

Tres cartas de Gottlob Frege

La presente carta al matemático David Hilbert (1862-1943) abre la correspondencia inmediatamente después de un primer acercamiento personal durante un congreso de matemáticos celebrado en Lübeck. Hilbert era catorce años menor que Frege y en ese año había conseguido una posición como matemático en la Universidad de Gottinga. El tema de la carta sugiere una prolongación del tema que Frege expuso en dicho encuentro, seguramente relacionado con el perfeccionamiento de la conceptografía y su aplicación a la aritmética, dado que dos años antes había aparecido el primer volumen de su *Grundgesetze*. Si bien la carta muestra de manera indirecta el interés temprano de Hilbert por los problemas de fundamentación, nada permite advertir la axiomatización de la geometría que llevará a cabo pocos después y que desató la disputa con Frege.

Jena, 1 de octubre de 1895

De Frege a Hilbert

Querido colega,

Si recuerdo bien, usted me dijo en Lübeck que estaba intentando reducir más que incrementar la formalización en matemáticas. Dado que fuimos interrumpidos en nuestra conversación, quisiera exponerle mi posición por escrito.



42

Lo que es fundamental en el tema no es, me parece, el contraste entre la lengua y el sistema de símbolos, sino si uno debe emplear métodos y teoremas con un alcance limitado o amplio. Este contraste parece coincidir con el primero solo si hasta el momento no existe un simbolismo adecuado para los

métodos que usted suele preferir: aquellos de alcance amplio. Pero cuando la línea de pensamiento puede expresarse perfectamente en símbolos, esta debe aparecer de manera más perspicua y breve que en su forma verbal. Aquí asumo que se trata en realidad de la misma línea de pensamiento y que uno no está siguiendo un método enteramente diferente, pues solo entonces puede llevarse a cabo la comparación. Las ventajas de la precisión y lo perspicuo son tan grandes que muchas investigaciones no podrían llevarse a cabo sin un lenguaje de signos matemáticos. Actualmente puede ocurrir que, en la medida que la ciencia logra mayores avances, el mismo resultado pueda alcanzarse más fácil y más adecuadamente de diferentes formas, con o sin un uso limitado de símbolos. Aunque si el lenguaje de signos ha sido perfeccionado al punto que pueda expresar una nueva línea de pensamiento, este parecerá más perspicuo en símbolos que en forma verbal.

Más aun, el uso de símbolos no debe ser entendido como un procedimiento mecánico e irreflexivo, aunque el peligro de caer en un simple mecanismo de fórmulas es más inmediato aquí que al usar el lenguaje verbal. Uno puede pensar también con símbolos. Una operación meramente mecánica con fórmulas es peligrosa (1) para la verdad de los resultados y (2) para la fecundidad de la ciencia. El primer peligro puede evitarse casi por completo por medio de un sistema de signos lógicamente perfecto. En cuanto al segundo peligro, la ciencia puede caer en un estancamiento si el mecanismo de fórmulas se convierte tan rampante como para suprimir todo pensamiento. Sin embargo, no quisiera considerar semejante mecanismo como algo completamente estéril o dañino. Por el contrario, considero que este es necesario. El curso natural de los acontecimientos parece haber sido el siguiente: Lo que original se encontraba saturado con una carga mental con el tiempo se convirtió en un mecanismo que parcialmente exime al científico de la actividad del pensar. De igual modo, al interpretar una pieza musical, una serie de procesos que fueron originalmente conscientes debieron de volverse inconscientes y mecánicos para que el artista, liberado de esas cosas, pueda poner su sentimiento en la ejecución. Quisiera ahora comparar esto con el proceso de significación. Mientras crece un árbol su consistencia ha de ser suave y fresca, pero si lo que era tronco fresco con el tiempo no se convierte en madera, el árbol no alcanzará una altura significativa. Por otra parte, cuando todo lo que era verde se vuelve madera, el árbol deja de crecer.

La manera natural de llegar a la construcción de un simbolismo, me parece, ser la siguiente: al emprender una investigación valiéndose del lenguaje común, uno siente que el carácter amplio, oscuro e impreciso de la lengua se



presenta como un obstáculo y para remediarlo, se crea un lenguaje simbólico en el cual la investigación pueda ser llevada a cabo de manera más clara y con mayor precisión. Por lo tanto, primero nace la necesidad y solo después su satisfacción. El enfoque opuesto, el crear primero un simbolismo y luego buscar una aplicación para el mismo, parece ser menos productivo. El simbolismo de Boole, Schröder, y Peano ha seguido esta ruta.

Espero no haberlo aburrido con estas explicaciones. Quedo, sinceramente suyo,

Dr. G. Frege



Fig. 10: Detalle de *No perfil*,
de Cesar Cabrera.

La presente es en realidad el borrador inconcluso de lo que quizá fue la primera carta de Frege al matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Escrita probablemente antes de 1894, la carta expone de manera breve una comparación entre sus respectivos sistemas lógicos. Si bien Peano y sus colaboradores hicieron uso del simbolismo lógico para su *Formulario matemático* e hicieron notables contribuciones a la metamatemática, en ningún momento asumieron el enfoque logicista e incluso se opusieron abiertamente a ese proyecto.

De Frege a Peano (sin fecha)

Querido colega:

Sus artículos y su tarjeta postal me han dado un gran placer y le agradezco mucho por ello. Por desgracia no domino el italiano pero aún así he intentado comprender sus trabajos y me parece que he conseguido captar lo esencial de su notación. Espero leer cada vez más el italiano y por consiguiente espero con placer el paquete prometido y le doy las más sentidas gracias por anticipado.

Advierto que usted sigue a Boole, pero usa otros signos e intenta hacer más productiva a esta lógica en las matemáticas. También ha encontrado necesario introducir una designación para la generalidad ($\supset x, y, = x, y$)¹ y usarlos para nuestro “hay...” (de existencia). Compárelo con mi ‘ $\exists^{\alpha} \exists^{\alpha} (\alpha^2 = 1)$ ’ (hay raíces cuadradas de 1). Este acuerdo sustancial expresado de forma completamente diferente es particularmente valioso para mí dado que entre la gran mayoría de lo lógico parece predominar una gran falta de claridad sobre la naturaleza de los juicios de existencia, lo cual es cierto tanto con respecto a los seguidores de Boole como para los lógicos psicólogos, aun cuando Kant parece estar en la dirección correcta con respecto a su crítica al argumento ontológico sobre la existencia de Dios. Si bien su forma de designar la generalidad pone remedio a

¹ De acuerdo con la edición original se ha sustituido el signo \supset , empleado por ambos autores en su correspondencia, por el signo \supset , ya que Peano lo sustituye en sus escritos posteriores.



un defecto grave de la lógica de Boole, de cualquier manera, es menos aplicable que el mío y desconozco si usted será capaz de fijar los límites del alcance de la generalidad en todos los casos. Usted usa las letras x y y para restringir la generalidad de una parte de la proposición, i.e., mientras que yo empleo caracteres góticos (alemanes). Pero si el alcance de la generalidad cubre la totalidad, usted echa mano de otras letras latinas, tal y como lo hago yo. Por lo tanto, la afirmación P6 en la sección 2 de su artículo “*Sobre el concepto de número*” debe ser valida en general para cualquiera. Desde luego, cuando explica sus signos sin aplicarlos aún, emplea las letras latinas de otro modo, mientras que yo uso letras griegas mayúsculas, aunque este es un asunto secundario.

Estrechamente relacionada con la generalidad se encuentra mi aplicación extendida de la representación de la función por medio de las letras f , F , etc. y me parecer que usted terminará haciendo lo mismo si es que no lo está haciendo ya. Por tanto, su expresión ‘ $f(x) \supset_x F(x)$ ’ correspondería a mi fórmula

$$\neg \bigcup^{\alpha} F(a) \subset f(a)$$

Me parece igualmente de suma importancia que usted establezca una distinción precisa entre afirmaciones particulares y universales por medio de los signos ϵ y \supset , ya que las relaciones de un objeto (individual) y un concepto bajo el cual cae y a la clase a la cual pertenece son desde luego muy diferentes a las relaciones entre un concepto y un concepto de orden superior o el de una clase con respecto a una clase más amplia. Tales diferencias pasan inadvertidas para muchos pensadores, incluido el señor Dedekind en su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* Su importancia se vuelve patente cuando entran en consideración clases y conceptos vacíos. Debido a esta distinción deben ser reconocidos y de hecho usted lo hace al emplear el signo Λ . Desde luego, no se debe asumir una clase como compuesta por los objetos (individuos, entidades) que le pertenecen, pues al eliminar los objetos también habría que eliminar la clase constituida por ellos. En cambio, se puede conformar la clase por sus características distintivas, i.e., las propiedades que un objeto debe poseer para pertenecer a ella. Entonces, puede ocurrir que las propiedades se contradicen entre sí o que no haya objeto que las posea juntas. La clase es por consiguiente vacía, sin por ello ser cuestionable desde el punto de vista lógico. Ahora bien, de la afirmación singular ‘Uno es la raíz a la cuarta de uno’ ($\vdash 1^4 = 1$) se puede inferir ‘hay raíces a la cuarta de uno’ ($\vdash \bigcup^{\alpha} \alpha^4 = 1$), pero de la afirmación universal ‘todas las raíces cuadradas de uno son raíces a la cuarta de uno’...



La presente carta es la primera reacción al manuscrito que Wittgenstein hizo llegar a Frege para conocer su opinión al finalizar la Gran Guerra. Parte del equívoco inicial se debe al título mismo *Abhandlung* cuyo sentido académico se aparta en mucho del estilo y el formato de lo que se llamaría más tarde *Tractatus logico-philosophicus*. Para Ray Monk (*Ludwig Wittgenstein. El deber de un genio*, 162), biógrafo de Wittgenstein, la carta se “preocupa más de la terminología que de la sustancia”, lo cual pierde de vista lo expuesto por Frege en su célebre ensayo “Über Sinn und Bedeutung”.

28.06.1919

De Frege a Wittgenstein

Querido amigo,

Sin duda ha tenido que esperar por un tiempo prolongado una respuesta de mi parte y, en particular, mis comentarios sobre el tratado que me ha hecho llegar. Al respecto me siento en deuda con usted y por consiguiente espero contar con su indulgencia. Recientemente he tenido que sobrellevar una pesada carga con asuntos tediosos que me quitan mucho tiempo debido a que no estoy acostumbrado a ocuparme de esas cosas. Esto me ha impedido dedicarme plenamente a estudiar su tratado y, por consiguiente, desafortunadamente es posible que le ofrezca un juicio no del todo bien fundado. Debo decir que lo encuentro difícil de comprender debido a que usted en la mayoría de las ocasiones coloca sus afirmaciones una tras otra sin ninguna justificación ulterior o, al menos, sin una justificación suficientemente detallada. Con frecuencia, por tanto, no sé si debo estar de acuerdo con usted dado que el sentido de sus afirmaciones no es lo suficiente claro para mí. Con seguridad, su sentido sería mucho más claro con una justificación más detallada. Por lo general, el lenguaje coloquial es demasiado vacilante para ser apropiado, como debe serlo, para tratar con dificulta-



des lógicas y epistemológicas. Me parece que las elucidaciones son necesarias para hacer el sentido más preciso, pero desde el inicio usted se vale de varias palabras sobre cuyos sentidos evidentemente mucho depende.

Desde el principio me encuentro con expresiones como “ser el caso” y “hecho” y conjeturo que ser el caso y ser un hecho son lo mismo. El mundo es todo aquello que es el caso y el mundo es la totalidad de los hechos. Pero, ¿si no todo hecho es el caso, y si no cuál caso es un hecho?, ¿No es lo mismo cuando digo, sea A un hecho, como cuando digo, sea A el caso? ¿Cuál es el propósito de esta doble expresión? Desde luego, todo triángulo equilátero es un triángulo equiangular y todo triángulo equiangular es un triángulo equilátero, pero el sentido de la primera expresión no coincide con el de la segunda. Es un teorema el que todo triángulo equilátero sea un triángulo equiangular, dado que las expresiones “triángulo equilátero” y “triángulo equiangular” son expresiones compuestas y de sus diferencias de composición resultan sus diferencias de sentido. En cuanto a sus expresiones, sin embargo, no contamos con esto. ¿Podemos decir que el sentido de la expresión “ser el caso” es el resultado de su composición?, ¿Hay un teorema que establezca que ser el caso, es un hecho? Pienso que no y tampoco podría considerarlo un axioma, pues me parece que no comporta conocimiento alguno. Aun así, una tercera expresión aparece: “Lo que es el caso, el hecho, es la existencia de hechos atómicos”. Por esto entiendo que todo hecho es la existencia de un hecho atómico, de modo que un hecho distinto es la existencia de un hecho atómico distinto.

¿No se podrían cambiar las palabras “La existencia de” y decir, “Todo hecho es un hecho atómico, y todo hecho distinto es un hecho atómico distinto”. Y quizá también se podría decir “Todo hecho atómico es la existencia de un hecho”? Como puede ver, me encuentro desde el inicio enredado en dudas sobre lo que usted quiere decir y, en consecuencia, no logro progreso alguno. En el presente me siento con frecuencia agotado y esto también contribuye a dificultad mi comprensión. Espero que no tome estas observaciones de manera inapropiada, sino por el contrario, como un estímulo para hacer de la manera de expresión de su tratado más fácil de entender. Cuando son tantas las cosas que dependen de la precisa comprensión del sentido, no se debe esperar mucho del lector. Me parece que el uso de expresiones distintas con el mismo sentido es en sí mismo nocivo, de modo que cuando a pesar de ello se insiste con el propósito de conseguir algo especial, no se debería dejar al lector en duda acerca de esto último. Cuando el lector pueda, sin embargo, en oposición a la intención del autor, combinar dos expresiones distintas con el mismo sentido, el escritor debería establecer la diferencia de sentido y buscar la manera



más clara posible en dónde subyace. ¿Existen también hechos atómicos que no existen?, ¿Cualquier combinación de objetos constituye un hecho atómico? ¿Carece de importancia la forma como se produce esas combinaciones?, ¿Qué es aquello que liga los objetos? ¿A caso puede ser algo así como una fuerza gravitacional como ocurre en el sistema planetario?, ¿Es esto un hecho atómico? Usted escribe: "Es esencial de una cosa el que pueda ser una parte constitutiva de un hecho atómico". ¿Puede ahora ser también una cosa un constituyente de un hecho? La parte de una parte es parte de un todo. Si una cosa es un constituyente de un hecho y todo hecho una parte del mundo, entonces la cosa es también parte del mundo. Para alcanzar una mayor comprensión me gustaría poder contar con ejemplos y así poder apreciar lo que lingüísticamente corresponde con el hecho, con el hecho atómico y con el estado de cosas; es decir, cómo un hecho, un hecho atómico tanto existente como inexistente se encuentran lingüísticamente indicados y cómo la existencia de un hecho atómico, y por ende, de un hecho se halla señalada; si es que existe una distinción esencial como resultado entre un hecho atómico y un hecho. Quiero ahora usar como ejemplo la afirmación de que el Vesubio es un constituyente de un hecho atómico. Entonces al parecer los constituyentes del Vesubio deben ser también constituyentes de este hecho y, por consiguiente, el hecho consistiría también de magma endurecida. Pero esto no me parece correcto.

En cualquier caso, quiero dejar constancia con estas líneas como tributo a nuestra amistad, a pesar de mi temor por haberlo acosado con preguntas entrometidas. Disculpe esto y conserve su amistad con quien piensa con frecuencia en usted.

Suyo,

G. Frege

