Cuadernos Fronterizos
Dossier Especial 7 (noviembre, 2025). E-ISSN: 2594-0422 pp. 13-20.
Recepción: 24/11/2024 Aceptación: 28/03/2025
DOI: http://dx.doi.org/10.20983/cuadfront.2025.7de3

¿Los números fregeanos son los números de la aritmética?[1]

Alfonso Ávila del Palacio
Universidad Juárez del Estado de Durango
acavila@dgo.megared.net.mx
ORCID: 0000-0002-7507-5811

Immanuel Kant, en el apartado "Axiomas de la intuición" de la *Crítica de la razón pura* (1787), afirmó que las matemáticas, tanto la geometría como la aritmética, estaban constituidas por juicios "sintéticos *a priori*". Gottlob Frege no estuvo de acuerdo con eso y se propuso demostrar que los juicios de la matemática, particularmente los de la aritmética, eran juicios "analíticos"; donde por analíticos entiende lo mismo que lógicos. Es decir, que la aritmética no era sino lógica. Como se sabe, a eso se le llamó el *Programa Logicista*. Ahora bien, para llevar a cabo su refutación de Kant, Frege amplía primero la lógica de su tiempo en su famosa *Conceptografía*. Una vez sentada esa base, en *Los Fundamentos de la aritmética*, Frege se propuso definir el concepto de número en términos puramente lógicos, que es a la definición que nos referiremos en este artículo.

Para Frege el número es un conjunto que agrupa conceptos equinuméricos; aunque, en realidad, agrupa las extensiones de los conceptos, es decir, los conjuntos de objetos que caen bajo esos conceptos. O, con otras palabras, el número para Frege es un conjunto de conjuntos equinuméricos. Pero ¿estos nú-

[1] Este artículo es una actualización de un fragmento del capítulo 4 de mi libro *Vigencia de la definición fregeana de número*. México, Plaza y Valdés, 2014.

meros son realmente los mismos números de la aritmética? En primer lugar, los números fregeanos, que examinaremos a partir de la versión de Russell como clases de clases, o conjuntos de conjuntos en la versión de John von Neumann, parecen muy artificiales y más complicados que los números de la aritmética. Mientras que podemos sumar muy fácilmente dos números aritméticos, cuando queremos sumar dos números fregeanos, necesitamos hacer varias operaciones complicadas. Para sumar en la versión de Russell la clase de todos los pares con la clase de todos los tríos, debemos escoger un elemento de la primera clase y escoger otro elemento de la segunda clase que cumplan ciertas condiciones: básicamente, que ambos elementos sean disyuntos y agrupen elementos del mismo tipo. Una vez que hemos seleccionado de esa forma un par de la primera clase y un trío de la segunda, los juntamos y obtenemos un conjunto con cinco elementos del mismo tipo. Finalmente, formamos una nueva clase con todos los conjuntos que sean equinuméricos con ese conjunto de cinco elementos. Esta clase es el resultado de la suma.

De forma similar, la suma de números en la versión de von Neumann (1923/1967) es igualmente complicada. ¿Cuántos pasos debo dar para obtener la siguiente suma: {{}, {{}}} + {{}{{}} {{} {{}}}}? Muchos. No podemos únicamente juntar los elementos del conjunto que representa el numero dos con los elementos del conjunto que representa el número tres como lo hacemos con los unos que forman los números de la aritmética. En esta, si 2 = 1+1, y 3 = 1+1+1, podemos sumar 2 + 3 juntando los unos: 1+1+1+1+1 = 5. Así pues, la diferencia entre los números fregeanos y los números de la aritmética nos sugiere que, ontológicamente, no son las mismas entidades.

Por otra parte, al revisar algunas de las objeciones que se le han presentado a la definición de Frege, nos preguntamos si el número está siempre asociado a ciertos conceptos, como propone Frege. Esto nos enfrenta con la propuesta de Dedekind (1888/2014) y otros, quienes definen el número en términos puramente estructurales, como lugares en una serie. Contrario a eso, la definición fregeana muestra que los números pueden definirse en términos no estructurales; es decir, podemos definir cada número ligándolo con ciertos conceptos sin hacer alusión a los otros números, cada uno de los cuales estaría ligado a determinados conceptos específicos sin necesidad de relacionar los números entre sí. Eso le daría la razón a Frege cuando afirma que los números son algo más que lo puramente estructural, es decir, son algo más que lugares en una serie.

La definición de Frege dice que un número es un conjunto (o “extensión”, en sus términos). Frente a eso, nos preguntamos en qué sentido podría ser válida la caracterización de los números en términos de conjuntos. Al revisar las diferentes definiciones de lo que es un conjunto a partir de la propuesta de Cantor (1883/2006), llegamos a la conclusión que hay diferentes formas de definir el término ‘conjunto’. Entonces ¿cuáles conjuntos son los números? Esta pregunta nos refuerza en la idea de que los números freganos son diferentes a los números aritméticos. En este sentido, podemos decir que los números aritméticos no son conjuntos; pero, tal vez, podemos hacer una descripción de ellos en términos de conjuntos, especificando, claro está, cómo estamos entendiendo el término ‘conjunto’.

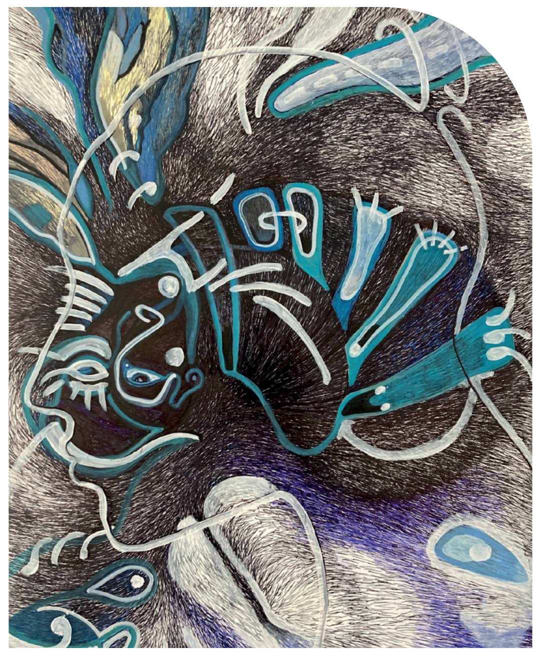


Fig. 4: Detalle de *Falso perfil*, de César Cabrera.

Ahora bien, Frege afirma que el número que corresponde al concepto F es específicamente la extensión del concepto “equinumérico con respecto al concepto F”. Eso nos enfrenta con las famosas objeciones de Paul Benacerraf (1965). Frente a las cuales, mi solución es que, en efecto, los números aritméticos no son conjuntos y menos ciertos conjuntos específicos, porque Benacerraf mostró que podían darse definiciones de números en términos de diferentes conjuntos. Pero, siguiendo la idea del párrafo anterior, podemos, tal vez, caracterizar o explicar los números aritméticos en términos de conjuntos y, claro, también en términos de conjuntos específicos. Por cierto, el argumento de Benacerraf de que podemos tener definiciones de números en términos de diferentes conjuntos, refuerza la idea de que esas definiciones son solo diferentes descripciones de los números aritméticos propiamente dichos.

En *Las leyes fundamentales de la aritmética*, Frege pretendió probar que su definición de número era la correcta al desprender de ella las leyes más conocidas de los números de la aritmética. Ahora bien, hay que tomar en cuenta lo que es una axiomatización de la aritmética a partir de las ideas de David Hilbert: “De hecho, algunas de las dificultades en la fundación de la aritmética son de naturaleza diferente de aquellas que tienen que ser superadas cuando se establece la fundación de la geometría.” (1904/1967, 130).

Regresar al índice

Además, hay que revisar también las objeciones de Kurt Gödel a las axiomatizaciones de la aritmética. Como se sabe, Gödel (1931/1981) probó que la aritmética que podemos encerrar en un sistema axiomático es incompleta, ya que hay afirmaciones que se pueden formular dentro de ella, pero no podemos deducirlas de ningún grupo finito de axiomas. La conclusión de este análisis es que a toda axiomatización se le escapa algo y, por tanto, no podemos identificar los números aritméticos con ninguna axiomatización que se haga de ellos. Dichas axiomatizaciones tendrán que verse, más bien, como una ordenación de lo que se considera más fundamental de los números. Esto refuerza una vez más la idea de distinguir entre los números de la aritmética y aquellos construidos en las axiomatizaciones metamatemáticas. De manera que lo único que prueba Frege en *Las leyes de la aritmética* es que sus "números", que están ligados a conceptos, se comportan como los "números" que describe el sistema axiomático del matemático italiano Giussepe Peano (1889); ambos de los cuales son en realidad, según nuestra interpretación, imágenes, tal vez, explicativas de los números aritméticos propiamente dichos.

Frege criticó duramente la propuesta empirista de John S. Mill (1874); pero, por otra parte, propone a semejanza de este que los números tienen que ver con algo extra-matemático. De ahí que es necesario examinar algunas propuestas empiristas modernas para ver los coincidencias y discrepancias de Frege con el empirismo. Los autores que examinaremos aquí brevemente son Ludwig Wittgenstein, Maurice Fréchet, Imre Lakatos y Philip Kitcher.

Wittgenstein, seguidor de Frege en varios puntos, ve los números ligados al lenguaje como Frege, pero no solo a los conceptos, sino a las proposiciones en general. Las proposiciones, a su vez, según Wittgenstein, son imágenes de los hechos. El número para Wittgenstein es el exponente de una operación con proposiciones; es una imagen que nos indica que dicha operación puede repetirse,[2] y eso nos indica que podemos tener varias imágenes de un mismo hecho al escribir P = P' = P'', etcétera. Los hechos no son nunca iguales; pero, al decir que P = P', estamos diciendo que las expresiones P y P' refieren a un mismo hecho, o bien, que son dos imágenes de un mismo hecho. En estos términos, yo diría que frente a los números aritméticos, podemos tener varias imágenes de ellos: las construidas por Frege, Russell, Dedekind o Peano, entre otras. Pero también podemos ver los números aritméticos, a su vez, como imágenes de algo más cercano a lo empírico: en el famoso *Tractatus*, Wittgenstein sostiene

[2] En todo este texto entiendo por 'imagen' una representación o descripción teórica de un concepto o idea, es decir, una especie de retrato o pintura que esté en lugar de algo también teórico y que nos lo explique de cierta forma.

Regresar al índice

que son las proposiciones, o más bien, las operaciones que podemos hacer con las proposiciones; yo diría que son los conceptos “par”, “trío”, etcétera.

Fréchet ve una conexión más directa entre las matemáticas y el mundo empírico al decir que los números y las matemáticas en general son representaciones esquemáticas cada vez más simplificadas del mundo sensible. “Acaso un entero, por su representación en cifras, no es la expresión esquemática de una característica común a varias colecciones”, dice Fréchet (1958, 28). Esto refuerza la idea de que los números matemáticos pueden verse como imágenes o representaciones esquemáticas de ciertos fenómenos no matemáticos, los cuales están más ligados a lo empírico o son francamente empíricos, según Fréchet. En ese sentido, Fréchet le da la razón a Frege, en tanto que este sostenía que los números tienen que verse no solo matemáticamente, sino también en su uso en expresiones que refieren a lo empírico como “3 caballos”.

Lakatos (1981), por su parte, sostiene que la evidencia crucial a favor de los axiomas conjuntísticos era que la matemática clásica podía ser explicada, aunque ciertamente no probada por dichos axiomas. Esto es así porque los axiomas no fijan condiciones que deberían cumplir las teorías informales para que puedan ser juzgadas por ellos; sino que tan solo pretenden recoger, siempre conjeturalmente, lo esencial de dichas teorías informales. De esa forma, las reconstrucciones conjuntistas de la aritmética de Frege y Russell pueden ser refutadas, según Lakatos, porque no son construcciones arbitrarias, sino que pretenden que de sus axiomas se obtengan verdades análogas a las verdades aritméticas informales. Esto implica que Lakatos distingue entre la aritmética informal, yo diría los números aritméticos y las reconstrucciones axiomáticas que se han hecho de ellos, es decir, los números metamatemáticos. Por supuesto, Lakatos no dice que las reconstrucciones axiomáticas de los números sean números metamatemáticos, pero sí las distingue de los números descritos y usados en la aritmética ordinaria.

Kitcher (1984), uno de los más destacados empiristas de la actualidad, está en contra del apriorismo de Frege y Hilbert y a favor de un empirismo como el de J. S. Mill. Este había reconocido que es necesario que 1 = 1 para que se cumplan las leyes de la aritmética y de las cantidades en general; mientras que en el mundo empírico una unidad es siempre diferente de cualquier otra. Esto implica que las matemáticas hablen de objetos ideales, los cuales pueden verse como imágenes de los objetos sensibles. En ese sentido, las leyes de la aritmética son generalizaciones de la experiencia de separar y juntar. Todo esto lo traduce Kitcher diciendo que aprendemos la estructura aritmética de la realidad observando los resultados de nuestras acciones de combinar y separar objetos. A semejanza de Frege, que basa su reconstrucción en las nociones lógicas de “concepto” y “relación”, Kitcher presenta una axiomatización de su aritmética apoyado en las nociones de “coleccionar” y “correlacionar”. Para Kitcher, los números son actividades y no conceptos o conjuntos. Esto lo acerca a la visión de Wittgenstein, quien habla de los números en términos de operaciones y a Fréchet con su visión de los números como idealizaciones de lo empírico. La postura de Kitcher se opone a la de Frege en tanto que concibe los números como producto de la actividad empírica de manipulación de objetos, pero coincide con este en la idea de que los números son algo más que lo puramente estructural o matemático, y en que las nociones de concepto y relación son fundamentales para definir los números. Los empiristas, al menos claramente Mill, Fréchet y Kitcher, piensan que las matemáticas en general y los números en particular son imágenes ideales que intentan recoger algún aspecto de lo empírico. Frege y Wittgenstein piensan que la relación de los números con lo empírico se da, en todo caso, a través del lenguaje como mediador. Para estos, los números refieren al lenguaje, no a las cosas; mientras que, para los primeros, los números refieren directamente a lo empírico.

Ahora bien, ¿la aritmética será el producto de una matematización de algún dominio empírico? Aun cuando es sugestiva la propuesta de Fréchet y Kitcher de que sí es el caso, no creo que tengamos elementos suficientes para decir que los números aritméticos surgieron cuando se realizó una matematización sobre los pares y tríos concretos. Aunque admito, por otra parte, que una vez que tenemos los pares y tríos y los números aritméticos, cualquiera que haya sido el origen de ambos, podríamos ver los números aritméticos como imágenes de los pares y tríos empíricos.

Así pues, lo que podemos concluir de la presente reflexión es que la propuesta fregeana tiene varias virtudes si la vemos como una imagen de los números de la aritmética. Esto está fundamentado en la idea de que hay tres clases de entidades parecidas: los pares, tríos, etc., los números propiamente aritméticos y las imágenes metamatemáticas que se ha hecho de los números aritméticos. Haciendo esta distinción conceptual, se logra entender gran parte de la discusión de las diferentes corrientes en filosofía de las matemáticas, y permite ubicar las afirmaciones, muchas veces contradictorias, acerca de los números. Viendo las cosas desde este ángulo, Frege, Russell, Dedekind y Peano, entre otros, crearon imágenes metamatemáticas de los números aritméticos; por otra parte, tenemos los números 1, 2, 3 que se trabajan en la aritmética y que son los números matemáticos propiamente dichos; y, por último, tenemos los conceptos “par”, “trío”, “cuarteto”, etcétera, que agrupan pares, tríos y cuartetos de cosas incluso empíricas. Aquí estoy proponiendo que los números metamatemáticos son imágenes explicativas de los números aritméticos, y estos, hayan o no surgido como imágenes explicativas de algo empírico, ciertamente pueden verse como imágenes idealizadas de los pares, tríos, etc.

REFERENCIAS

Ávila, A. (2014). *Vigencia de la definición fregeana de número*. México: Plaza y Valdés

Benacerraf, P. (1965), “What numbers could not be?”, en Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.). *Philosophy of Mathematics* (1983). New York: Cambridge University Press, 272-294.

Cantor, George (1883/2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Edición de José Ferreirós, traducción de J. Ferreirós y E. Gómez-Caminero, Barcelona: Crítica.

Dedekind, R. (1888/2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Edición y traducción de José Ferreirós, Madrid: Alianza-Universidad Autónoma de Madrid.

Fréchet, M. (1958). *Las Matemáticas y lo Concreto.* Traducción de Gustavo Machado, UNAM, México.

Gödel, K. (1931/1981), “Sobre fórmulas formalmente indecibles de Principia Mathematica y sistemas afines”, en *Obras Completas,* edición y traducción de Jesús Mosterín, Madrid: Alianza Editorial.

Heijenoort, J. v. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931.* Cambridge Massachusetts: Harvard University Press.

Hilbert, D. (1904/1967), “On the foundations logic and arithmetic”, en Heijenoort (ed.) (1967), 129-138.

— (1927), “The foundations of mathematics”, en Heijenoort (ed.) (1967), 464-479.

Kant, Immanuel (1787). *Crítica de la Razón Pura.* Traducción de José del Perojo. Buenos Aires: Editorial Losada, 1938.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York: Oxford University Press.

Lakatos, Imre (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Editado por J. Worrall y G. Currie, Madrid: Alianza.

Mill, John S. (1874). *A System of Logic.* (8th ed.) New York: Harper.

Neumann, J. von (1923/1967), “On the introduction of transfinite numbers”, en Heijenoort (ed.) (1967), 346-354.

Peano, G. (1889), “The principles of arithmetic, presented by a new method”, en Heijenoort (ed.) (1967), 83-97.

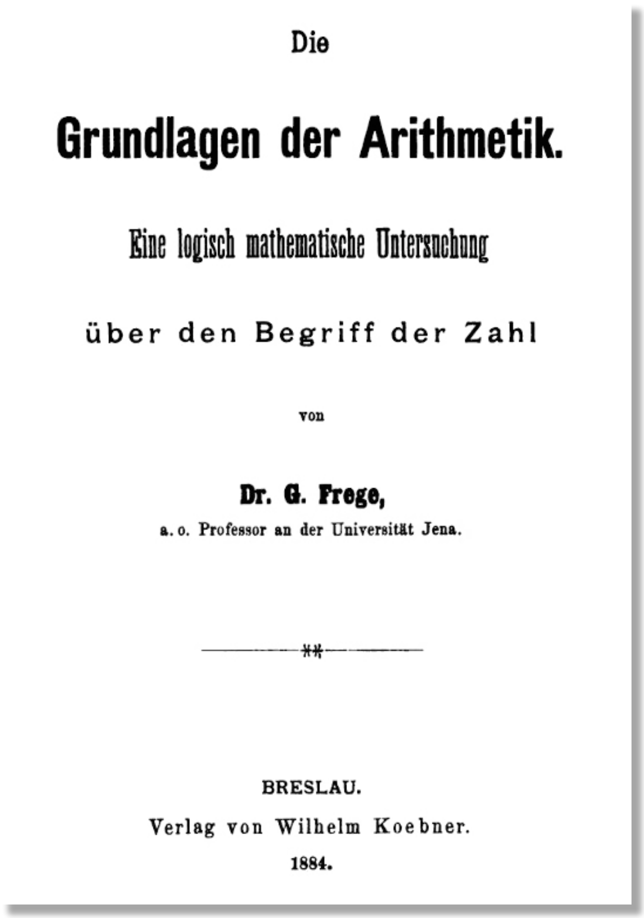
Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics.* London: George Allen and Unwin.

Russell, B. y Whitehead, A. N. (1910-13). *Principia Mathematica.* Diversas ediciones.

Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus Logico-filosófico*. Traducción de E. T. Galván, España: Alianza, 1980.

— (1958). *Investigaciones Filosóficas.* Traducción de A. García y U. Moulines. México: UNAM, 1986.

— (1967). *Remarks on the Foundations of Mathematics.* 2nd. Edition. Basil Blackwell, Oxford.



Die

Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,

a. o. Professor an der Universität Jena.

BRESLAU.

Verlag von Wilhelm Koebner.

1884.

Fig. 5 "Es incorrecto llamar nombre de una cosa a un término conceptual general. En virtud de esto, parece como si el número fuera propiedad de una cosa. Un término conceptual general designa justamente un concepto. Solo con el artículo determinado o con un pronombre demostrativo vale como nombre propio de una cosa, pero deja de valer como término conceptual", Frege 1884, § 51.

Regresar al índice