión de von Neumann (1923/1967) es igualmente complicada. ¿Cuántos pasos debo dar para obtener la siguiente suma:  $\{\{\}, \{\{\}\}\} + \{\{\}\{\}\} \{\{\} \{\{\}\}\}$ ? Muchos. No podemos únicamente juntar los elementos del conjunto que representa el numero dos con los elementos del conjunto que representa el número tres como lo hacemos con los unos que forman los números de la aritmética. En esta, si  $2 = 1+1$ , y  $3 = 1+1+1$ , podemos sumar  $2 + 3$  juntando los unos:  $1+1+1+1+1 = 5$ . Así pues, la diferencia entre los números fregeanos y los números de la aritmética nos sugiere que, ontológicamente, no son las mismas entidades.

Por otra parte, al revisar algunas de las objeciones que se le han presentado a la definición de Frege, nos preguntamos si el número está siempre asociado a ciertos conceptos, como propone Frege. Esto nos enfrenta con la propuesta de Dedekind (1888/2014) y otros, quienes definen el número en términos puramente estructurales, como lugares en una serie. Contrario a eso, la definición fregeana muestra que los números pueden definirse en términos no estructurales; es decir, podemos definir cada número ligándolo con ciertos conceptos sin hacer alusión a los otros números, cada uno de los cuales estaría ligado a determinados conceptos específicos sin necesidad de relacionar los números entre sí. Eso le daría la razón a Frege cuando afirma que los números son algo más que lo puramente estructural, es decir, son algo más que lugares en una serie.



La definición de Frege dice que un número es un conjunto (o “extensión”, en sus términos). Frente a eso, nos preguntamos en qué sentido podría ser válida la caracterización de los números en términos de conjuntos. Al revisar las diferentes definiciones de lo que es un conjunto a partir de la propuesta de Cantor (1883/2006), llegamos a la conclusión que hay diferentes formas de definir el término ‘conjunto’. Entonces ¿cuáles conjuntos son los números? Esta pregunta nos refuerza en la idea de que los números freganos son diferentes a los números aritméticos. En este sentido, podemos decir que los números aritméticos no son conjuntos; pero, tal vez, podemos hacer una descripción de ellos en términos de conjuntos, especificando, claro está, cómo estamos entendiendo el término ‘conjunto’.

Ahora bien, Frege afirma que el número que corresponde al concepto  $F$  es específicamente la extensión del concepto “equinumérico con respecto al concepto  $F$ ”. Eso nos enfrenta con las famosas objeciones de Paul Benacerraf (1965). Frente a las cuales, mi solución es que, en efecto, los números aritméticos no son conjuntos y menos ciertos conjuntos específicos, porque Benacerraf mostró que podían darse definiciones de números en términos de diferentes conjuntos. Pero, siguiendo la idea del párrafo anterior, podemos, tal vez, caracterizar o explicar los números aritméticos en términos de conjuntos y, claro, también en términos de conjuntos específicos. Por cierto, el argumento de Benacerraf de que podemos tener definiciones de números en términos de diferentes conjuntos, refuerza la idea de que esas definiciones son solo diferentes descripciones de los números aritméticos propiamente dichos.

En *Las leyes fundamentales de la aritmética*, Frege pretendió probar que su definición de número era la correcta al desprender de ella las leyes más conocidas de los números de la aritmética. Ahora bien, hay que tomar en cuenta lo que es una axiomatización de la aritmética a partir de las ideas de David Hilbert: “De hecho, algunas de las dificultades en la fundación de la aritmética son de naturaleza diferente de aquellas que tienen que ser superadas cuando se establece la fundación de la geometría.” (1904/1967, 130).

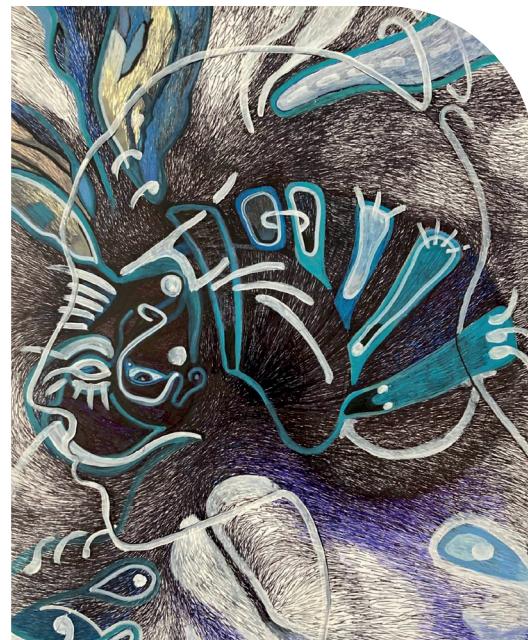


Fig. 4: Detalle de *Falso perfil*, de César Cabrera.



Además, hay que revisar también las objeciones de Kurt Gödel a las axiomatizaciones de la aritmética. Como se sabe, Gödel (1931/1981) probó que la aritmética que podemos encerrar en un sistema axiomático es incompleta, ya que hay afirmaciones que se pueden formular dentro de ella, pero no podemos deducirlas de ningún grupo finito de axiomas. La conclusión de este análisis es que a toda axiomatización se le escapa algo y, por tanto, no podemos identificar los números aritméticos con ninguna axiomatización que se haga de ellos. Dichas axiomatizaciones tendrán que verse, más bien, como una ordenación de lo que se considera más fundamental de los números. Esto refuerza una vez más la idea de distinguir entre los números de la aritmética y aquellos construidos en las axiomatizaciones metamatemáticas. De manera que lo único que prueba Frege en *Las leyes de la aritmética* es que sus “números”, que están ligados a conceptos, se comportan como los “números” que describe el sistema axiomático del matemático italiano Giussepe Peano (1889); ambos de los cuales son en realidad, según nuestra interpretación, imágenes, tal vez, explicativas de los números aritméticos propiamente dichos.

Frege criticó duramente la propuesta empirista de John S. Mill (1874); pero, por otra parte, propone a semejanza de este que los números tienen que ver con algo extra-matemático. De ahí que es necesario examinar algunas propuestas empiristas modernas para ver las coincidencias y discrepancias de Frege con el empirismo. Los autores que examinaremos aquí brevemente son Ludwig Wittgenstein, Maurice Fréchet, Imre Lakatos y Philip Kitcher.

Wittgenstein, seguidor de Frege en varios puntos, ve los números ligados al lenguaje como Frege, pero no solo a los conceptos, sino a las proposiciones en general. Las proposiciones, a su vez, según Wittgenstein, son imágenes de los hechos. El número para Wittgenstein es el exponente de una operación con proposiciones; es una imagen que nos indica que dicha operación puede repetirse,<sup>2</sup> y eso nos indica que podemos tener varias imágenes de un mismo hecho al escribir  $P = P' = P''$ , etcétera. Los hechos no son nunca iguales; pero, al decir que  $P = P'$ , estamos diciendo que las expresiones  $P$  y  $P'$  refieren a un mismo hecho, o bien, que son dos imágenes de un mismo hecho. En estos términos, yo diría que frente a los números aritméticos, podemos tener varias imágenes de ellos: las construidas por Frege, Russell, Dedekind o Peano, entre otras. Pero también podemos ver los números aritméticos, a su vez, como imágenes de algo más cercano a lo empírico: en el famoso *Tractatus*, Wittgenstein sostiene

<sup>2</sup> En todo este texto entiendo por ‘imagen’ una representación o descripción teórica de un concepto o idea, es decir, una especie de retrato o pintura que esté en lugar de algo también teórico y que nos lo explique de cierta forma.

que son las proposiciones, o más bien, las operaciones que podemos hacer con las proposiciones; yo diría que son los conceptos “par”, “trío”, etcétera.

Fréchet ve una conexión más directa entre las matemáticas y el mundo empírico al decir que los números y las matemáticas en general son representaciones esquemáticas cada vez más simplificadas del mundo sensible. “Acaso un entero, por su representación en cifras, no es la expresión esquemática de una característica común a varias colecciones”, dice Fréchet (1958, 28). Esto reafuerza la idea de que los números matemáticos pueden verse como imágenes o representaciones esquemáticas de ciertos fenómenos no matemáticos, los cuales están más ligados a lo empírico o son francamente empíricos, según Fréchet. En ese sentido, Fréchet le da la razón a Frege, en tanto que este sostiene que los números tienen que verse no solo matemáticamente, sino también en su uso en expresiones que refieren a lo empírico como “3 caballos”.

Lakatos (1981), por su parte, sostiene que la evidencia crucial a favor de los axiomas conjuntísticos era que la matemática clásica podía ser explicada, aunque ciertamente no probada por dichos axiomas. Esto es así porque los axiomas no fijan condiciones que deberían cumplir las teorías informales para que puedan ser juzgadas por ellos; sino que tan solo pretenden recoger, siempre conjeturalmente, lo esencial de dichas teorías informales. De esa forma, las reconstrucciones conjuntistas de la aritmética de Frege y Russell pueden ser refutadas, según Lakatos, porque no son construcciones arbitrarias, sino que pretenden que de sus axiomas se obtengan verdades análogas a las verdades aritméticas informales. Esto implica que Lakatos distingue entre la aritmética informal, yo diría los números aritméticos y las reconstrucciones axiomáticas que se han hecho de ellos, es decir, los números metamatemáticos. Por supuesto, Lakatos no dice que las reconstrucciones axiomáticas de los números sean números metamatemáticos, pero sí las distingue de los números descritos y usados en la aritmética ordinaria.

Kitcher (1984), uno de los más destacados empiristas de la actualidad, está en contra del apriorismo de Frege y Hilbert y a favor de un empirismo como el de J. S. Mill. Este había reconocido que es necesario que  $1 = 1$  para que se cumplan las leyes de la aritmética y de las cantidades en general; mientras que en el mundo empírico una unidad es siempre diferente de cualquier otra. Esto implica que las matemáticas hablen de objetos ideales, los cuales pueden verse como imágenes de los objetos sensibles. En ese sentido, las leyes de la aritmética son generalizaciones de la experiencia de separar y juntar. Todo esto lo traduce Kitcher diciendo que aprendemos la estructura aritmética



de la realidad observando los resultados de nuestras acciones de combinar y separar objetos. A semejanza de Frege, que basa su reconstrucción en las nociones lógicas de “concepto” y “relación”, Kitcher presenta una axiomatización de su aritmética apoyado en las nociones de “coleccionar” y “correlacionar”. Para Kitcher, los números son actividades y no conceptos o conjuntos. Esto lo acerca a la visión de Wittgenstein, quien habla de los números en términos de operaciones y a Fréchet con su visión de los números como idealizaciones de lo empírico. La postura de Kitcher se opone a la de Frege en tanto que concibe los números como producto de la actividad empírica de manipulación de objetos, pero coincide con este en la idea de que los números son algo más que lo puramente estructural o matemático, y en que las nociones de concepto y relación son fundamentales para definir los números. Los empiristas, al menos claramente Mill, Fréchet y Kitcher, piensan que las matemáticas en general y los números en particular son imágenes ideales que intentan recoger algún aspecto de lo empírico. Frege y Wittgenstein piensan que la relación de los números con lo empírico se da, en todo caso, a través del lenguaje como mediador. Para estos, los números refieren al lenguaje, no a las cosas; mientras que, para los primeros, los números refieren directamente a lo empírico.

Ahora bien, ¿la aritmética será el producto de una matematización de algún dominio empírico? Aun cuando es sugestiva la propuesta de Fréchet y Kitcher de que sí es el caso, no creo que tengamos elementos suficientes para decir que los números aritméticos surgieron cuando se realizó una matematización sobre los pares y tríos concretos. Aunque admito, por otra parte, que una vez que tenemos los pares y tríos y los números aritméticos, cualquiera que haya sido el origen de ambos, podríamos ver los números aritméticos como imágenes de los pares y tríos empíricos.

Así pues, lo que podemos concluir de la presente reflexión es que la propuesta fregeana tiene varias virtudes si la vemos como una imagen de los números de la aritmética. Esto está fundamentado en la idea de que hay tres clases de entidades parecidas: los pares, tríos, etc., los números propiamente aritméticos y las imágenes metamatemáticas que se ha hecho de los números aritméticos. Haciendo esta distinción conceptual, se logra entender gran parte de la discusión de las diferentes corrientes en filosofía de las matemáticas, y permite ubicar las afirmaciones, muchas veces contradictorias, acerca de los números. Viendo las cosas desde este ángulo, Frege, Russell, Dedekind y Peano, entre otros, crearon imágenes metamatemáticas de los números aritméticos; por otra parte, tenemos los números 1, 2, 3 que se trabajan en la aritmética y que son los números matemáticos propiamente dichos; y, por último, tenemos

los conceptos “par”, “trío”, “cuarteto”, etcétera, que agrupan pares, tríos y cuartetos de cosas incluso empíricas. Aquí estoy proponiendo que los números metamatemáticos son imágenes explicativas de los números aritméticos, y estos, hayan o no surgido como imágenes explicativas de algo empírico, ciertamente pueden verse como imágenes idealizadas de los pares, tríos, etc.

## REFERENCIAS

- Ávila, A. (2014). *Vigencia de la definición fregeana de número*. México: Plaza y Valdés
- Benacerraf, P. (1965), “What numbers could not be?”, en Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.). *Philosophy of Mathematics* (1983). New York: Cambridge University Press, 272-294.
- Cantor, George (1883/2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. Edición de José Ferreirós, traducción de J. Ferreirós y E. Gómez-Caminero, Barcelona: Crítica.
- Dedekind, R. (1888/2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Edición y traducción de José Ferreirós, Madrid: Alianza-Universidad Autónoma de Madrid.
- Fréchet, M. (1958). *Las Matemáticas y lo Concreto*. Traducción de Gustavo Machado, UNAM, México.
- Gödel, K. (1931/1981), “Sobre fórmulas formalmente indecibles de Principia Mathematica y sistemas afines”, en *Obras Completas*, edición y traducción de Jesús Mosterín, Madrid: Alianza Editorial.
- Heijenoort, J. v. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge Massachusetts: Harvard University Press.
- Hilbert, D. (1904/1967), “On the foundations logic and arithmetic”, en Heijenoort (ed.) (1967), 129-138.
- (1927), “The foundations of mathematics”, en Heijenoort (ed.) (1967), 464-479.
- Kant, Immanuel (1787). *Crítica de la Razón Pura*. Traducción de José del Perojo. Buenos Aires: Editorial Losada, 1938.
- Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.
- Lakatos, Imre (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Editado por J. Worrall y G. Currie, Madrid: Alianza.
- Mill, John S. (1874). *A System of Logic*. (8th ed.) New York: Harper.
- Neumann, J. von (1923/1967), “On the introduction of transfinite numbers”, en Heijenoort (ed.) (1967), 346-354.
- Peano, G. (1889), “The principles of arithmetic, presented by a new method”, en Heijenoort (ed.) (1967), 83-97.



- Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London: George Allen and Unwin.
- Russell, B. y Whitehead, A. N. (1910-13). *Principia Mathematica*. Diversas ediciones.
- Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus Logico-filosófico*. Traducción de E. T. Galván, España: Alianza, 1980.
- (1958). *Investigaciones Filosóficas*. Traducción de A. García y U. Moulines. México: UNAM, 1986.
- (1967). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. 2nd. Edition. Basil Blackwell, Oxford.



**Fig. 5** "Es incorrecto llamar nombre de una cosa a un término conceptual general. En virtud de esto, parece como si el número fuera propiedad de una cosa. Un término conceptual general designa justamente un concepto. Solo con el artículo determinado o con un pronombre demostrativo vale como nombre propio de una cosa, pero deja de valer como término conceptual", Frege 1884, § 51.



## ¿Fue Frege un filósofo del lenguaje?

**Víctor M. Hernández Márquez**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

victor.hernandez@uacj.mx

ORCID: 0000-0001-6644-9116



Para evitar malentendidos, empecemos indicando cómo puede comprenderse la cuestión. En primer lugar, hay que distinguirla de la puesta en duda sobre si fue Frege fue el padre o el abuelo de la filosofía analítica, puesto que el padre o el abuelo pudo ser alguien distinto a su progenie en varios rasgos importantes. Además, habrá que ponerse en guardia ante la tentación de identificar la filosofía del lenguaje con la filosofía analítica, puesto que habrá quienes puedan conceder que toda filosofía analítica es de alguna forma u otra, análisis del lenguaje; pero no estarán tan dispuestos a dar por descontado que toda filosofía del lenguaje es o debe ser filosofía analítica. De estas breves consideraciones podemos deducir que la cuestión sobre si fue Frege un filósofo del lenguaje no implica necesariamente que Frege haya sido un filósofo analítico; de modo que para responder a la cuestión inicial hace falta determinar en qué sentido Frege fue o pudo ser un filósofo del lenguaje por derecho propio.

Estamos, por consiguiente, ante una pregunta histórica y debemos cuidarnos de no caer en el anacronismo ingenuo. Sin embargo, la pregunta en sí puede parecer ociosa o meramente retórica, puesto que la misma tradición que va de Russell, Wittgenstein y Carnap, a Peter Strawson y a Gareth Evans no dudó en atribuirle una “teoría”, parcial o completa, sobre el lenguaje. Y, por si



fuera poco, la imponente obra de Michel Dummett, *Frege's philosophy of language* (1973) pareció fijar de una vez por todas el canon de tal atribución. Pero cuando Dummett fue cuestionado si realmente se podía endilgar a Frege una teoría del significado o una filosofía del lenguaje, se vio obligado a admitir, en *The interpretation of Frege's philosophy* (1981, 39), que si uno se atiene a lo que Frege entiende por lógica, entonces no tiene nada que ver con el lenguaje. Esta confesión puede parecer extremadamente extraña viniendo de un intérprete agudo que ha escrito casi 700 páginas sobre esa presunta filosofía del lenguaje.

Tan pronto como uno se adentra en la *concepción* de la lógica de Frege, se advierte que hay allí algo un tanto paradójico, con consecuencias irónicas que van más allá de su propio pensamiento. Esto último queda de manifiesto en la crítica de Wittgenstein a Frege y a Russell en cuanto que ambos incurren en el error de hablar sobre aquello que ellos mismos admiten ser indecible. La ironía es doble ya que, en respuesta, Russell indicó que Wittgenstein no escapaba al mismo reproche. No se equivocaba, puesto que todos ellos compartían una *concepción universalista* acerca de la naturaleza de la lógica. Y eso que compartían era la idea era que la lógica es la *malla*, la estructura fundamental en la que se dan las relaciones del pensamiento. El principal inconveniente con el cual se topa esta idea de la lógica es que se autoimpone una restricción drástica sobre lo que se puede decir acerca de cómo es esa estructura o malla. De acuerdo con este punto de vista, lo único humanamente posible es describirla por medio de un lenguaje especial, un simbolismo, lo más perfecto que se pueda elaborar. No obstante, una cosa es la malla y otra cosa es el simbolismo con el cual Frege, Russell y Wittgenstein intentaron describirla. Por lo tanto, el error más común que se encuentra en mucho de lo que se ha escrito sobre estos tres pensadores es la identificación de la *Conceptografía* de Frege, el sistema de *Principia mathematica* de Russell, y la notación del *Tractatus* con la lógica que intentaban capturar.

Ahora bien, la cuestión importante consiste en saber por qué Frege, y luego Russell y Wittgenstein, se vieron empujados a sostener esa idea tan peculiar sobre la lógica. En el caso de Frege, la motivación es bastante clara, pero su nitidez por lo regular se convierte en el primer obstáculo para una cantidad de intérpretes, puesto que lo obvio se asume como algo que solo merece mencionarse de paso, si acaso. Además, los filósofos profesionales suelen asumir que pensadores como Frege y Wittgenstein, sin una formación académica en filosofía, formaban parte de tal o cual corriente filosófica o bien se vieron bajo el influjo de este o aquel colega en la facultad o de algún filósofo relativamente anterior.



Primero, debe considerarse que Frege no fue un filósofo profesional, sino un matemático. Durante sus años de formación no mostró un interés particular en la filosofía, si se toma en cuenta que su hoja de materias registra un solo curso de filosofía de la religión, a cargo de Hermann Lotze. Esto llevó a Hans Sluga (1980) a suponer una influencia de la *Logik* (1843) de Lotze, al menos en cuanto a distinguir lo lógico de lo psicológico en relación con la teoría del juicio. Además, sostiene que la deuda se extiende a otros “préstamos” en la terminología. Sluga, sin embargo, ofrece poca evidencia de peso con respecto a la motivación de las posibles influencias; es decir, no da pistas para respaldar que efectivamente sí responden a la misma motivación de Frege. En este sentido, Eva Picardi (1987) ha examinado con detenimiento la interpretación de Sluga y de Gottfried Gabriel, quien busca enmendar los huecos de Sluga, pero no encontró nada realmente relevante que hable a favor de la presunta influencia. La razón es sencilla, pues para citar a William Woodward (2015, 159), “la motivación del tratamiento de la teoría del juicio en Lotze no tenía como objeto, como en Frege, crear un lenguaje formal de lógica”.

A pesar de ello, la falta de coincidencia en la motivación no le impide discutir otras posibles influencias, como la famosa distinción *Sinn und Bedeutung*, aun cuando la dicotomía es para Frege esencial en el perfeccionamiento de su conceptografía y, en particular, en la manera de entender el signo de igualdad y con respecto a la relación lógica fundamental *caer (un objeto o varios) bajo un concepto*. Ahora bien, Frege admite que la palabra *concepto* se usa a veces en términos psicológicos, otras en términos lógicos, y otras, como una mezcla de ambos, aunque a él solo le interesa usar el término desde el punto de vista lógico. El *concepto* así concebido es algo en sí mismo simple y, por consiguiente, no es posible definirlo, salvo entenderlo por medio de indicaciones y aclaraciones. La recomendación principal para identificar un concepto es advirtiendo su naturaleza predicativa.

Este modo de entender el *concepto* y otros términos lógicos fundamentales (como *objeto*, *verdad*, etc.) es hasta cierto punto normal desde la perspectiva de la práctica axiomática dentro de una teoría matemática cualquiera. Es decir, constituyen los términos primitivos o indefinibles dentro de un sistema axiomático, con los cuales se definen las operaciones y relaciones entre los demás términos. No obstante, para Frege los términos lógicos fundamentales son indefinibles de forma absoluta y, por consiguiente, no es posible definirlos de manera convencional dentro de un sistema axiomático alternativo. Esto quiere decir que, para Frege, la lógica es lo más fundamental o básico que pueda ser captado. Es, para empezar, más básica que cualquier teoría matemática, puesto



que estas últimas se basan en deducciones y definiciones, las cuales dependen a su vez de leyes lógicas.

Existe, sin embargo, una diferencia lógica y ontológica notable entre la deducción y la definición. La deducción es una relación entre pensamientos, mientras que la definición establece el uso de los signos. Para Frege, el pensamiento es, desde el punto de vista lógico, algo que se expresa por medio de una proposición (una oración declarativa o aseveración), pero no es algo que los seres humanos produzcan, pues lo único que pueden hacer es captarlos por medio de ese tipo de expresiones del lenguaje. Esta idea un tanto extraña intenta dar respuesta al problema principal del conocimiento matemático que Frege encontró intolerable con respecto a la aritmética; es decir, la falta de claridad de los matemáticos para indicar lo que debe entenderse por un número.

Si matemáticos tan rigurosos como Weierstrass incurren en aclaraciones circulares, poco convincentes o divergentes entre sí, no se debe a la falta de dominio de su materia, sino a causa de la inadecuación de nuestro lenguaje para establecer distinciones lógicas adecuadas. Es decir, mientras el matemático se ocupa de manera exclusiva de sus símbolos, todo transcurre sin problemas; pero tan pronto como intenta dar explicaciones por medio del lenguaje verbal, la confusión, la ambigüedad y la divergencia afloran aquí y allá. Esto es así debido a que nuestro lenguaje común cumple muchas funciones comunicativas y, por lo tanto, no tiene como función exclusiva la expresión lógica de pensamientos. En la lógica de la época, Frege se encontraba a menudo con la ambigüedad subyacente a la palabra *juicio*, ya que en ella no se distinguía con claridad la mera expresión de un pensamiento, de su afirmación y de su reconocimiento como verdadera. Puesto que las relaciones lógicas se encuentran en el lenguaje apenas sugeridas, es común confundir la captación lógica de pensamientos con los procesos mentales de orden psicológico (las representaciones mentales o imágenes) y se tiende, por consiguiente, a empalmar lo objetivo y lo subjetivo, a confundir el contenido conceptual con los símbolos que se usan para expresarlo.

Frege consideraba que esta clase de confusión era una enfermedad nueva entre los matemáticos, *morbus mathematicorum recens*, cuya sintomatología podía encontrarse por igual entre quienes asumen actitudes formalistas, idealistas o empiristas. Aunque en verdad la enfermedad podía encontrarse también entre los lógicos y los filósofos. De hecho, en su reseña crítica a la *Filosofía de la aritmética* de Husserl, Frege cierra señalando que los errores detectados “son menos imputables al autor que a una ampliamente extendida enferme-



dad filosófica” (Frege 1894/1998, 159). Desde luego, la enfermedad “filosófica” se refería de manera exclusiva a la confusión entre lo lógico y lo psicológico, y si tomamos al pie de la letra las discutidas “17 afirmaciones clave sobre la lógica” (c. 1906/2016) debe quedar fuera de toda duda la importancia que Frege le atribuía a dicha confusión y, por añadidura, a su cruzada por erradicarla. Con todo, nada autoriza a tomar esas afirmaciones clave (Kernsätze) como los principios (Grundsätze) de la conceptografía, como a veces se hace; lo cual tampoco debe sugerir que no tengan relación alguna entre sí. De hecho, esas observaciones solo indican la manera como los seres humanos entran en contacto con el reino objetivo del pensamiento por medio del lenguaje.

¿En qué medida el lenguaje común es la fuente de la cual se nutre la confusión entre lo lógico y lo psicológico y otros malentendidos similares? Como ya se ha dicho anteriormente, en la medida en que el lenguaje natural es incapaz de expresar de manera inequívoca las relaciones lógicas. Por ejemplo, ya he advertido la ambigüedad que Frege encontraba en los lógicos de su época en relación con el juicio, en cuanto que a veces expresa solo un pensamiento

y otras su afirmación. Pero el origen de la ambigüedad se encuentra en el lenguaje común, pues solo tenemos acceso al pensamiento por medio de aquellas expresiones que llamamos oraciones o enunciados declarativos (en inglés y en la literatura filosófica se habla con más frecuencia de “proposiciones”, pero en español no tiene ese significado primario). La simple oración en sí expresa solo un pensamiento y requiere “fuerza asertórica o aseverativa” para afirmar su verdad. Desde luego, en el lenguaje ordinario podemos recurrir a varias formas para sostener su verdad, ya sea por medio de la entonación o adjetivando su valor de verdad. Tales recursos son insuficientes, ya sea porque no se reconoce en la entonación el énfasis asociado a su afirmación, o bien porque no se está seguro si se está fingiendo. En la conceptografía, se introduce un símbolo para superar esa deficiencia del lenguaje natural, aunque hace falta agregar unas

cuantas cosas más sobre el segundo caso, es decir, cuando se adjetiva la verdad a la oración declarativa. En primer lugar, la adjetivación no añade nada a la oración declarativa con fuerza asertórica. Es decir, las afirmaciones “Claudia Sheinbaum es la pri-



Fig. 6: Detalle de *Doble Perfil*, de César Cabrera.



mera presidenta de México” y “es verdad que Claudia Sheinbaum es la primera presidenta de México” muestran una clara diferencia lingüística, pero expresan el mismo pensamiento, si la primera ha sido expresada con fuerza asertórica. De aquí extrae Frege una idea capital para su conceptografía y para la lógica en general: “las categorías gramaticales *sujeto* y *predicado* son irrelevantes para la lógica” (Frege 1897/2016, 167). La primera consecuencia de este nuevo punto de partida es que la verdad no se comporta con respecto a la oración declarativa de manera predicativa y cuando nos dejamos llevar por la forma gramatical surgen contradicciones insuperables. La más obvia, a partir del ejemplo anterior, es que la verdad es y no es un predicado, forma parte y al mismo tiempo no, de la oración declarativa. En su versión menos corrosiva, la verdad como predicado gramatical es accesoria y, por consiguiente, desecharable.

En la séptima observación de las 17 afirmaciones clave, Frege hace manifiesta su convicción sobre el carácter indefinible de la verdad desde el punto de vista lógico. Y poco más adelante, en la observación onceava, señala: “toda verdad es eterna e independiente de que sea pensada y de las condiciones psicológicas del que la piensa”. De lo anterior se colige que no se puede tratar de algo lingüístico, de algo que se puede predicar de manera inequívoca y no trivial de las oraciones declarativas. Por consiguiente, si la verdad no puede ser un predicado, o un concepto, solo puede ser entonces, un objeto. A la inversa, en el lenguaje común, un concepto viene sugerido por la forma gramatical, pero también admite usos impropios cuando el predicado precedido por el artículo definido lo convierte gramaticalmente en nombre de un objeto y es así como llegamos a contradicciones similares a las que se producen con el engañoso uso predicativo de la verdad, como “el concepto *caballo* no es un concepto”, puesto que su valor gramatical corresponde al sujeto de la oración.

Ahora bien, un concepto en el sentido lógico es para Frege una función (y hoy decimos, *una función proposicional*), pues “un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad” (Frege 1891/1998, 65). Y es así como se pasa de un pensamiento a su verdad, del concepto a su extensión. Ninguna de estas entidades son cosas propiamente lingüísticas, aunque las podamos reconocer de manera sugerida en la forma predicativa, en el caso del concepto, o por la forma nominal, como objeto, para el caso de la verdad. Quienes conocen aunque sea un poco la obra de Frege o lo que han escrito Russell y Wittgenstein o los estudiosos de su filosofía, encontrarán extraño que hasta el momento haya evitado usar la famosa distinción *Sinn und Bedeutung* y no me haya decantado sobre la manera “correcta” de traducirla a nuestro idioma, y solo haya indicado que su introducción supone un perfeccionamiento de la

conceptografía como sistema lógico. La razón es sencilla, puesto que si la exposición ha sido hasta aquí suficientemente clara, tenemos entonces los elementos básicos para pronunciarnos sobre la cuestión de su traducción y evitar los errores, a veces elementales, en los que se incurre al confundir el orden lógico y el orden lingüístico y, por consiguiente, confundir la interpretación de los símbolos en la conceptografía con el comportamiento de sus contrapartes gramaticales en el lenguaje ordinario.

La traducción de *Sinn* es transparente y nadie hace *causa belli* por ella, no así con *Bedeutung*, para la cual se han usado los términos *referencia*, *denotación*, y *nominatum* (esta última expresión solo en la literatura en inglés), todas las cuales pueden considerarse más o menos equivalentes si dejan de lado ciertos escrúpulos hacia determinadas derivaciones en la expresión. Frente a estas traducciones, se opone la versión *significado* (meaning) y *significación*. Tugendhat sostiene que las primeras traducciones dan por supuesto que Frege entendió por *Bedeutung* el objeto designado por la expresión, debido a que solo tomaron en cuenta los nombres propios, pero dado que Frege habla también del *Bedeutung* de nombre común o término conceptual, y de un término conceptual no se puede hablar con propiedad de referencia sino de extensión, en tanto que en principio la extensión de un término general puede referir a muchos objetos, o incluso a ninguno. Luego indica que la traducción como referencia “parece parcialmente justificada”, pero de allí en adelante cae en contradicción al proponer como término técnico para *significación* el término *extensión*. Y añade, “aunque según mi opinión esta respuesta señala en la dirección correcta, todavía no es satisfactoria, ya que la expresión ‘extensión’ se define diferentemente con respecto a los nombres y a las oraciones (y también a los predicados)” (Tugendhat 1998, 146). Si esta propuesta fuera plausible, entonces debería guardarse el término *significación* y traducir directamente *extensión* por *Bedeutung*. En cualquier caso, el error que ve en el término *referencia* se aplica de igual modo o incluso con mayor peso a su traducción por *extensión*, puesto que hablar de la extensión de un nombre propio como de una oración declarativa conduce a errores que Frege pretende superar, puesto que en un lenguaje lógico lo que se busca es siempre la univocidad en la designación.

Que Tugendhat incurre en la confusión común entre el orden lingüístico y el orden lógico lo muestra el siguiente comentario. Como ya he señalado, Frege remplaza en la lógica la vieja distinción gramatical *sujeto* y *predicado* por la distinción *concepto* y *objeto*, o función y argumento. Mas, según Tugendhat, “tenemos que concluir que el hecho de que Frege utilice los términos ‘nombre’ y ‘objeto’ para las oraciones y su significación se basa, en último término,



en la teoría tradicional de que el ejemplo modelo de una expresión completa ('categoremática') es el nombre". El equívoco se hace más claro cuando añade: "Por otra parte, fue Frege mismo quien en sus *Grundlagen der Arithmetik* (§ 62) introdujo un nuevo principio con el famoso dictum: «solo en el contexto de una oración significan algo las palabras». Esta afirmación alude a la concepción de la significación como potencial de valor de verdad" (Tugendhat 1998, 150). Hay dos cosas que Tugendhat pierde de vista: 1) que en *Los Fundamentos de la aritmética* Frege no había hecho aún la distinción *Sinn* und *Bedeutung* y, por lo tanto, 2) no volvió a invocar ese famoso *dictum* en sus escritos posteriores. Si Tugendhat estuviera en lo correcto la distinción saldría sobrando.

Demos la palabra a Frege para liberarse de semejantes interpretaciones. En "Sobre Concepto y Objeto" señala lo siguiente:

Cuando escribí mis *Fundamentos de la aritmética* no había hecho todavía la distinción entre sentido y referencia, y por ello aún reunía bajo la expresión «contenido enjuiciable» lo que ahora designo, estableciendo una distinción, con las expresiones «pensamiento» y «valor de verdad». Por lo tanto, ya no apruebo enteramente, en sus términos textuales, la explicación que se da allí en la página 77, (§ 66) aunque en lo esencial aún soy de la misma opinión. Para resumir, puede decirse, entiendo «predicado» y «sujeto» en sentido lingüístico: un concepto es la referencia de un predicado, un objeto es lo que nunca puede ser la *referencia total* de un predicado, si bien puede ser la referencia de un sujeto [las últimas cursivas son mías] (Frege 1892/2016, 283-4).

Cito este pasaje porque los estudiosos de Frege suelen pasar por alto la distinción que allí se hace entre el orden gramatical y el orden lógico por medio de la noción misma de *Bedeutung*. Que un objeto nunca pueda ser la *referencia total* de un predicado tiene que ver con dos obvias excepciones a dicha restricción: cuando el concepto figura como función cuyo valor es un valor de verdad y cuando la extensión del concepto se restringe a un solo elemento.

La manera como apunta el lenguaje a las entidades lógicas no es nunca estable y, por consiguiente, como ya se ha indicado, hay que cuidarse de no dejarse desarrilar por los usos inapropiados. Existen numerosos comentarios entre su obra publicada, inédita y en su correspondencia sobre cómo la conceptografía puede superar los errores a los que da pie el lenguaje ordinario, pero citaré brevemente dos. En el manuscrito que lleva por título "Introducción a la lógica", Frege señala: "A menudo se permite que el lenguaje influya dema-

siado en la lógica y por eso la conceptografía es buena para deshacerse de la forma lingüística" (Frege 1906/1998, 175). En una carta a Husserl, del mismo año que el manuscrito anterior, es aún más contundente: "Me parece que los lógicos se abrazan demasiado al lenguaje y a la gramática y están demasiado enmarañados en la psicología... La principal tarea de la lógica es librarse del lenguaje y simplificarlo" (Frege 1906b/1998, 188 y 190).

En resumen, si Frege fue un filósofo del lenguaje, solo pudo serlo en sentido negativo; es decir, solo en la medida que sus indagaciones sobre el comportamiento verbal tienen un carácter accesorio y con un propósito ajeno al lenguaje mismo. De igual forma, Frege fue un filósofo a su pesar en tanto que el examen a fondo de los fundamentos de su disciplina era y es considerada en el presente una labor filosófica o pedagógica, poco valorada y mal vista entre sus propios colegas. Su proyecto de fundamentación lógica de la aritmética fracasó, pero ese fue el precio que hubo que pagar por hacer avanzar la lógica.

## REFERENCIAS

- Dummett, M. (1973). *Frege: Philosophy of language*. Cambridge: Harvard University Press.
- (1981). *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge: Harvard University Press.
- Picardi, Eva (1987), "The logics of Frege's contemporaries, or «der verderbliche Einbruch der Psychologie in die Logik»", en D. Buzzetti & M. Ferriani eds. *Speculative grammar, universal grammar and philosophical analysis of language*. Amsterdam: Benjamins, 173-204.
- Sluga, Hans (1980). *Frege*. London: Routledge.
- Tugendhat, Ernst (1997), "El significado de la expresión «Bedeutung» en Frege", en *Ser, Verdad, Acción. Ensayos filosóficos*. Traducción de R. Santos-Ihlau, Barcelona: Gedisa, 143-164.
- Weiner, Joan (1992), "Has Frege a philosophy of language?", en *Early analytic philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein. Essays in Honor of Leonard Linsky*, edited by W. W. Tait, Chicago: Open Court, 249-281.
- Woodward, W. R. (2015). *Herman Lotze. An intellectual biography*. Cambridge: Cambridge University Press.





**Fig. 7** "El lenguaje no está dominado por leyes lógicas, de manera que la observancia de la gramática garantice ya la corrección formal del pensamiento. Las formas en que se expresan los argumentos son tan variadas, tan laxas y tan dúctiles, que fácilmente se pueden colar presupuestos inadvertidos, que sean pasados por alto en la enumeración de las condiciones necesarias para la validez de las conclusiones", Frege 1882/2016, 157.



## El lado oscuro de Gottlob Frege

**Víctor M. Hernández Márquez**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

[victor.hernandez@uacj.mx](mailto:victor.hernandez@uacj.mx)

ORCID: 0000-0001-6644-9116



### Las vicisitudes de un legado

La trayectoria intelectual de Frege transcurrió en relativa oscuridad hasta hace relativamente poco, en buena medida debido a que su obra permaneció de manera inaccesible para la mayoría de quienes sentían curiosidad por ir más allá de los comentarios y las referencias indirectas que grandes figuras de la filosofía contemporánea, notablemente Russell y Wittgenstein, habían hecho acerca de sus ideas, de sus obras y de su trayectoria intelectual. Uno de los pioneros en recuperar la obra de Frege para la posteridad fue Heinrich Scholz, un teólogo de formación que se convirtió en un investigador incansable sobre la historia de la lógica contemporánea y un tenaz buscador de todo lo relacionado con la obra de Frege. Fue él, y nadie más, quien se encargó de crear y preservar el corpus fregeano para el escrutinio de todo posible interesado. En 1936, Alfredo Frege cedió a Scholz los papeles heredados de su padre para su clasificación y posterior almacenamiento en la Universidad de Münster. Desafortunadamente, el corpus —junto con los documentos de Ernest Schröder— fueron destruidos durante el bombardeo de los aliados el 10 de octubre de 1943 y solo sobrevivieron las copias que Scholz alcanzó a elaborar como medida preventiva.<sup>1</sup> A la muerte de este último, ocurrida el 30 de diciembre de 1956, sus papeles y las copias que había asegurado pasaron, en calidad de préstamo y para fines edi-



<sup>1</sup> Por algunas décadas se pensó que los papeles habían desaparecido en el bombardeo del 25 de marzo de 1945, pero nueva evidencia apunta a la fecha previa mencionada.

toriales, a la Universidad de Konstanz; aunque, a decir de las autoridades de Münster, nunca restituidos por completo hasta el presente.

### **Un diario doblemente tardío**

La obra científica y filosófica de Frege y, en particular, sus escritos póstumos, se publicaron a finales de 1960, sin incluir el diario “completo” que escribió entre el 10 de marzo y el 9 de mayo de 1924; es decir, tan solo un año antes de su muerte. No fue entregado a Scholz entre los papeles originales en 1936, sino dos años después y no en el original, sino por medio de una transcripción mecanografiada debida a su hijo adoptivo, Alfredo Frege. Se desconocen los motivos que llevaron al hijo a no entregar el diario tal cual y al parecer Scholz nunca solicitó el original, aunque fuese en calidad de préstamo, para cotejar la exactitud de la transcripción. Esa petición nunca planteada era bastante razonable si se toma en cuenta el comentario de Alfredo sobre la dificultad que enfrentaba a causa de la escasa legibilidad de algunos pasajes y porque, como comenta Gottfried Gabriel, editor (en colaboración con Wolfgang Kienzler) y encargado del estudio introductorio del Diario, el texto mecanografiado muestra correcciones cuya fidelidad no ha sido posible verificar. Surgen numerosas cuestiones a este respecto: ¿existen o existieron otros diarios?, ¿es posible que el Diario sea más amplio que la versión transcrita por el hijo?, ¿qué motivos llevaron a Frege, seis años después de haber pasado a retiro, a iniciar este ejercicio tardío?, ¿por qué no continuó con esa empresa?, ¿el Diario expone el pensamiento social del Frege anciano o resume la opinión de toda su vida adulta?, ¿es consistente el Diario en sí mismo o deja entrever un pensamiento desarticulado?, ¿cuál fue la reacción de Scholz al conocer el contenido del texto?

El Diario contiene tres entradas sobre el concepto de número fechadas entre 23 y 25 de marzo de 1924 y fueron publicadas en los escritos póstumos en 1969, mientras que el resto del Diario permaneció inédito hasta 1994. El contenido “socio-político” (como lo denominó su hijo adoptivo) del Diario refiere a la situación de Alemania en los años de irritación social causado por la derrota en la Gran Guerra y muestra a un Frege seducido por la creciente hostilidad hacia la socialdemocracia (a menudo asociada con el marxismo o el socialismo bolchevique), el creciente antisemitismo (que siempre estuvo allí y no solo allí), una idea de democracia restrictiva (en donde las mujeres son excluidas del voto, cosa “normal” en la mayoría de las democracias de la época; los socialistas, los judíos y otros presuntos indeseables sociales), y la esperanza en un líder a la altura de Bismarck, quien con mano dura y firme pusiera freno al caos económico y social en el cual se hundía, a los ojos de muchos, la precaria República de Weimar.



## Reacciones

Cuando Michael Dummett publicó en 1973 su obra monumental sobre Frege, dejó constancia de la desagradable impresión que le causó descubrir ideas ultraconservadoras en ese Diario tardío. “Existe cierta ironía con respecto a mí —escribió en el prefacio (Dummett 1973, xii)— en el hecho de que el hombre a cuyas ideas filosóficas había dedicado, a lo largo de los años, gran parte de mi pensamiento fuera, al menos al final de su vida, un racista virulento, específicamente anti-semita”. La profundidad de la ironía pasó un tanto desapercibida para quienes desconocían el intenso activismo de Dummett contra el racismo en Inglaterra. De acuerdo con su propio testimonio, su activismo adquirió un ímpetu renovado a partir de su visita a los Estados Unidos durante los años críticos de la lucha por los derechos civiles de la comunidad negra. No es que Inglaterra fuese un país con brotes esporádicos de racismo, todo lo contrario: durante los sesenta, Inglaterra experimentó oleadas de reacciones racistas, particularmente contra la población inmigrante y los refugiados que llegaban al Reino Unido procedentes de sus antiguas colonias. El fuerte compromiso de Dummett y de Ann, su esposa, con la causa antirracista lo había obligado a postergar por más de una década la publicación de sus investigaciones sobre la obra de Frege. En 1957, Dummett había visitado el Instituto de Lógica y Fundamentos de la Matemática de la Universidad de Münster fundado por Scholz y pudo conocer de primera mano el estado que guardaban los manuscritos sobrevivientes y el proyecto de publicación que Scholz había dejado inconcluso. Desde luego, tuvo acceso al Diario y por ese motivo lamentó que los editores definitivos de los escritos póstumos dejaran de lado el contenido “ideológico” del Diario, un reproche un tanto injustificado dado la naturaleza de su contenido en relación con el grueso de los papeles póstumos. En cualquier caso, el reproche pudo plantearse debido a la tardanza en la publicación “íntegra”, aun cuando la versión mecanografiada estuviese disponible en el Frege Archive de la Universidad de Münster para quien quisiera asomarse a su contenido, independientemente de si, como ya se ha dicho en repetidas ocasiones, las ideas sociopolíticas allí contenidas fueran originales o novedosas dentro de la ola reaccionaria que acabó con la débil República de Weimar.

No obstante, había también un motivo más profundo en el desagrado que le provocó el Diario, ya que en buena medida, Frege culpa al partido católico del mal social que primaba en Alemania y, en particular, reprochaba a los teólogos desatar la violencia al inculcar “el demonio de la envidia” entre los trabajadores hacia sus empleadores. Esta “injerencia” teologal, le parecía inadmisible sobre la base de un razonamiento secular:



Los derechos son esencialmente civiles. Los derechos civiles se corresponden habitualmente con obligaciones civiles, pero los derechos civiles no pueden corresponderse con obligaciones religiosas; de lo contrario un juez civil tendría que decidir también sobre el cumplimiento de obligaciones religiosas. Así pues, las obligaciones religiosas no pueden fundamentar nunca un derecho (19.3.1924).

Como católicos, Dummett y su esposa Ann, fundaban su activismo en el imperativo moral que se desprende de la encíclica *Pacem in Terris* del papa Juan XXIII, de acuerdo con la cual “el papa Juan en cierto modo incluso llegaba a declarar que la migración económica es un derecho humano elemental” (Dummett 2004, 93). Pero Dummett estaba lejos de entender ese imperativo moral como medio para alcanzar un fin, sea la gracia de la salvación o cualquier otra retribución espiritual.<sup>2</sup> El comentario viene al caso porque en su libro *Frege and Fascism* (2025), Stephen D’Arcy pasa de largo antes estas cuestiones a pesar de dedicar un último capítulo a lo que denomina “el giro de Frege a la teología política”.

Por lo demás, para cuando Dummett expuso su sentir acerca de las ideas sociopolíticas de Frege para el público anglosajón, en la Alemania Occidental era de sobra conocida la actitud reaccionaria no solo de Frege, sino del ambiente cultural que pasó a denominarse la “prehistoria intelectual del fascismo”. En la primera traducción española de la emisión radiofónica de 1971 en la cual Jürgen Habermas expone el estado de la cuestión en la filosofía alemana del siglo XX, texto que abre los *Philosophisch-politische Profile*, planteaba el panorama precedente de la siguiente forma:

En el desarrollo filosófico alemán es digna de notar también la fijación en el fenómeno histórico contemporáneo del fascismo. La fuerza de este proceso objetivo ha polarizado todas las posiciones. Incluso los filósofos y filosofías de los años veinte y primeros treinta conectan forzosamente con la perspectiva de la prehistoria intelectual del fascismo; no pueden considerarse indiferentes respecto a sus consecuencias. De todas formas, después de 1945 se acabó la inocencia de un consentimiento neutral. La historia de la vida política separó a exiliados como Bloch, Horkheimer, Adorno, de los emigrantes internos, como Jaspers y Litt y de los guías intelectuales o de los colaboradores accidentales del régimen como Heidegger, Frege y Gehlen.

<sup>2</sup> La exposición más elaborada de los puntos de vista sobre el particular se encuentra en Dummett (1979).

Sin embargo, el traductor o el revisor cometió un error al pesar que Freyer, como aparece en el original, era con seguridad una errata, quizá porque ya tenían en trámite la traducción del Diario de Frege (publicado en 1997 en la revista *Teorema* en traducción de Luis M. Valdés Villanueva) y no una referencia directa al lingüista Hans Freyer.<sup>3</sup> Independiente de este detalle no menor, del comentario de Habermas se desprende una pregunta que puede ser trasferida a nuestro caso: ¿Fue Frege un guía intelectual o un colaborador accidental del fascismo? Si se toma en cuenta el carácter privado del Diario y la edad avanzada de su autor, la respuesta es negativa en ambos casos; lo cual, por lo demás, no quita ni una coma a su “modernismo reaccionario”, para usar la conocida expresión de Jeffrey Herf (1984).

Además, las investigaciones de Matthias Willie (2016 y 2020) respaldan y documentan la breve valoración que hizo Husserl sobre Frege en la tarjeta postal enviada a Scholz en 1936: “Nunca tuve contacto personal con Frege y ya no recuerdo el propósito de nuestra correspondencia. En aquella época era considerado por lo general como un marginal de mente aguda que, sin embargo, había producido poco o nada de valor ya sea en matemáticas o en filosofía”.<sup>4</sup> ¿Pudo entonces Frege ejercer alguna influencia sobre su entorno social? Stephen D’Arcy (2025, 2 y 104) opina que no, pero tampoco permite perder de vista que Frege haya abrigado la esperanza que sus opiniones tuvieran eco, en particular entre la juventud alemana, y eso basta para volver sobre ese lado poco explorado de su pensamiento, sobre todo en este momento en que el fascismo internacional asoma una de sus peores caras y el sionismo se ha convertido a la vuelta de las décadas en la confirmación de una suerte de Holocausto árabe a la vista de todos.

Sin embargo, el propósito de D’Arcy es un tanto trivial en su objetivo, ya que se propone someter a examen la bancarrota intelectual de Frege para vérselas con la crisis que le tocó vivir en sus últimos días. A decir verdad, su propósito justiciero vas más allá al señalar a todos aquellos que de manera involuntaria, consciente o inapropiada, intentaron minimizar o bien ocultar esa faceta del pensamiento de Frege. Sin ahondar en su pensamiento y su activismo, D’Arcy considera que Dummett fracasó en su caracterización de Frege al no tomar en consideración las diferencias entre un pensador “del ala de la

<sup>3</sup> La cita corresponde a la versión de José María Cabañas aparecida en los cuadernos *Teorema* y luego en *Tecnos* junto a otros textos de Habermas. En la traducción de *Perfiles filosófico-políticos*, a cargo de Manuel Jiménez Redondo, aparece el nombre correcto: Freyer, cuya existencia seguramente ha pasado desapercibida para muchos de los lectores hispanohablantes. Sobre el papel de Hans Freyer en las políticas lingüísticas del Nacional socialismo véase Hutton 1999, 31-32.

<sup>4</sup> La postal (19-02-1936) se cita de acuerdo con versión al inglés de la correspondencia de Frege.



extrema derecha a la manera de un libertario del mercado como Robert Nozick o un aristócrata tradicionalista como Edmund Burke, en lugar de un extremista del ala radical a la manera de fascistas como Adolfo Hitler y Erich Ludendorff" (D'Arcy 2005, 1-2). En particular, D'Arcy incurre en afirmaciones sin mayores pruebas, en ocasiones contradictorias, y en clara confrontación con los datos disponibles, al sostener, por ejemplo, que los escritos políticos, con la excepción del Diario y el borrador sobre el sistema de votación, "fueron removidos" del Nachlaß al inicio de la guerra. Pero, los agentes (además de Alfredo Frege) de dicha "purga", como también la llama (D'Arcy 2005, 9), brillan por su ausencia y su narrativa va a contracorriente con lo que sabemos sobre la recolección que hizo Scholz sobre los escritos de Frege, así como de la entrega de la copia mecanografiada del Diario hecha por el hijo adoptivo; de tal suerte que lejos de existir una "purga", lo que hubo en realidad fue una incorporación al archivo de Scholz. De hecho, de acuerdo con la reconstrucción de D'Arcy, la entrega de la versión mecanografiada del Diario por parte de Alfredo Frege resulta inexplicable o inverosímil como lo es también su acusación de que la propuesta de Frege para la reforma al sistema de pensiones se perdió a causa de la poca importancia que los ejecutores del Nachlaß mostraron en preservar el documento (D'Arcy 2005, 105). Además, pasa de largo ante la suposición de los editores en cuanto a que Alfredo no entregó la totalidad de los escritos "científicos": "Es muy probable que algunos de los escritos científicos que Alfredo Frege no entregó a Scholz haya sobrevivido a la guerra. Dado que Alfredo Frege murió en acción el 15 de junio de 1944 en Montesson, cerca de París, se desconoce el paradero de sus posesiones". Hermes et. al. en Frege 1979, xiii.

D'Arcy ofrece una reconstrucción plausible de algunas iniciativas sobre el sistema electoral diseñado por Frege, aunque carece de parámetros comparativos y una ubicación histórica ponderada; por consiguiente sus valoraciones son las más de las veces anacrónicas. Pensemos tan solo en uno de los aspectos de la propuesta electoral de Frege en lo que respecta a la exclusión del voto femenino. Para nadie debe ser una sorpresa que el voto femenino fue un logro conseguido por ellas mismas después de muchas batallas y penurias durante las últimas décadas del siglo XIX y las primeras décadas del siglo XX. En Alemania el voto femenino se consigue casi a la par de la formación de la República de Weimar, el 2 de noviembre de 1918, superando la propuesta electoral promovida por Frege.

los argumentos de Frege eran bastante trillados y en cierta forma reproducían, en algunos casos íntegramente, los planteados por la Asociación contra el voto y la emancipación de la mujer (*Bund zur Bekämpfung der Frauenemanzipation und des Frauernwahlrechts*). Esta oposición, sin embargo, no era exclusiva de la derecha, llámese moderada o radical, sino de un amplio espectro de la sociedad alemana (y occidental). Tanto el ala socialista del partido liberal como amplios sectores de la social democracia eran abierta o de manera encubierta hostiles al voto de las mujeres, por no hablar de las divergencias entre las mismas activistas según su ubicación en el espectro político. Con la clara excepción de Russell (y antes de él su pariente John S. Mill), el respaldo de los filósofos al voto femenino fue durante este periodo inexistente. Incluso Simone de Beauvoir confesó ignorar en un principio el movimiento sufragista, por no hablar del rechazo de Luisa Michel al “privilegio ilusorio” del voto, que luego, de Beauvoir y otras tantas han de algún modo retomado esa crítica al considerar que el sufragio por sí solo es insuficiente y, por consiguiente, solo puede ser aceptable como parte de un conjunto de derechos más amplio. D'Arcy además, olvida que el movimiento sufragista femenino estaba fragmentado por razones ideológicas y de estatus social. Pero vamos, D'Arcy termina por reconocer que

la crítica de Frege a la democracia está en 1918 más bajo la influencia del liberalismo que del fascismo. Aunque esta posición antipopulista fuera diseñada para ampliar la capacidad del estado Alemán para responder a las demandas emanadas de cambio social del pueblo alemán, en mi opinión, es adecuado describirla como anti-democrática más no fascista, inspirada en la sospecha conservadora sobre la incapacidad del electorado para gobernarse a sí mismo, por un lado, y una idealización sobre la “sobria” deliberación de la gente educada, por el otro (D'Arcy 2005, 99).

De este modo y a lo largo de todo el libro, la estrategia discursiva D'Arcy pasa de las afirmaciones contundentes a los peros que las desactivan. Una fracción de sus conclusiones están destinadas en parte a desacreditar la opinión según la cual el fascismo y, en particular el nazismo, son movimientos irracionales alentados por filosofías igualmente irracionalistas. Bertrand Rus-



Fig. 8: Detalle de *Perfil hormonal*, de César Cabrera.



sell, uno entre otros de los que sostuvieron este parecer y que D'Arcy cita a este propósito, no fueron a pesar de su abrumadora fama, modelos de racionalidad (en su época juvenil defendió la supremacía imperialista de Inglaterra frente a la causa Boer, entre otras cosas), como lo muestra la gran biografía de Ray Monk (2011). Quizá la tesis más arriesgada de D'Arcy sea revivir la sospecha de que la lógica de Frege es, de alguna manera, el instrumento con el cual buscó fundamentar sus opiniones retrógradas sobre la exclusión del derecho al voto de los judíos, las mujeres y los célibes así como la noción étnica de ciudadanía.

### **Coda: la lectura feminista de Frege**

No es posible detenerse con un mínimo de detalle para examinar la argumentación de D'Arcy ni trazar la genealogía de esta clase de reclamos; en cambio, me parece pertinente cerrar este comentario con una breve relación de lo que ha sido la recepción de la obra de Frege entre las investigadoras feministas.

Desde luego, no toda investigadora es feminista, pero las investigadoras a quienes me referiré, claramente cubren ambos criterios, y lo primero que viene al caso es indicar que Frege ha recibido la atención de un pequeño pero notable grupo de investigadoras de algunas partes del mundo. Algunas, por ejemplo, son pioneras en introducir la obra y el estudio de Frege en sus propios países, como es el caso de Claude Imbert, responsable de las traducciones al francés, a finales de la década de los sesenta y principios de los setenta, de la obra de Frege y de ofrecer los estudios que las acompañan (uno de estos estudios aparece en la traducción castellana de *Los fundamentos de aritmética* que hizo Ulises Moulines). Después de dedicarse al estudio de la filosofía francesa, a la retórica y la lógica antigua (véase a este respecto su libro *Phénoménologies et langages formulaires*, 1992) no fue hasta 1999 cuando apareció su libro *Pour une histoire de la logique*. Un año después, en el número especial de *Hypatia* dedicado a las filósofas francesas contemporáneas, la encargada de presentar el texto de Claude Imbert fue nada menos que la filósofa e historiadora de la ciencia Emily Grosholz (“Frege and the surprising history of logic: Introduction to Claude Imbert, «Gottlob Frege, one more time»”). Además, Grosholz es editora del volumen colectivo *The legacy of Simone de Beauvoir*, en donde Imbert colabora con el capítulo “Simone de Beauvoir: a woman philosopher in the context of her generation”.



Por último, mencionaré a dos filósofas norteamericanas. La primera, Joan Weiner profesora emérita de la Universidad de Indiana y autora de tres libros sobre Frege; la segunda, Andrea Nye, profesora de la Universidad de Wisconsin

y autora de *Words of power: A feminist reading of the history of logic* (1990), donde confronta la lógica y en particular la lógica de Frege, que dicho sea, (D'Arcy solo cita de paso y solo para indicar que no participa de la interpretación de Nye). En cierta medida es entendible, ya que en lo general, Nye considera que la lógica es un tipo de pensamiento abstracto propio de los hombres, ajeno a la sensibilidad femenina. En los mismos términos, la lógica es y ha sido un instrumento de poder de las élites:

La lógica era la prerrogativa de aquellos en el poder que la usaron como instrumento para gobernar de forma correcta. En la lógica Nazi, se realiza por completo el sueño de Parménides. El Ser es una unidad, no hay nada fuera del todo homogéneo de la realidad fascista. No hay más que un Ser, un pensamiento (Nye 1990, 170).

De allí en adelante, es posible advertir que la lógica de Frege es un paso más hacia la perfección de ese instrumento de poder. Y concluye: “La lógica en su perfección final es una locura” (Nye 1990, 171).

Cuando Joan Weiner se avocó a reseñar el libro de Nye, los editores le pidieron se enfocara en la crítica hacia Frege, por ser el principal interés para los lectores de la revista. Como no hay espacio para examinar la valoración de Weiner, citaré solo las últimas líneas, con la esperanza de que pueda despertar un interés ulterior por reconstruir a fondo la discusión:

Nye escribe: “La experiencia de un hombre solitario, alejado de otros, amargado, concentrado en un objetivo intelectual supremo, es una obsesión tal que el entendimiento vuelve inteligible la lógica de Frege, aunque ¿la vuelve también excusable?” (Nye 1990, 175). Pero incluso para aquellos que quieran seguir a Nye en lamentar el rechazo a los argumentos *ad hominem*, el caso no se ha demostrado. Un argumento *ad hominem* requiere una acercamiento adecuado a la persona en cuestión. La exactitud es uno de los estándares en los cuales Nye busca ser valorada, aunque este es un criterio que *Words of power* visiblemente falla en satisfacer. Las caracterizaciones que Nye elabora tanto de la lógica como del hombre, no son productos del trabajo académico, sino de la fantasía (Weiner 1994, 681).

Este severo juicio de Weiner se puede aplicar parcialmente a D'Arcy, aunque no solo en relación con Frege, sino también con respecto a todos aquellos acusados de pretender salvar a Frege de las llamas de su propio pensamiento o, para decirlo en sus propias palabras, a quienes presumiblemente sucumben



ante el “el impuso apolégético”. De acuerdo con Monk, podemos resumir todo este asunto de la siguiente manera: no podemos hacernos de la vista gorda ante claros fallos académicos, simplemente porque simpatizamos con las causas que se defienden.

## REFERENCIAS

- D'Arcy, Stephen (2025). *Frege and Fascism*. London: Routledge.
- Dummett, Michael (1973). *Frege: philosophy of language*. Second edition 1981. Cambridge: Harvard.
- (1979). *Catholicism and the world order. Some reflections on the 1978 Reith Lectures*. London: Catholic Institute for International Relations. Versión digital en: <https://archive.org/details/dummett-catholicism-world-order>
- (1981). *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge: Harvard.
- (2004). *Sobre Inmigración y refugiados*. Traducción de Miguel A. Col. Madrid: Cátedra.
- Frege, G. (1980), *The philosophical and mathematical correspondence*. Edited by Gottfried Gabriel et al., abridge English edition by B. McGuinness. London: Basil Blackwell.
- Habermas, Jürgen (1994), “¿Para qué aún filosofía?, en *Sobre Nietzsche y otros ensayos*, 1<sup>a</sup> ed. en Teorema, 1982; Madrid: Tecnos, 62-88. También en *Perfiles político-filosóficos*. Traducción de M. J. Redondo. Madrid: Taurus.
- Herf, Jeffrey (1989). *El Modernismo reaccionario. Tecnología, cultura y política en Weimar y el Tercer Reich*. Traducción de Eduardo L. Suárez. México: FCE.
- Hermes, H. et al (1979), “The history of the Frege Nachlaß and the basis for this edition”, en *Frege: Posthumous writings*. Oxford: Basil Blackwell, ix-xiii.
- Hutton, Christopher M. (1999). *Linguistics and the Third Reich. Mother-tongue fascism, race and the science of language*. London: Routledge.
- Monk, Ray (2011), “El lado oscuro”, en *Lo que piensan los filósofos*, J. Baggini y J. Stangroom, Madrid: Paidós, 165-173.
- Nye, Andrea (1990). *Words of power. A feminist reading of the history of logic*. New York: Routledge.
- Weiner, Joan (1994), Review of *Words of power* by Andrea Nye. *The Journal of Symbolic Logic* 59: 678-681.
- Willie, M. (2016), *Largely unknown. Gottlob Frege und der postume Ruhm*. [Ampliamente ignorado. Gottlob Frege y su reconocimiento póstumo] Münster: Mentis.
- (2020). *alles in den Wind geschrieben: Gottlob Frege wider den Zeitgeist*. [Todo está escrito en el viento. Gottlob Frege a contra corriente] Paderborn: Mentis

$$\vdash \left( \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \end{array} \right) \vdash \left( \begin{array}{c} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \right) \equiv \left( \begin{array}{c} \delta \\ \alpha \end{array} \right) \vdash \left( \begin{array}{c} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad (69)$$

**Fig. 9** "Por lo tanto, esta proposición se distingue de las consideradas hasta ahora, en que algunos símbolos que aparecen en ella no han sido definidos previamente: ella misma da esa definición. No dice "el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo", sino "debe tener el mismo contenido". Por tanto, esta proposición no es un juicio y, en consecuencia, tampoco un juicio analítico. Kant tenía por sintéticos todos los juicios de la matemática. Si (69) fuera un juicio sintético, entonces también lo serían las proposiciones derivadas de ella. Pero podemos prescindir, por tanto, de la notación introducida por medio de esta proposición, se sigue de ella lo mismo como su definición. Tales definiciones sólo tienen el propósito de una simplificación extrínseca mediante la introducción de una abreviación. Además, sirven para destacar una particular combinación de símbolos frente a la totalidad de las combinaciones posibles y, con ello, para una más firme captación de la idea. De esta manera, aunque la mencionada simplificación es apenas perceptible en los pocos juicios presentados aquí, he tomado, sin embargo, como ejemplo un juicio, de empleo frecuentísimo. Si bien originariamente (69) no es un juicio, de inmediato se transforma en uno; ya que una vez que se ha fijado el significado de los nuevos símbolos, éste queda fijo y, por tanto, la fórmula (69) se convierte en un juicio, pero en uno analítico, que sólo resalta una vez lo introducido en los nuevos símbolos.

Esto indica la duplicación de la barrera de juicio." *Conceptografía*, § 24.



## Tres cartas de Gottlob Frege

La presente carta al matemático David Hilbert (1862-1943) abre la correspondencia inmediatamente después de un primer acercamiento personal durante un congreso de matemáticos celebrado en Lübeck. Hilbert era catorce años menor que Frege y en ese año había conseguido una posición como matemático en la Universidad de Gottinga. El tema de la carta sugiere una prolongación del tema que Frege expuso en dicho encuentro, seguramente relacionado con el perfeccionamiento de la conceptografía y su aplicación a la aritmética, dado que dos años antes había aparecido el primer volumen de su *Grundgesetze*. Si bien la carta muestra de manera indirecta el interés temprano de Hilbert por los problemas de fundamentación, nada permite advertir la axiomatización de la geometría que llevará a cabo pocos después y que desató la disputa con Frege.

Jena, 1 de octubre de 1895

### De Frege a Hilbert

Querido colega,

Si recuerdo bien, usted me dijo en Lübeck que estaba intentando reducir más que incrementar la formalización en matemáticas. Dado que fuimos interrumpidos en nuestra conversación, quisiera exponerle mi posición por escrito.



42

Lo que es fundamental en el tema no es, me parece, el contraste entre la lengua y el sistema de símbolos, sino si uno debe emplear métodos y teoremas con un alcance limitado o amplio. Este contraste parece coincidir con el primero solo si hasta el momento no existe un simbolismo adecuado para los

métodos que usted suele preferir: aquellos de alcance amplio. Pero cuando la línea de pensamiento puede expresarse perfectamente en símbolos, esta debe aparecer de manera más perspicua y breve que en su forma verbal. Aquí asumo que se trata en realidad de la misma línea de pensamiento y que uno no está siguiendo un método enteramente diferente, pues solo entonces puede llevarse a cabo la comparación. Las ventajas de la precisión y lo perspicuo son tan grandes que muchas investigaciones no podrían llevarse a cabo sin un lenguaje de signos matemáticos. Actualmente puede ocurrir que, en la medida que la ciencia logra mayores avances, el mismo resultado pueda alcanzarse más fácil y más adecuadamente de diferentes formas, con o sin un uso limitado de símbolos. Aunque si el lenguaje de signos ha sido perfeccionado al punto que pueda expresar una nueva línea de pensamiento, este parecerá más perspicuo en símbolos que en forma verbal.

Más aun, el uso de símbolos no debe ser entendido como un procedimiento mecánico e irreflexivo, aunque el peligro de caer en un simple mecanismo de fórmulas es más inmediato aquí que al usar el lenguaje verbal. Uno puede pensar también con símbolos. Una operación meramente mecánica con fórmulas es peligrosa (1) para la verdad de los resultados y (2) para la fecundidad de la ciencia. El primer peligro puede evitarse casi por completo por medio de un sistema de signos lógicamente perfecto. En cuanto al segundo peligro, la ciencia puede caer en un estancamiento si el mecanismo de fórmulas se convierte tan rampante como para suprimir todo pensamiento. Sin embargo, no quisiera considerar semejante mecanismo como algo completamente estéril o dañino. Por el contrario, considero que este es necesario. El curso natural de los acontecimientos parece haber sido el siguiente: Lo que original se encontraba saturado con una carga mental con el tiempo se convirtió en un mecanismo que parcialmente exime al científico de la actividad del pensar. De igual modo, al interpretar una pieza musical, una serie de procesos que fueron originalmente conscientes debieron de volverse inconscientes y mecánicos para que el artista, liberado de esas cosas, pueda poner su sentimiento en la ejecución. Quisiera ahora comparar esto con el proceso de significación. Mientras crece un árbol su consistencia ha de ser suave y fresca, pero si lo que era tronco fresco con el tiempo no se convierte en madera, el árbol no alcanzará una altura significativa. Por otra parte, cuando todo lo que era verde se vuelve madera, el árbol deja de crecer.

La manera natural de llegar a la construcción de un simbolismo, me parece, ser la siguiente: al emprender una investigación valiéndose del lenguaje común, uno siente que el carácter amplio, oscuro e impreciso de la lengua se



presenta como un obstáculo y para remediarlo, se crea un lenguaje simbólico en el cual la investigación pueda ser llevada a cabo de manera más clara y con mayor precisión. Por lo tanto, primero nace la necesidad y solo después su satisfacción. El enfoque opuesto, el crear primero un simbolismo y luego buscar una aplicación para el mismo, parece ser menos productivo. El simbolismo de Boole, Schröder, y Peano ha seguido esta ruta.

Espero no haberlo aburrido con estas explicaciones. Quedo, sinceramente suyo,

Dr. G. Frege



**Fig. 10:** Detalle de *No perfil*,  
de Cesar Cabrera.

La presente es en realidad el borrador inconcluso de lo que quizá fue la primera carta de Frege al matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Escrita probablemente antes de 1894, la carta expone de manera breve una comparación entre sus respectivos sistemas lógicos. Si bien Peano y sus colaboradores hicieron uso del simbolismo lógico para su *Formulario matemático* e hicieron notables contribuciones a la metamatemática, en ningún momento asumieron el enfoque logicista e incluso se opusieron abiertamente a ese proyecto.

### De Frege a Peano (sin fecha)

Querido colega:

Sus artículos y su tarjeta postal me han dado un gran placer y le agradezco mucho por ello. Por desgracia no domino el italiano pero aún así he intentado comprender sus trabajos y me parece que he conseguido captar lo esencial de su notación. Espero leer cada vez más el italiano y por consiguiente espero con placer el paquete prometido y le doy las más sentidas gracias por anticipado.

Advierto que usted sigue a Boole, pero usa otros signos e intenta hacer más productiva a esta lógica en las matemáticas. También ha encontrado necesario introducir una designación para la generalidad ( $\supset x, y, = x, y$ )<sup>1</sup> y usarlos para nuestro “hay...” (de existencia). Compárelo con mi ‘ $\exists^{\alpha} \exists^{\alpha} (\alpha^2 = 1)$ ’ (hay raíces cuadradas de 1). Este acuerdo sustancial expresado de forma completamente diferente es particularmente valioso para mí dado que entre la gran mayoría de lo lógico parece predominar una gran falta de claridad sobre la naturaleza de los juicios de existencia, lo cual es cierto tanto con respecto a los seguidores de Boole como para los lógicos psicólogos, aun cuando Kant parece estar en la dirección correcta con respecto a su crítica al argumento ontológico sobre la existencia de Dios. Si bien su forma de designar la generalidad pone remedio a

<sup>1</sup> De acuerdo con la edición original se ha sustituido el signo  $\supset$ , empleado por ambos autores en su correspondencia, por el signo  $\supset$ , ya que Peano lo sustituye en sus escritos posteriores.



un defecto grave de la lógica de Boole, de cualquier manera, es menos aplicable que el mío y desconozco si usted será capaz de fijar los límites del alcance de la generalidad en todos los casos. Usted usa las letras  $x$  y  $y$  para restringir la generalidad de una parte de la proposición, i.e., mientras que yo empleo caracteres góticos (alemanes). Pero si el alcance de la generalidad cubre la totalidad, usted echa mano de otras letras latinas, tal y como lo hago yo. Por lo tanto, la afirmación P6 en la sección 2 de su artículo “*Sobre el concepto de número*” debe ser valida en general para cualquiera. Desde luego, cuando explica sus signos sin aplicarlos aún, emplea las letras latinas de otro modo, mientras que yo uso letras griegas mayúsculas, aunque este es un asunto secundario.

Estrechamente relacionada con la generalidad se encuentra mi aplicación extendida de la representación de la función por medio de las letras  $f$ ,  $F$ , etc. y me parecer que usted terminará haciendo lo mismo si es que no lo está haciendo ya. Por tanto, su expresión ‘ $f(x) \supset_x F(x)$ ’ correspondería a mi fórmula

$$\neg \bigcup^{\alpha} F(a) \subset f(a)$$

Me parece igualmente de suma importancia que usted establezca una distinción precisa entre afirmaciones particulares y universales por medio de los signos  $\epsilon$  y  $\supset$ , ya que las relaciones de un objeto (individual) y un concepto bajo el cual cae y a la clase a la cual pertenece son desde luego muy diferentes a las relaciones entre un concepto y un concepto de orden superior o el de una clase con respecto a una clase más amplia. Tales diferencias pasan inadvertidas para muchos pensadores, incluido el señor Dedekind en su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* Su importancia se vuelve patente cuando entran en consideración clases y conceptos vacíos. Debido a esta distinción deben ser reconocidos y de hecho usted lo hace al emplear el signo  $\Lambda$ . Desde luego, no se debe asumir una clase como compuesta por los objetos (individuos, entidades) que le pertenecen, pues al eliminar los objetos también habría que eliminar la clase constituida por ellos. En cambio, se puede conformar la clase por sus características distintivas, i.e., las propiedades que un objeto debe poseer para pertenecer a ella. Entonces, puede ocurrir que las propiedades se contradicen entre sí o que no haya objeto que las posea juntas. La clase es por consiguiente vacía, sin por ello ser cuestionable desde el punto de vista lógico. Ahora bien, de la afirmación singular ‘Uno es la raíz a la cuarta de uno’ ( $\vdash 1^4 = 1$ ) se puede inferir ‘hay raíces a la cuarta de uno’ ( $\vdash \bigcup^{\alpha} \alpha^4 = 1$ ), pero de la afirmación universal ‘todas las raíces cuadradas de uno son raíces a la cuarta de uno’...



La presente carta es la primera reacción al manuscrito que Wittgenstein hizo llegar a Frege para conocer su opinión al finalizar la Gran Guerra. Parte del equívoco inicial se debe al título mismo *Abhandlung* cuyo sentido académico se aparta en mucho del estilo y el formato de lo que se llamaría más tarde *Tractatus logico-philosophicus*. Para Ray Monk (*Ludwig Wittgenstein. El deber de un genio*, 162), biógrafo de Wittgenstein, la carta se “preocupa más de la terminología que de la sustancia”, lo cual pierde de vista lo expuesto por Frege en su célebre ensayo “Über Sinn und Bedeutung”.

28.06.1919

### **De Frege a Wittgenstein**

Querido amigo,

Sin duda ha tenido que esperar por un tiempo prolongado una respuesta de mi parte y, en particular, mis comentarios sobre el tratado que me ha hecho llegar. Al respecto me siento en deuda con usted y por consiguiente espero contar con su indulgencia. Recientemente he tenido que sobrellevar una pesada carga con asuntos tediosos que me quitan mucho tiempo debido a que no estoy acostumbrado a ocuparme de esas cosas. Esto me ha impedido dedicarme plenamente a estudiar su tratado y, por consiguiente, desafortunadamente es posible que le ofrezca un juicio no del todo bien fundado. Debo decir que lo encuentro difícil de comprender debido a que usted en la mayoría de las ocasiones coloca sus afirmaciones una tras otra sin ninguna justificación ulterior o, al menos, sin una justificación suficientemente detallada. Con frecuencia, por tanto, no sé si debo estar de acuerdo con usted dado que el sentido de sus afirmaciones no es lo suficiente claro para mí. Con seguridad, su sentido sería mucho más claro con una justificación más detallada. Por lo general, el lenguaje coloquial es demasiado vacilante para ser apropiado, como debe serlo, para tratar con dificulta-



des lógicas y epistemológicas. Me parece que las elucidaciones son necesarias para hacer el sentido más preciso, pero desde el inicio usted se vale de varias palabras sobre cuyos sentidos evidentemente mucho depende.

Desde el principio me encuentro con expresiones como “ser el caso” y “hecho” y conjeturo que ser el caso y ser un hecho son lo mismo. El mundo es todo aquello que es el caso y el mundo es la totalidad de los hechos. Pero, ¿si no todo hecho es el caso, y si no cuál caso es un hecho?, ¿No es lo mismo cuando digo, sea A un hecho, como cuando digo, sea A el caso? ¿Cuál es el propósito de esta doble expresión? Desde luego, todo triángulo equilátero es un triángulo equiangular y todo triángulo equiangular es un triángulo equilátero, pero el sentido de la primera expresión no coincide con el de la segunda. Es un teorema el que todo triángulo equilátero sea un triángulo equiangular, dado que las expresiones “triángulo equilátero” y “triángulo equiangular” son expresiones compuestas y de sus diferencias de composición resultan sus diferencias de sentido. En cuanto a sus expresiones, sin embargo, no contamos con esto. ¿Podemos decir que el sentido de la expresión “ser el caso” es el resultado de su composición?, ¿Hay un teorema que establezca que ser el caso, es un hecho? Pienso que no y tampoco podría considerarlo un axioma, pues me parece que no comporta conocimiento alguno. Aun así, una tercera expresión aparece: “Lo que es el caso, el hecho, es la existencia de hechos atómicos”. Por esto entiendo que todo hecho es la existencia de un hecho atómico, de modo que un hecho distinto es la existencia de un hecho atómico distinto.

¿No se podrían cambiar las palabras “La existencia de” y decir, “Todo hecho es un hecho atómico, y todo hecho distinto es un hecho atómico distinto”. Y quizá también se podría decir “Todo hecho atómico es la existencia de un hecho”? Como puede ver, me encuentro desde el inicio enredado en dudas sobre lo que usted quiere decir y, en consecuencia, no logro progreso alguno. En el presente me siento con frecuencia agotado y esto también contribuye a dificultad mi comprensión. Espero que no tome estas observaciones de manera inapropiada, sino por el contrario, como un estímulo para hacer de la manera de expresión de su tratado más fácil de entender. Cuando son tantas las cosas que dependen de la precisa comprensión del sentido, no se debe esperar mucho del lector. Me parece que el uso de expresiones distintas con el mismo sentido es en sí mismo nocivo, de modo que cuando a pesar de ello se insiste con el propósito de conseguir algo especial, no se debería dejar al lector en duda acerca de esto último. Cuando el lector pueda, sin embargo, en oposición a la intención del autor, combinar dos expresiones distintas con el mismo sentido, el escritor debería establecer la diferencia de sentido y buscar la manera



más clara posible en dónde subyace. ¿Existen también hechos atómicos que no existen?, ¿Cualquier combinación de objetos constituye un hecho atómico? ¿Carece de importancia la forma como se produce esas combinaciones?, ¿Qué es aquello que liga los objetos? ¿A caso puede ser algo así como una fuerza gravitacional como ocurre en el sistema planetario?, ¿Es esto un hecho atómico? Usted escribe: "Es esencial de una cosa el que pueda ser una parte constitutiva de un hecho atómico". ¿Puede ahora ser también una cosa un constituyente de un hecho? La parte de una parte es parte de un todo. Si una cosa es un constituyente de un hecho y todo hecho una parte del mundo, entonces la cosa es también parte del mundo. Para alcanzar una mayor comprensión me gustaría poder contar con ejemplos y así poder apreciar lo que lingüísticamente corresponde con el hecho, con el hecho atómico y con el estado de cosas; es decir, cómo un hecho, un hecho atómico tanto existente como inexistente se encuentran lingüísticamente indicados y cómo la existencia de un hecho atómico, y por ende, de un hecho se halla señalada; si es que existe una distinción esencial como resultado entre un hecho atómico y un hecho. Quiero ahora usar como ejemplo la afirmación de que el Vesubio es un constituyente de un hecho atómico. Entonces al parecer los constituyentes del Vesubio deben ser también constituyentes de este hecho y, por consiguiente, el hecho consistiría también de magma endurecida. Pero esto no me parece correcto.

En cualquier caso, quiero dejar constancia con estas líneas como tributo a nuestra amistad, a pesar de mi temor por haberlo acosado con preguntas entrometidas. Disculpe esto y conserve su amistad con quien piensa con frecuencia en usted.

Suyo,

G. Frege

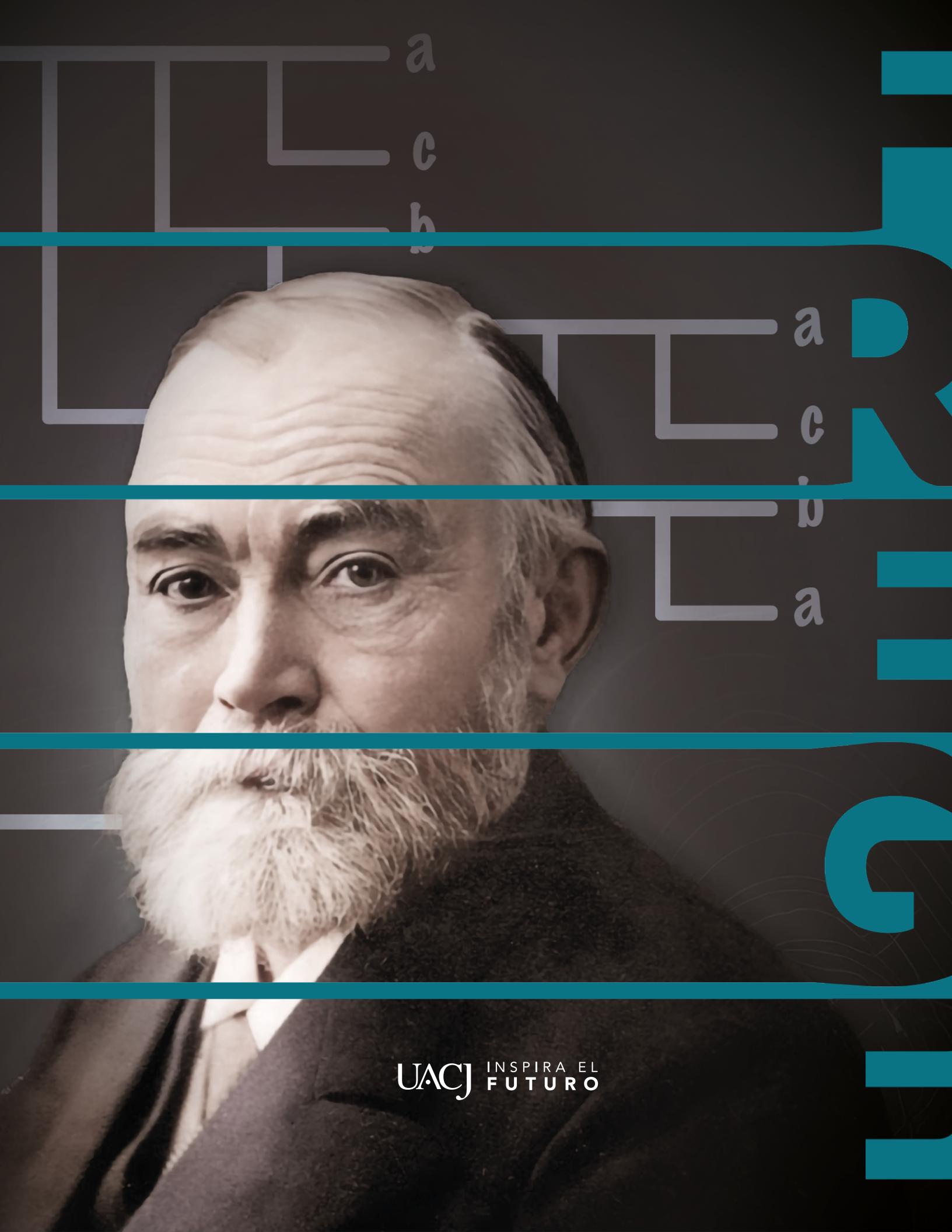


# Obras de Frege utilizadas en este número especial

- (1879), *Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*. En Frege (2016), 39-153 y Frege (1972).
- (1884), "La justificación científica de una conceptografía", en Frege (2016), 155-161 y en Frege (1972), 209-214.
- (1891), "Función y concepto", en Frege (2016), 225-248; Frege (1998), 53-79; Frege (1974), 11-30; Frege (1972), 215-235; Frege (1971), 18-48.
- (1891-1906), Correspondencia con Husserl. En Frege (1998), 80-83 y 188-195.
- (1894), Recensión de E. G. Husserl *Philosophie der Arithmetik*. En Frege 1998, 140-159.
- (1892), "Sobre sentido y referencia", en Frege (2016), 249-275; Frege (1998), 84-111 y como "Sobre sentido y significado" en Frege (1974), 31-52.
- (1892a), "Sobre concepto y objeto", en Frege (2016), 277-292; Frege (1998), 123-139; Frege (1974), 60-72; Frege (1972), 237-250; Frege (1971), 105-125.
- (1906), "Introducción a la lógica", en Frege (1998), 171-187 y Frege (2016), 181-190 [Selección].
- (1918), "El pensamiento: una investigación lógica", en Frege (1974), 136-157; Frege (1984), 49-85; Frege (1998), 171-187 y Frege (2016), 181-190.
- (1918a), "La negación: una investigación lógica", en Frege (1974), 158-174; Frege (1998), 226-247 y en Frege (1984), 86-113.
- (1923), "Investigaciones lógicas (tercera parte): composición de pensamientos", en Frege (1974), 175-194; Frege (1984), 114-144 y en Frege (1998), 248-274.
- (1971). *Estudios sobre semántica*. Introducción de Jesús Mosterín y traducción de Carlos U. Moulines, Barcelona: Ariel. Reimpreso por ediciones Orbis en 1984.

- 
- (1972). *Conceptografía, Los fundamentos de la aritmética y otros estudios filosóficos*. Traducción de Hugo Padilla, México: Universidad Nacional Autónoma de México.
  - (1972a). *Fundamentos de la aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Con un estudio de Claude Imbert, prólogo de J. Mosterín y traducción de Carlos U. Moulines, Barcelona: Laia.
  - (1974). *Escritos logico-semánticos*. Carlos Luis y Carlos Pereda. Madrid: Tecnos.
  - (1984). *Investigaciones lógicas*. Traducción y presentación de L. M. Valdés Villanueva. Madrid: Tecnos.
  - (1996), “Diálogo con Pünjer sobre la existencia”, traducción de Juan José García Norro, excerpta philosophica 17, Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense.
  - (1997), “Diario (10 de marzo a 9 de mayo de 1924)”, introducción y traducción de L. M. Valdés Villanueva, *Teorema* 16: 5-45. En línea vía Dialnet.
  - (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Edición, introducción, traducción y notas de L. M. Valdés Villanueva. Madrid: Tecnos.
  - (2016). *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas*. Selección de M. Ezcurdia, M. Gómez Torrente y M. Valdés, y traducciones de Xavier de Donato, C. U. Moulines, Hugo Padilla y Carlos Pereda.
  - (2016a), “El lenguaje de fórmulas lógico de Boole y mi conceptografía”, traducción y prólogo de Xavier de Donato Rodríguez. *Cuadernos de Crítica*, UNAM.





UACJ INSPIRA EL  
FUTURO