

Jorge Alberto Pérez León
(Coordinador)

UACJ



*Ciencia en la frontera:
revista de ciencia y tecnología
de la Universidad Autónoma
de Ciudad Juárez.*

DIRECTORIO

Javier Sánchez Carlos
Rector

David Ramírez Perea
Secretario General

Martha P. Barraza de Anda
Coordinadora General de
Investigación y Posgrado

Hugo Staines Orozco
Director del ICB

Alejandro Martínez Martínez
Jefe del Departamento de Ciencias
Químico Biológicas

Servando Pineda Jaimes
Director General de Difusión
Cultural y Divulgación Científica

CONSEJO EDITORIAL

Hugo Staines Orozco
Director General

Jorge Alberto Pérez León
Coordinador Editorial

ESQUEMADO
Marco López Hernández

CONSEJO EDITORIAL INTERNACIONAL

Dra. Leda Carolina Torres Maldonado

Laboratorio de Citogenética, Departamento de Investigación Genética Humana. Instituto Nacional de Pediatría. México, DF, México.

Dra. Alba Yadira Corral Avitia

Departamento de Ciencias Químico Biológicas. Instituto de Ciencias Biomédicas, UACJ, Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

MC. Paloma Carton de Grammont

Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental. Universidad Nacional Autónoma de México, México DF, México.

Dr. Carlos A. Aguilar Salinas

Departamento de Endocrinología y Metabolismo, Instituto Nacional de Ciencias Médicas y Nutrición, Salvador Zubirán, México, DF, México.

Dra. Rosalba Rojas

Instituto Nacional de Salud Pública, Cuernavaca, Morelos, México.

Dr. Gilberto Anzueto Sánchez

Centro de Investigaciones en Ingeniería y Ciencias Aplicadas. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, Morelos, México.

Dr. Gaspar Ros

Departamento de Bromatología e Inspección de Alimentos. Facultad de Veterinaria, Universidad de Murcia, Murcia, España.

Dr. Álvaro Álvarez Parrilla

Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California Ensenada. Baja California, México.

Dr. Roberto González Garduño

Centro Regional Universitario del Suroeste, Universidad Autónoma de Chapingo. San José Puyacatenco, Teapa, Tabasco, México.

Dr. Néstor Ledesma Martínez

Departamento Medicina y Zootecnia y Aves. Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia, UNAM. Coyoacán, DF, México.

Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ / Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Coordinación General de Investigación y Posgrado. Vol. 9. (2011). Ciudad Juárez, Chih.: UACJ, 2012.
v.: 21 cm.
Seriada

Apoyado con Recursos PIFI

Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ Vol. 9, Número 2, 2011, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, a través del Instituto de Ciencias Biomédicas y de la Coordinación de Investigación y Posgrado del ICB y el Departamento de Ciencias Básicas. Editor responsable: Luis Fernando Plenge Tellechea. Reserva al uso exclusivo otorgada por INDAUTOR Núm. 04-2010-11301126-0000-102 y el ISSN 2007-042X. Publicidad, anuncios y suscripciones, dirigirse a: *Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ*, Heroico Colegio Militar 3775, 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México. Tel. (656) 688 18 85. Copyright © UACJ. Esta obra se terminó de imprimir en septiembre de 2011 en Talleres Gráficos de México, Av. Canal del Norte, No. 80, Col. Felipe Pescador, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06280. México, Distrito Federal. Tiraje: 100 ejemplares.

Los manuscritos propuestos para publicación en esta revista deberán ser inéditos y no haber sido sometidos a consideración a otras revistas simultáneamente. Al enviar los manuscritos y ser aceptados para su publicación, los autores aceptan que todos los derechos se transfieren a *Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ*, quien se reserva los de reproducción y distribución, ya sean fotográficos, en micropelícula, electrónicos o cualquier otro medio, y no podrán ser utilizados sin permiso por escrito de *Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ*; véase además notas para autores.

Permisos para otros usos: el propietario de los derechos no permite utilizar copias para distribución en general, promociones, la creación de nuevos trabajos o reventa. Para estos propósitos, dirigirse a *Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ*, correo electrónico: fplenge@uacj.mx.

CONTENIDO

<i>Reseña del Primer Seminario-Taller de Astrobiología realizado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua</i> Marisela Aguirre-Ramírez y Sandra I. Ramírez Jiménez.....	7
<i>Cristales fotorrefractivos, Quasi-solitones espaciales y Grabado holográfico</i> Rafael Torres-Córdoba, Liliana Abril Amador Cabrera	13
<i>Ecuaciones diferenciales parciales, el método del elemento finito y una aplicación a las matemáticas financieras: la ecuación de Black-Scholes</i> Francisco Ávila Álvarez, Víctor Hugo Jiménez Nava	25
<i>Valor biológico de los alimentos para rumiantes</i> Rosana Ramírez-Ramírez, Alfredo Góngora, Héctor González García, Aracely Orozco Erives, Roberto Martínez de la Rosa, Efraín García SanMiguel, Imelda Ramos Guevara, Hugo Hernández Contreras.....	41
<i>Serología del Síndrome Ascítico en pollos de la línea Arbor Acres</i> Luis Olivares-Sánchez, Pablo Rangel-Silva, Carlos López-Coello, Héctor Fernando Serrano, María Dolores García-Suárez, Alondra Castro-Campillo, Arturo Salame-Méndez, Rafael Valencia-Quintana, José Luis Gómez-Olivares.....	49

ABSTRACTS

Reseña del Primer Seminario-Taller de Astrobiología realizado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua.
 Marisela Aguirre-Ramírez y Sandra I. Ramírez Jiménez.....7

Cristales fotorefractivos, Quasi-solitones espaciales y Grabado holográfico
 Rafael Torres-Córdoba, Liliana Abril Amador Cabrera13

A new way for catching light in photorefractive media is presented. These photorefractive media are called quasi-soliton. Here we develop a historic perspective of its conception and also about the design of holographic crystals. The light is used in these media as a laser source. There is a wide road for science and development in the field, overmost considering their impact on communication and storage of information.

Ecuaciones diferenciales parciales, el método del elemento finito y una aplicación a las matemáticas financieras: la ecuación de Black-Scholes.
 Francisco Ávila Álvarez1, Víctor Hugo Jiménez Nava25

Partial derivative equations are widely used to explain numerous phenomena in nature. Nonetheless, given the lack of analytic solution or even the occurrence of multiple solutions, these equations are inadequate to solve practical problems in Engineering or Economics, where the alternative is to use the Finite Element Method, using lineal or quadratic functions. Even though nowadays there is enough approach and significant reduction by the use of superior order methods, the theory behind them is real complicated and the necessary software very expensive. We are developing a free software designed to the numerical solutions for lineal and quadratic functions and here we test its accessibility and efficiency in solving an Economics problem: the sale price considering transaction costs. We show solutions using the Finite Order Method in Hermes2D.

Feed biological values for ruminants
 Rosana Ramírez-Ramírez, Alfredo Góngora, Héctor González García, Aracely Orozco Erives,
 Roberto Martínez de la Rosa, Efraín García SanMiguel, Imelda Ramos Guevara, Hugo Hernández
 Contreras.....41

The Weende system for proximate analysis and the TDN system have been used for about a century as the basis for predicting the energy and protein available from feedstuffs. Net energy systems were developed to adjust for methane, urinary, and heat increment losses. The NE systems have worked well

under standard feeding conditions, but the tabular value of NE for a particular feed is typically computed from TDN and represents the average expected value based on a group of feeds rather than the NE that will be derived by a particular group of cattle eating that feed. Because the feeding conditions of cattle are variable and often unique, accurate NE values usually are not available. Crude and digestible protein determinations do not completely account for the dynamics of ruminal fermentation and the potential loss of nitrogen as ammonia.

Serología del síndrome ascítico en pollos de la línea Arbor Acres

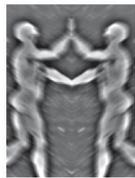
Luis Olivares-Sánchez, Pablo Rangel-Silva, Carlos López-Coello, Héctor Fernando Serrano, María Dolores García-Suárez, Alondra Castro-Campillo, Arturo Salame-Méndez, Rafael Valencia-Quintana, José Luis Gómez-Olivares.....49

Ascites syndrome (AS) is a disease than produce physiologic alterations on tissues and organs in chicken broilers. Poultry death incidence from AS in Mexico varies from 3 to 40%.

There is no a serological analysis to evaluate the establishment and progression fro AS. Here we examine the changes in protein, lipid content, and enzyme activity of AS affects chicken broilers.

We use, 30 clinically health and 30 AS-affected animals. We found AS chickens serum has significantly lower total protein, albumin, total lipids, cholesterol, triglycerids, phospholipids and alkaline phosphatase (AF) than health animals. Calcium, aspartate aminotransferase (ASAT) and gamma glutamil transpeptidase (GGT) activities were slightly higher in chicken ascitic serum. We were unable to find differences on glucose content and alanine aminotransferase activity (ALAT).

This results in that syndrome in chicken modifies some basic parameters mainly protein content, lipids and reflecting diverse physiologic alterations. These observations may be useful for the diagnosis of this disease in early age.



Reseña del Primer Seminario-Taller de Astrobiología realizado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Marisela Aguirre-Ramírez^{1*} y Sandra I. Ramírez Jiménez²

El programa de Química del Departamento de Ciencias Químico-Biológicas del Instituto de Ciencias Biomédicas de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ) organizó, en el marco del Año Internacional de la Química, el primer Seminario-Taller de Astrobiología del 30 de junio al 2 de julio del 2011.

La Astrobiología es una ciencia multidisciplinaria centrada en el estudio del origen, la distribución, la evolución y el destino de la vida en el Universo (Stanley, 2003; Ramírez, 2006). En ella se entrelazan conocimientos de disciplinas tradicionales como la Astronomía, la Física, la Química, la Biología entre otras con la finalidad de encontrar respuestas a preguntas concretas como: ¿cuáles son los requerimientos básicos para el desarrollo de la vida?; ¿cómo se originó la vida en el Universo?; ¿qué características debe contener un cuerpo planetario para permitir el desarrollo y la preservación de la vida?

Estas y otras interrogantes fueron planteadas

al inicio del Seminario-Taller por la Dra. Sandra I. Ramírez, astrobióloga adscrita al Centro de Investigaciones Químicas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. La Dra. Ramírez presentó los conocimientos que la Astrobiología toma como base, los cuales les permiten a los astrobiólogos ir conociendo cada vez y con mayor detalle los misterios del Universo. En las primeras sesiones teóricas explicó que, aún cuando la distinción entre seres vivos y entidades no vivas puede ser un ejercicio intuitivo, la Astrobiología se enfrenta a la dificultad de no contar con una forma concreta que defina de manera universal a la vida. Aspecto que toma relevancia al aventurarse a buscar evidencias de la existencia de seres vivos en cuerpos celestes distintos a la Tierra.

Otra dificultad importante que enfrenta la Astrobiología al explorar el Universo, radica en las enormes distancias que separan a los cuerpos planetarios. Por ejemplo, para viajar a los planetas más exteriores de nuestro Sistema Solar se requie-

¹ Departamento de Ciencias Químico-Biológicas, Instituto de Ciencias Biomédicas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chi, México.

² Laboratorio de Simulación de Atmósferas Planetarias, Centro de Investigaciones Químicas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Mor, México.

* Autor corresponsable. Dirección postal: Departamento de Ciencias Químico-Biológicas, Instituto de Ciencias Biomédicas, UACJ. Anillo Envolverte del PRONAF y Estocolmo s/n, C.P. 32315 Tel.: (52-65) 66881800. correo: marisela.aguirre@uacj.mx

ren, con la actual tecnología, de 5 a 8 años. Si la intención es explorar planetas de otros sistemas solares, este tiempo aumenta considerablemente hasta alcanzar varias decenas de años. Una de las actividades prácticas que les permitió a los asistentes dimensionar estos aspectos fue la elaboración de una maqueta del Sistema Solar utilizando materiales y utensilios de uso cotidiano. La maqueta más representativa fue aquella donde se tomó como referencia métrica un palillo de dientes, equiparando su longitud con la distancia existente entre la Tierra y el Sol; es decir, la unidad astronómica equivalente a 150 millones de kilómetros. Con esta base se propusieron las distancias entre el Sol y el resto de los ocho planetas que conforman al Sistema Solar, dando como resultado una maqueta de dos metros de longitud, sólo para ejemplificar la distancia que nos separa de Neptuno, 30 unidades astronómicas.

Esos son los vecindarios de nuestro planeta y como se ha mencionado, llegar a ellos nos tomaría varias décadas. Este hecho pudo evidenciarse al conocer el recorrido y el tiempo que le tomó a la misión Cassini-Huygens llegar al planeta Saturno, el denominado señor de los anillos por la Dra. Ramírez. Esta misión fue lanzada en 1997 desde Cabo Cañaveral en Florida, Estados Unidos, y no fue sino hasta el 2004 que orbitó a Saturno y en el 2005, a su luna Titán. La sonda Huygens se separó del módulo Cassini para adentrarse en la densa atmósfera de ese satélite, desplegar todos sus instrumentos de medición y enviar información de ese mundo durante 3 horas hacia la Tierra para después apagarse.

Debido a las grandes distancias que separan a los objetos planetarios de interés para la Astrobiología y a los recursos que son necesarios para llegar hasta ellos, los científicos emplean métodos de detección indirecta para conocer más de esos mundos. Un ejemplo lo constituye el uso de la radiación electromagnética emitida por otras estrellas y reflejada por los planetas que giran alrededor de ellas como ocurre con el Sol y sus 8 planetas. Esta información ayuda a los científicos a determi-

nar, en el caso de los planetas, la existencia de una atmósfera y su composición, conocer la naturaleza de la superficie del objeto planetario y de su interior, entre otros aspectos. La observación telescópica desde Tierra o desde satélites espaciales, es otra alternativa para conocer a dichos cuerpos celestes. Estos instrumentos son útiles para determinar la distancia que nos separa de ellos, su composición química en algunos casos y algunos otros detalles de sus características físicas, como el tiempo de rotación, la cantidad de radiación que reciben de su estrella, etc. (Impey, 2007). El objetivo final de dichas estrategias es identificar zonas galácticas y circunestelares habitables (Segura y Kaltenegger, 2010) o adecuadas para albergar alguno o algunos de los diversos seres vivos que conocemos en nuestro planeta.

Si somos optimistas y podemos localizar un lugar en el Universo que tenga las condiciones adecuadas para el desarrollo de la vida, otra interrogante que asalta a los astrobiólogos estaría relacionada con el aspecto que esos potenciales seres extraterrestres, es decir “de fuera de la Tierra”, pudieran tener. Por el momento, las estrategias están enfocadas en conocer a profundidad a la única manifestación de vida que conocemos, la de nuestro planeta.

Estudios sobre el origen y la historia evolutiva de la vida en la Tierra indican que muy probablemente ésta se inició en aguas someras cálidas que contenían una cierta concentración de nutrientes formados por los elementos biogénicos (C, H, O, N, P, S) (Ruiz y Menor, 2007). Estas primeras formas de vida eran microscópicas y no requerían de oxígeno para subsistir. Con el paso del tiempo y por acción de diversas presiones de selección fueron evolucionando a organismos más complejos, macroscópicos, aerobios y finalmente desencadenaron toda la variedad de organismos vivos que se conoce hoy en día (Amils y Szostak, 2009). Este planteamiento se basa en el hecho de que los elementos biogénicos abundan en el Universo, y no sólo eso, sino que existen moléculas complejas

como azúcares, aminoácidos y nucleótidos presentes en el polvo y gas interestelares (Impey, 2007). El agua también es muy abundante en los diversos objetos planetarios (Kotwickis, 2005) e inclusive en algunos lugares como el satélite Europa, donde puede existir agualíquida debajo de una gruesa corteza de hielo. El agua líquida parece ser un requisito indispensable para la existencia de vida, aún por encima de otros factores ambientales como la alta o baja temperatura o la acidez del medio. A través del estudio de los organismos extremófilos sabemos que hay seres vivos capaces de resistir condiciones extremas de temperatura, salinidad, pH, anoxia o hipoxia, alta radiación, etc. (Ramírez, 2010). La capacidad de adaptación de la vida a dichos ambientes permite postular la idea de “exportar” ejemplares de estos organismos extremófilos hacia objetos planetarios que contienen agua y alguna de estas condiciones extremas. Por ejemplo, los satélites helados en los que existen océanos de agua líquida salada o Titán, una luna del planeta Saturno en la que el metano, el hidrocarburo más sencillo, tiene un ciclo semejante al ciclo hidrológico terrestre (Ramírez, 2001).

En Titán hay nubes de metano que precipita hacia la superficie y en el camino se transforma en otros hidrocarburos de bajo peso molecular que se acumulan en cuerpos líquidos formando mares o pequeños lagos, estos hidrocarburos pueden evaporarse para regenerar nubes y así completar el ciclo. En la Tierra existen bacterias que pueden alimentarse con metano y que entonces encontrarían un oasis en Titán.

¿QUÉ BUSCAR Y DÓNDE BUSCAR?

Fue a través de dinámicas grupales, elaboración de ensayos cortos, prácticas in silico, lectura de historietas y amenas conferencias dirigidas por la Dra. Ramírez donde los participantes del primer Seminario Taller de Astrobiología pudieron empaparse de los retos que enfrentan los astrobiólogos para el desarrollo de esta área del conocimiento.

Asimismo, la Dra. Ramírez orientó las interrogantes de los asistentes hacia los aspectos científicos de esta área y los invitó a dirigir sus estudios hacia los diversos tópicos de la Astrobiología en instituciones nacionales e internacionales que realizan dicha labor.

INSTITUCIONES NACIONALES:

- Sociedad Mexicana de Astrobiología, SOMA.
- Laboratorio de Simulación de Atmósferas Planetarias, Centro de Investigaciones Químicas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Dra. Sandra I. Ramírez Jiménez
- Laboratorio de Química de Plasmas y Estudios Planetarios, Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México. Dr. Rafael Navarro González.
- Departamento de Física de Plasmas y de Interacción de Radiación con la Materia, Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México. Dra. Antígona Segura Peralta.

INSTITUCIONES INTERNACIONALES:

Programas de posgrado

- Arizona State University, Pennsylvania State University, University of Washington, University of California Los Angeles y Macquarie University.

Investigación

- Centro de Astrobiología, España.
- Astrobiology Institute, Universidad de Hawai.
- Australian Center for Astrobiology.
- NASA Astrobiology Institute (NAI).
- SETI Institute.
- EuropeanExo/Astrobiology Network Association (EANA).

Divulgación

- Astroseti. <http://www.astroseti.org/> (en español)
- ¿Cómo ves?. <http://www.comoves.unam.mx/> (en español)

- The Astrobiology web. <http://www.astrobiology.com/> (en inglés)
- Sociedad Mexicana de Astrobiología. <http://www.nucleares.unam.mx/soma/index.htm> (en español)

Es labor de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, el realizar eventos formativos tan enriquecedores como éste Seminario-Taller, donde la comunidad estudiantil y los docentes se actualizaron y conocieron de cerca a una verdadera ciencia que, de manera rigurosa, aporta evidencias sobre la prevalencia y futuro de la vida en el Universo. El Seminario-Taller recibió cuarenta y ocho solicitudes de participación de diversa áreas e instituciones, de las cuales sólo se aceptaron treinta y un participantes que cumplieron el perfil de formación en el área químico-biológica (Figura 1). Sin embargo, en conjunto con la Sociedad Mexicana de Astrobiología se pretende realizar otras actividades de difusión futuras. En esta ocasión, el primer Seminario Taller de Astrobiología y las actividades nacionales e internacionales sobre Astrobiología fueron promovidas a través de la radio universitaria y la televisión local en Ciudad Juárez (canal 5), mediante entrevistas exclusivas que ofreció la Dra. Ramírez. Gracias a estas acciones, esta actividad académica pudo permear a la comunidad fronteriza.

ALGUNOS COMENTARIOS DE LOS ASISTENTES AL SEMINARIO-TALLER:

“... el material proporcionado es muy didáctico y con buena información...”

Karina Guzmán

Octavo semestre de la licenciatura en Química, UACJ.

“...Pues el seminario ha sido muy informativo e interesante. Por un lado, me ha hecho reafirmar conocimientos previos... tomando en cuenta que cada día se descubre algo nuevo en esta área de la Astrobiología; sería bueno pensar en actividades de este tema para un futuro próximo”.

Lauro Aldama Meza

Profesor-investigador del ICB, UACJ.

“El curso de Astrobiología me pareció muy interesante, aprendí sobre muchos temas de los cuales no tenía conocimiento...”

Hugo Rafael López

Noveno semestre de la licenciatura en biología, UACJ.

“A los estudiantes, este tipo de eventos nos sirve para reafirmar o ampliar nuestros conocimientos...Dicho Seminario-Taller seguramente reclutará nuevos investigadores para inmiscuirse en este amplio y en su mayoría desconocido mundo de la Astrobiología. En mi punto de vista me gustaría que la UACJ le diera continuidad a este Seminario-Taller de astrobiología, puesto que fomenta las relaciones de investigadores de alto renombre en el área y estudiantes que apenas comenzamos a adentrarnos en este fascinante mundo del saber... En conclusión el programa de este seminario nos sirvió para dar respuesta a preguntas como: ¿cuáles son las teorías más aceptadas de la formación del universo?, ¿cómo se formó la vida en nuestro planeta?, ¿existe la posibilidad de vida en otros planetas?, ¿cómo dar respuesta a estas preguntas?”

Luis Armando Rivera Hernández

Estudiante de maestría en ciencias químico-biológicas, UACJ.



FIGURA 1. Participantes del Primer Seminario-Taller de Astrobiología de UACJ. En orden de izquierda a derecha: 1 Dra. Sandra I. Ramírez; 2 E. B. Nayelly Minjaréz 3. E. B. Tania Balderas 4. E. B. Diego Armendáriz 5. E. B. Hugo López 6. B. Magaly Escamilla; 7 I. Q. Norma Duarte; 8 E. B. Denisse Pérez; 9. M. C. Claudia Alcalá; 10 E. Q. Laura Valencia; 11 E. Q. Karina Guzmán; 12 Q. Marisela Baylón; 13 B. Álvaro Torres; 14 Dr. Lauro Aldama; 15 M. C. Marisela Aguirre; 16. E. Q. Alejandro Amaya; 17 B. Rodolfo Salazar; 18 B. Luis Rivera.

REFERENCIAS

- Amils, R. y Szostak, W. J. (2009) Origin of life on Earth. *Scientific American*. 301(3):54-61
- CASSINISOLSTICEMISSION. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. [En línea] <http://saturn.jpl.nasa.gov/mission/introduction/>
- Choi, C. Q. (2010) JupiterMoon's Ice-CoveredOceanIsRich in Oxygen. *Astrobiology Magazine*. [En línea] 27 Mayo, 08:35 AM ET. <http://www.space.com/8487-jupiter-moon-ice-covered-ocean-rich-oxygen.html>
- Fulchignoni, M.; Ferri, F.; Angrilli, F.; Ball, A. J.; Bar-Nun, A.; Barucci, M. A.; Bettanini, C.; Bianchini, G.; Borucki, W.; Colombatti, G.; Coradini, M.; Coustenis, A.; Debei, S.; Falkner, P.; Fanti, G.; Flamini, E.; Gaborit, V.; Grard, R.; Hamelin, M.; Harri, A. M.; Hathi, B.; Jernej, I.; Leese, M. R.; Lehto, A.; Lion Stoppato, P. F.; López-Moreno, J. J.; Mäkinen, T.; McDonnell, J. A. M.; McKay, C. P.; Molina-Cuberos, G.; Neubauer, F. M.; Pirronello, V.; Rodrigo, R.; Saggin, B.; Schwingenschuh, K.; Seiff, A.; Simões, F.; Svedhem, H.; Tokano, T.; Towner, M. C.; Trautner, R.; Withers, P. y Zarnecki, J. C. (2005) "In situ measurements of the physical characteristics of Titan's environment". *Nature*. 438, 785-791.
- Impey, C. (2007) *The Living Cosmos: Our Search for Life in the Universe*. Cambridge University Press. New York, USA. 361 p.
- Kotwickis, V. (2005) *Water in the Universe*. <http://www.u24u.com/> Consulta 6 diciembre, 2011.
- Melosh, H.J.; Ekholm, A.G.; Showman, A.P. y Lorenz, R.D. (2004) "The temperature of Europa's subsurface water ocean". *Icarus*. 168: 498-502.

- Ramírez, J.S. I. (2010) “Las fronteras de la vida desde la perspectiva de los extremófilos”. *Inventio*, año 6 num. 11, 57-66.
- Ramírez, J. S. I. y Terrazas, H. (2006). “Astrobiología, una nueva disciplina científica”. *Inventio*, año 2, núm. 3, 45-53.
- Ramírez, S. I., Navarro-González, R., Coll, P. Raulin, F. (2001) “Experimental simulation of Titan's atmosphere by cold plasmas”, in: Chela-Flores, J., Owen, T. Raulin, F. (Eds.), *First steps in the origin of life in the Universe*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 319-324, 2001.
- Ruiz, B. M. y Menor, S. C. (2007) “Teoría de la evolución química. Tholins: materia orgánica ubicua en el universo”. *An. Quím.* 103(3), 14–22.
- Segura A. y Kaltenegger, L. (2010) “Search for habitable planets”. En Basiuk, V. A. *Astrobiology: Emergence, Search and Detection of Life*. American Scientific Publishers. México, D.F. pp.341-359.
- Stanley, J. T. (2003) “Astrobiology, the transcendent science: the promise of astrobiology as an integrative approach for science and engineering education and research”. *Curr. Opin. Biotechnol.* 14(3), 347-54.

■ ARTÍCULO DE REVISIÓN

Cristales fotorrefractivos, *Quasi-solitones* espaciales y Grabado holográfico

Rafael Torres-Córdoba, Liliana Abril Amador Cabrera

RESUMEN

Se presenta la forma de atrapar la luz en medios fotorrefractivos, en nuestro caso llamados quasi-solitones espaciales, iniciando con un desarrollo histórico acerca del concepto en su forma general del solitón y también una aplicación en el grabado holográfico en cristales fotorrefractivos, donde la luz es utilizada como fuente; los láseres. Estos desarrollos teóricos como experimentales, aun y a pesar que se tienen varios años en investigación todavía tienen vigencia en la investigación y desarrollo científico, considerando que el campo de aplicación, son las telecomunicaciones así como también el almacenamiento de grandes volúmenes de información en espacios mucho más pequeños conocidos.

INTRODUCCIÓN

El avance de la tecnología de las telecomunicaciones se desarrolla rápidamente, por lo que sus dispositivos cada vez son más eficientes y con una mayor capacidad para el almacenamiento y transmisión de información.

Actualmente se impulsa el estudio de nuevos materiales, de los cuales, sus propiedades eléctricas y ópticas son una gran ventaja para el desarrollo

de aplicaciones dentro de las telecomunicaciones y computación, para transmitir y grabar datos por medio de haces de luz para el caso espacial.

Dichas características ópticas permiten obtener mejores resultados en cuanto a la rapidez de transmisión y capacidad para almacenar datos, superando dicha capacidad en mucho a los dispositivos actuales. La base de tales dispositivos es la utilización de las propiedades de propagación de

ondas electromagnéticas a través del campo de los materiales ópticos.

El desarrollo de la investigación se basa en la creciente necesidad de tener dispositivos con mayor capacidad para el almacenamiento y su transmisión, de grandes cantidades de información, ya sea en equipos computacionales domésticos e industriales.

Se investigarán las características que tienen los materiales de los cristales fotorefractivos, los cuales pueden utilizarse de manera eficiente tanto para la transmisión como almacenamiento de datos por medio de la propagación de las ondas electromagnéticas.

Se estudia también un tipo particular de dichas ondas electromagnéticas, las cuales su perfil permanece indeformable cuando dicha onda se está propagando, las cuales son llamadas solitones, la idea fundamental del concepto de solitón es que sirve para transportar energía sin que ésta se disipe, esto es la onda electromagnética no se difracta, por lo cual es importante el medio en que se propaga y la forma que debe tener su perfil transversal, para que este perfil permanezca inalterado en su propagación.

El objetivo de la presente investigación es divulgar la existencia, estudio y desarrollo científico de las aplicaciones de la tecnología para la propagación de los solitones, el atrapamiento de la luz y su relación con los dispositivos de almacenamiento holográfico como una aplicación de la propagación de la luz en cristales fotorefractivos.

Se pretende mostrar el modelo matemático que demuestra el principio de su existencia teórica, el cual consiste para un caso particular de la propagación de solitones espaciales ópticos en cristales fotorefractivo, basada en las leyes de Maxwell de la teoría electromagnética.

El enfoque de la presente investigación se basa en utilizar cristales fotorefractivos en el atrapamiento de la luz, con dos aplicaciones las cuales son:

La formación de los quasi-solitones espaciales (formación de ondas superficiales) como aplicación sería el transporte de información.

La segunda aplicación será como un medio de almacenamiento de información a través del grabado, lo cual permite tener una mayor velocidad en el grabado y lectura de la información.

Por tal motivo, es posible transmitir, compartir, acceder y almacenar la información de manera más eficiente, además, el tamaño de las memorias y dispositivos de almacenamiento son más compactos en comparación con los actuales, por lo tanto, resultaría más cómodo y práctico utilizarlos, también, cabe destacar que los materiales fotorefractivos son el medio más eficiente, hasta ahora conocido, para el grabado de hologramas estáticos y dinámicos.

La propagación de los solitones y su relación con el almacenamiento holográfico es actualmente bajo estudio con un buen desarrollo de investigación. Con la presente investigación, se pretende dar a conocer dicha tecnología, así como las bases de su funcionamiento físico y técnico, las cuales son la óptica y la holografía respectivamente.

También, se hace una comparación del almacenamiento holográfico y los dispositivos actuales para conocer cuáles son sus ventajas e inconvenientes.

ANTECEDENTES

Solitones

Uno de los desarrollos tecnológicos más importantes que se han tenido dentro de las comunicaciones y algunas otras áreas como la física tuvo lugar a principios del siglo XIX, para ser más precisos en el año 1834, tiempo en el cual el ingeniero escocés John Scott Russell, mientras realizaba una investigación acerca de cómo crear un diseño más eficiente de un bote para navegar observó en aguas poco profundas de un canal de Edimburgo una onda que se comportaba de un modo diferente y algo peculiar. Russell observó intrigado que la onda que se creó en la proa del bote no sufría cambios significativos en su forma, mientras la seguía cabalgando unos kilómetros hasta que ésta desapareció de su vista. Después de este descubrimiento, Russell construyó un tanque de 30 pies en su jardín trasero e hizo importantes observaciones acerca de las propiedades de las ondas solitarias. Sus investigaciones acerca del

comportamiento de esta onda las publicó en el *Report of the British Association for the Advancement of Science* en el año 1845, pero sus discusiones acerca del tema no fueron comprendidas en aquel tiempo.

Posteriormente Russell realizó las primeras observaciones experimentales de lo que actualmente se conoce como el Efecto Doppler, el cual fue descrito por primera vez en el año 1842 por el físico austriaco Christian Doppler. En el año 1895 D.J. Korteweg y su aprendiz G. de Vries retomaron los datos obtenidos por Scott Russell y derivaron el modelo matemático determinado por una ecuación diferencial parcial no lineal, la cual inicialmente como un caso bastante particular, describe el comportamiento de la propagación de dichas ondas en aguas poco profundas. La comprensión de la existencia e importancia de tal fenómeno comenzó hasta la segunda mitad del siglo XX, ver figura 1.

En el año 1955 la investigación de las soluciones localizadas en medios no lineales se retomó para el estudio de osciladores modelados numéricamente, para el año 1960 los científicos Norman Zabusky y Martin Kruskal demostraron mediante cálculos numéricos utilizando computadoras digitales modernas que una onda solitaria se comporta de manera estable viajando grandes distancias sin tener cambios en su perfil.

Con estos estudios, los científicos Zabusky y Kruskal demostraron que si se originan dos ondas solitarias separadas con diferencia considerable de amplitud entre las dos (la de mayor amplitud a la izquierda de la de menor amplitud), la onda más grande rebasa a la más pequeña (de menor velocidad) y sus posiciones se intercambian quedando la onda mayor de lado derecho, cabe mencionar que cada una sigue conservando exactamente la misma

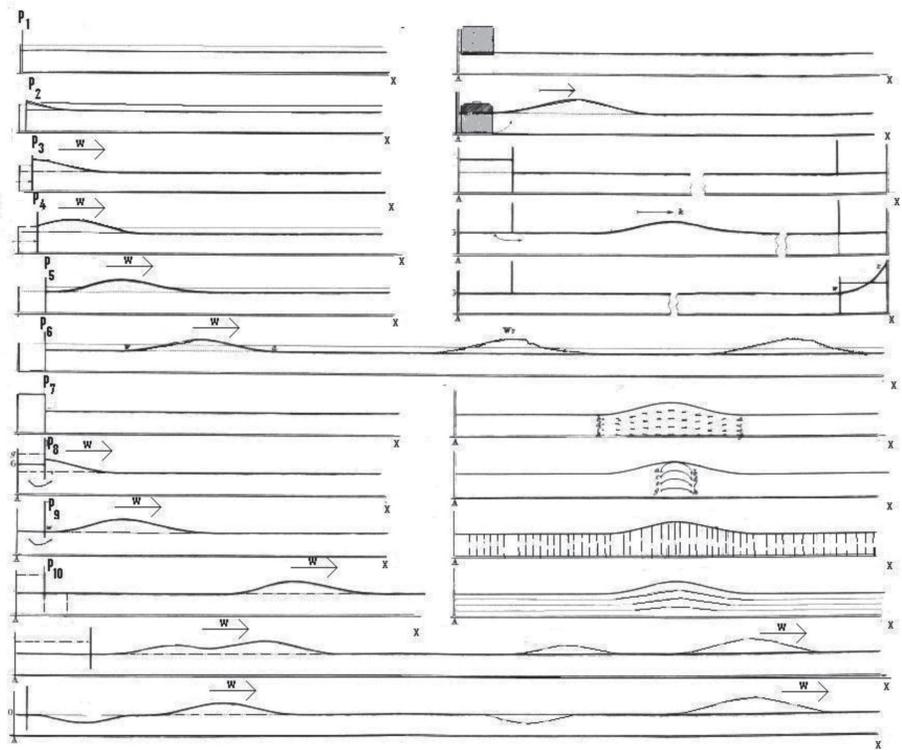


Fig. 1. Observaciones realizadas por J. S. Russell. [1]

estructura incluso después de colisionar al momento de intercambiar sus posiciones. A partir de tales observaciones, se concluyó que las ondas solitarias tienen el comportamiento como el de una partícula rígida por la teoría de la mecánica clásica, por lo que Kruskal y Zabusky utilizaron el término Solitón, fue en ese tiempo en que las ideas y observaciones que hizo J. S. Russell casi un siglo antes comenzaron a ser apreciadas. Los estudios mencionados condujeron a la ecuación de Korteweg-De Vries, la cual se había formulado con cien años de anterioridad para describir el patrón de comportamiento de la propagación de las ondas en aguas poco profundas, descubrieron también que el fenómeno que Russell tenía una demostración matemática empleando tal ecuación, ya que algunas veces los solitones se comportan como un modelo lineal (bajo ciertas circunstancias de aproximaciones matemáticas) y otras ocasiones como ondas en modelos no lineales, por lo que dichas ondas presentan una conducta considerablemente imprevista e interesante.

La ecuación de Korteweg-De Vries o KdV es una ecuación diferencial parcial no lineal, la cual incluye resultados de dispersión y no linealidad de manera simultánea.

Esta ecuación es un modelo que describe la propagación de ondas con una longitud de onda larga en una dimensión espacial en medios dispersivos. La superficie de aguas poco profundas, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se pueden encontrar estas ondas. El método matemático que se aplicó inicialmente y que mostró su integrabilidad se conoce como el método Scattering

Inverse. La forma de la ecuación varía dependiendo del autor que la aplica, y la siguiente es una de ellas:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

Donde x representa la posición espacial, t es su posición temporal y $v(x, t)$ expresa la amplitud de la onda, el primer término de la ecuación $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ se refiere a la elevación de la superficie del agua en relación a su posición de equilibrio, el segundo término $v(x, t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ es considerado el no lineal por la multiplicación por $v(x, t)$ y su primera derivada parcial respecto al espacio y el tercer término $\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}$ es el dispersivo debido a la tercera derivada parcial espacial de $v(x, t)$ y μ es un parámetro.

La ecuación KdV es universalmente utilizada en las diversas áreas de la matemática aplicada (Teoría de grupos) y de la física clásica y cuántica. La solución de la ecuación (1) obtenida por el método scattering inverse es obtenida como:

$$v(x, t) = -\frac{a}{2 \cosh^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{a}(x-at-b)\right]} = \frac{a \operatorname{sech}^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{a}(x-at-b)\right]}{2} \quad (2)$$

donde a y b son constantes arbitrarias, que dependen de las condiciones iniciales que es la forma estándar de la representación de un solitón espacio-

temporal, esto es que su perfil permanece inalterado mientras exista su propagación.

El descubrimiento de tales ondas, provocó un gran desarrollo en la investigación dentro de las áreas de las telecomunicaciones, computación, óptica, matemáticas puras y aplicadas, física e ingenierías. Se han podido experimentar solitones en diferentes sistemas como las atmósferas de los planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio, redes nerviosas, polímeros, medios líquidos, sólidos, gaseosos, e inclusive en la corriente eléctrica y campos electromagnéticos etc., aclarando que no en todos los casos anteriores la ecuación (1) es aplicable, esto es según el fenómeno bajo estudio está representado por diferente modelación matemática.

Una de las aplicaciones referentes a la propagación de ondas solitarias es en materiales ópticos no lineales es la tecnología de la fibra óptica, la cual fue descubierta en los años cincuenta, cuando un nuevo material fabricado de vidrio podía transmitir información por medio de señales luminosas a grandes velocidades, para lo cual se utilizó el principio de reflexión interna total (demostrado en el año 1870 por John Tyndall). Para 1970 se fabricaron fibras mucho más eficientes y de mejores materiales, los cuales permitían tener menores pérdidas de información y lograban transmisiones a distancias mucho mayores.

En 1973, los investigadores de los Laboratorios Bell: Akira Hasegawa y Frederick Tappert, encontraron que a través de la fibra óptica podían transmitirse pulsos de una duración muy corta sin dispersión de la luz (todo esto en teoría), tal descubrimiento tuvo relación con la unión entre los solitones con la tecnología de la fibra óptica. En el año 1988 Linn Mollenauer y su equipo transmitieron solitones a más de 4,000 km aplicando el efecto Raman, nombre dedicado a un científico hindú que describió un modo de aumentar las señales luminosas en una fibra óptica. En 1991, nuevamente en los Laboratorios Bell, un grupo de investigadores logró transmitir solitones a más de 14,000 km empleando amplificadores de Erbío.

Posteriormente en 1998, Thierry Georges y su equipo del centro de investigación y desarrollo de

France Telecom combinaron solitones de longitudes de onda diferentes y lograron llevar a cabo una transmisión superior a 1 terabyte por segundo (1×10^{12} bits/segundo). En el 2001 los solitones encontraron una aplicación práctica con el primer equipo de telecomunicaciones, que los utilizaba para transporte de tráfico real de señales sobre una red comercial.

En poco más de 10 años la fibra óptica se ha convertido en una de las tecnologías más avanzadas y eficientes que se utilizan como medio de transmisión de información.

Este material revolucionó los procesos de las telecomunicaciones en muchos sentidos, desde lograr una mayor velocidad en la transmisión y multiplicar las formas de envío de datos hasta disminuir casi en su totalidad el ruido y las interferencias, así como mejorar la recepción por vía telefónica.

Actualmente, se investigan y desarrollan otras tecnologías para la transmisión y almacenamiento de cantidades cada vez más grandes de información, los investigadores están dando énfasis a la utilización de materiales fotorefractivos, por ejemplo cristales, empleando guías de onda para la manipulación de los pulsos y de haces luminosos provenientes de varios tipos de láser.

Cristales Fotorefractivos

El efecto fotorefractivo es un fenómeno en el que el índice de refracción cambia debido a la variación de la intensidad de la luz, fue descubierto cuando se realizaban estudios de transmisión láser a través de un cristal electro óptico, en donde se deformaba el frente de onda del haz transmitido, a éste resultado en aquel tiempo se le designó daño óptico. El efecto fotorefractivo se da en varias etapas:

Un material fotorefractivo es iluminado cuando se le inducen rayos coherentes de luz. Con respecto a holografía, tales rayos pueden ser de referencia y señal. La interferencia entre los haces dan como resultado un patrón de franjas oscuras y de luz en el cristal. En las regiones en donde se encuentran las franjas luminosas, los electrones pueden absorber la luz y ser excitados de un nivel de impurezas en la banda de conducción del material dejando libre el espacio que ocupaba el electrón (una carga neta

positiva). Los niveles de impurezas tienen energía intermedia entre la banda de valencia y la banda de conducción del material.

En la banda de conducción, los electrones son libres de moverse y difundirse en el cristal. Desde que los electrones son excitados en las franjas de luz, el flujo neto del electrón corre a través de todas las regiones con franjas oscuras del material. Mientras, en la banda de conducción es muy probable que los electrones se puedan recombinar con los hoyos (cargas positivas) y regresar a los niveles de impurezas. El ritmo al que la recombinación de los electrones tiene lugar, determina qué tanto se desprenden o difunden los electrones, y en consecuencia la intensidad del efecto fotorefractivo en ese material. Una vez que están de vuelta en el nivel de impurezas, los electrones son atrapados y ya no pueden pasar a menos que vuelvan a ser excitados de regreso a la banda de conducción por la luz.

Con la redistribución de los electrones en las regiones oscuras del material se dejan espacios libres o agujeros en las áreas luminosas, la distribución resultante de la carga provoca un campo eléctrico conocido como campo espacio-carga E_{sc} que se creará en el cristal. Desde que los electrones y los hoyos están atrapados e inmovilizados, el campo espacio-carga persiste incluso cuando los haces luminosos son removidos. El campo interno espacio-carga E_{sc} por medio del efecto electro-óptico, provoca que el índice de refracción del cristal cambie en las regiones en donde el campo es más potente. Lo anterior produce una variación espacial (rejilla) en el índice de refracción a lo largo del cristal.

El patrón de la rejilla formada sigue el patrón de interferencia de luz que se impuso en el cristal. La rejilla ahora puede difractar la luz que brillaba sobre el cristal con la difracción resultante, recreando así el patrón original de la luz almacenada en dicho material. Por ejemplo, en el caso de un holograma, al iluminar la rejilla sólo con el haz de referencia provoca la reconstrucción de la señal original de dicho haz de luz.

Cuando dos haces coherentes tipo láser interceptan dentro de un cristal fotorefractivo, el índice refractivo resultante de la rejilla difracta los haces.

Como resultado, uno de los haces gana energía y se vuelve más intenso a costa de la reducción de la intensidad de la luz del otro haz. Este fenómeno es un ejemplo de la combinación de dos ondas. En esta configuración es interesante que la condición de la difracción de Bragg se satisface automáticamente. El patrón almacenado en el cristal continúa hasta que es borrado, lo cual se puede llevar a cabo iluminando uniformemente el cristal, que excitará a los electrones, irán de vuelta a la banda de conducción y les permitirá distribuirse de manera más uniforme.

El efecto de Difusión resulta de la migración de los electrones desde las aéreas de alta a baja concentración, mientras que el efecto Drift es el movimiento de los electrones cuando se aplica un campo eléctrico. El efecto Fotovoltaico es una corriente inducida unidireccionalmente originada de la asimetría en la estructura del cristal fotorefractivo.

En la Figura 2 se muestra el diagrama de cómo se lleva a cabo el efecto fotorefractivo. Los materiales fotorefractivos son también llamados materiales

electro ópticos (por sus propiedades eléctricas y ópticas), en los cuales su índice de refracción cambia por la fotoinducción, formando un campo espacio-carga E_{sc} a través del efecto electro óptico del cristal fotorefractivo, algunas de las propiedades por las que regularmente se guían para elegir un material fotorefractivo para aplicaciones del mismo son: grabado fotorefractivo y tiempo de borrado, dependencia de la frecuencia espacial, dependencia del campo eléctrico, relación señal-ruido, temperatura de operación, cambio de fase en el índice de refracción, rango dinámico (referente al cambio máximo en el índice de refracción), entre otras.

Ahora algunas de las aplicaciones en las que se utilizan los materiales electro ópticos son: grabado de hologramas en tiempo real (mezcla de dos ondas), amplificación de una imagen utilizando mezcla de dos ondas en cristales fotorefractivos, amplificación espacial, moduladores de luz espaciales fotorefractivos, detectores, etc.

Algunos cristales fotorefractivos muy usados son por ejemplo: titanato de bario ($BaTiO_3$), niobato de

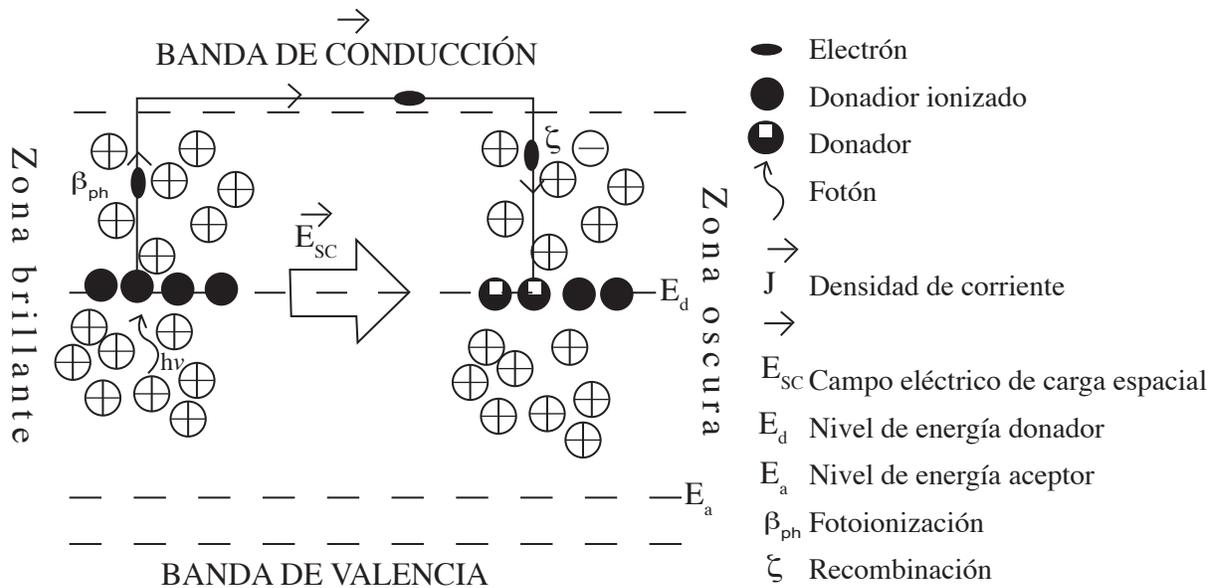


Fig. 2. Esquema del efecto fotorefractivo, que están descritas por las ecuaciones de Kukhtarev constituyen el modelo matemático del efecto fotorefractivo. Las anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de notable complejidad, y que no han sido solucionadas analíticamente en toda su generalidad [2].

litio (LiNbO₃), algunos fotopolímeros, y algunas estructuras cuánticas. Las propiedades que tienen los cristales fotorefractivos los hacen muy ventajosos ya que pueden ser reutilizados, además de que también pueden ser grabados y reconstruidos en tiempo real; una desventaja de los mismos es que aún no son producidos en serie, debido a su alto costo de producción. Una de las aplicaciones más importantes de tales de materiales es la mezcla de ondas (casos de la mezcla de 2,3,4 ondas, aplicaciones que se tienen en otras aéreas de la Física), para que exista el intercambio de energía entre las ondas que inicialmente inciden en el cristal, pero experimentalmente se encuentra una desventaja de que si el ángulo entre los haces incidentes es pequeño (décimas de grado) para su intercambio de energía, lo cual se forman haces difractados por la interacción de los haces incidentes con las diferentes redes fotorefractivas diferentes que se forman en el cristal.

Otra aplicación común para el tipo de materiales electro ópticos mencionados es la Animación Holográfica, la cual es realizada en 2D y 3D, implementando motores a pasos y un sistema de un lente para la captura y grabado de las imágenes, así como una cámara CCD, considerando que para el caso de 2D el almacenaje ya llegado a su límite de velocidad y capacidad, (Charge-Coupled Device, por sus siglas en inglés) para que la información (holograma) pueda ser visualizada en el monitor de una computadora. En dicho experimento, se concluye que es más factible la utilización de cristales fotorefractivos por la versatilidad y el bajo costo que representa para el desarrollo de un proyecto de este tipo.

Los cristales fotorefractivos son utilizados también para controlar uno o varios haces de luz utilizando una guía de onda e aplicando un voltaje al cristal, en resultados experimentales se demostró que entre mayor es el voltaje aplicado al cristal, se incrementa la eficiencia de la guía de onda y es notoria la mejoría que se obtuvo en el auto-enfoque del haz o pulso incidental al cristal. Como un ejemplo muy particular para dicho experimento, se encontraron las condiciones óptimas para la guía y el control de un haz Gaussiano, se utilizó un láser de He - Ne (Helio-Neón) con un arreglo periódico

de luz no lineal que gradualmente se convierte en una guía de onda.

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA LA FORMACION DE QUASI-SOLITONES OPTICOS-ESPACIALES

Las Ecuaciones de Maxwell relacionan la carga eléctrica, las corrientes y campos variables con los vectores de intensidad del campo eléctrico e inducción magnética, las cuales tienen la forma más general como se muestra en la siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ y } \nabla \times \vec{H} = \vec{j} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

La propagación de ondas electromagnéticas en un medio óptico e utilizando y combinando las Ecuaciones de Maxwell dadas por la ecuaciones (3), se encuentra que la ecuación de onda está determinada como:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \nabla \right] E = 0 \text{ o } \left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \nabla \right] B = 0 \quad (4)$$

En donde σ es la conductividad eléctrica del material, $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ es la velocidad de propagación de la onda electromagnética, E representa el campo eléctrico y B representa el campo magnético. Cuando la onda se propaga a través del vacío o en materiales no conductores entonces la conductividad es nula quiere decir que $\sigma = 0$ y la ecuación (4) cambia a la forma estándar de la representación matemática para la luz que se propaga en medios no conductores de electricidad.

$$\nabla^2 E(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \text{ o } \nabla^2 B(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

para el caso de dos dimensiones espaciales y para el caso del campo eléctrico E(x,y,t) la ecuación (5) se transforma a:

$$\frac{\partial^2 E(x, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E(x, z, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, z, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

Considerando que el campo eléctrico para el caso 2D - espacial, se propone $E(x,z,t) = E_0(x,z)\exp(-i\omega t)$ para el caso estacionario esto es que dicho campo no cambia con respecto al tiempo. Entonces la ecuación (6) es transformada a:

$$e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial z^2} + e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 e^{-i\omega t} E(x,z,t)_0}{\partial t^2} = \frac{-\omega^2 e^{-i\omega t}}{v^2} E(x,z,t)_0$$

o

$$\frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial x^2} + k^2 E(x,z,t)_0 = 0 \quad (7)$$

donde ω es la frecuencia, donde $k^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon(x,z)$ representa el número de onda y λ es la longitud de onda, aplicable para materiales no magnéticos determinados en el valor de $\mu = \mu_0$, donde también se ha obtenido la ecuación de Helmholtz, la cual es

$$\frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E(x,z,t)_0}{\partial x^2} + k^2 E(x,z,t)_0 = 0 \quad (8)$$

Ahora considerando la amplitud de campo eléctrico $E_0(x,z) = \mathbf{E}(x,z)e^{-i\beta z}$ y se sustituye en la ecuación de Helmholtz ecuación (8) entonces se obtiene;

$$\frac{\partial^2 e^{-i\beta z} \mathbf{E}(x,z)}{\partial z^2} + e^{-i\beta z} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,z)}{\partial x^2} + k^2 e^{-i\beta z} \mathbf{E}(x,z) =$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,z)}{\partial x^2} - 2i\beta \frac{\partial \mathbf{E}(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,z)}{\partial z^2} + (k^2 - \beta^2) \mathbf{E}(x,z) = 0 \quad (9)$$

donde β es una constante arbitraria, considerando el método de 'slow variation amplitude' lo cual permite hacer la aproximación siguiente

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2i\beta \frac{\partial \mathbf{E}(x,z)}{\partial z} \right|$$

por lo que se obtiene;

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x,z)}{\partial x^2} - 2i\beta \frac{\partial \mathbf{E}(x,z)}{\partial z} + (k^2 - \beta^2) \mathbf{E}(x,z) = 0 \quad (10)$$

donde para el caso particular en que el laser es un haz, entonces el numero de onda es una cantidad variable dada como; $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon(x,z)$, entonces la variacion deberá ser espacial y está dada como $\epsilon(x,z) = \epsilon_a + \delta\epsilon(x,z)$, donde la variación fotorefractiva deberá cumplir $\delta\epsilon(x,z) \ll \epsilon_a$. Donde $\epsilon(x,z)$ depende

del campo eléctrico E_{sc} y donde su representación matemática de $\delta\epsilon(x,z)$ estará determinada por tres diferentes mecanismos de la propagación del haz en el cristal fotorefractivo los cuales son Drift mechanism ver por ejemplos referencias [3], [4], el mecanismo de Difusión ver por ejemplo [5], [6] y por último el mecanismo Fotovoltaico ver por ejemplo referencia [7], mecanismos que permiten la formación de solitones espaciales y además el transporte de la carga espacial, lo cual dichos mecanismos de transporte son importantes para el caso particular del almacenamiento de la información que es para unas de las aplicaciones más importantes de los cristales fotorefractivos. Otros desarrollos recientes en cristales fotorefractivos para la formación de ondas superficiales pero por el efecto llamado efecto pyroeléctrico está desarrollado en [8].

GRABADO HOLOGRÁFICO

La modelación matemática para describir este fenómeno aún no está desarrollada, basándonos solo en que el campo eléctrico del espacio-carga esta dado sólo como $E_{sc}(\vec{r}, t)$, ver por ejemplo referencia [9], se sabe que existe por la misma teoría representadas por las ecuaciones de Kukhtarev o por resultados experimentales ya obtenidos, donde dicho sistema de ecuaciones aún no están resueltas.

El almacenamiento de información holográfica consiste en utilizar el efecto fotorefractivo para guardar los datos provenientes de un rayo láser que se incide sobre un material fotorefractivo, el rayo pasa por un separador de manera que queda dividido en dos haces: el de referencia y el de señal u objeto que sirve como transmisor de los datos.

La información es almacenada en un medio sensible a la luz en donde los haces de señal y referencia se interceptan formando un patrón de franjas claras y oscuras, dicho patrón abarca la información de amplitud y fase de los dos rayos, de tal modo que, al colocar un material fotorefractivo en el punto de interferencia de dichos haces, el modelo de interferencia queda grabado en el material.

La información es codificada en el haz objeto por un modulador de luz espacial (SLM, por sus siglas en inglés), el cual transforma la información o datos

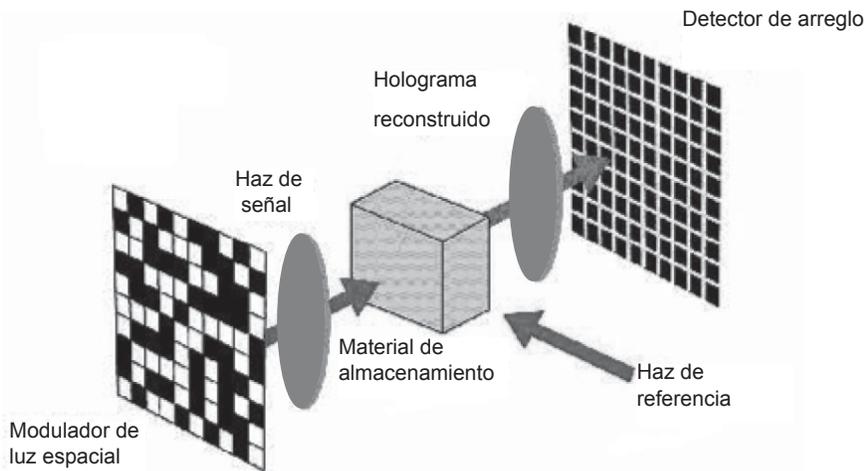


Fig. 3. Arreglo experimental de un modulador de luz para el proceso de grabado holográfico.

electrónicos en un patrón de píxeles claros y oscuros, dicha información es almacenada en páginas o arreglos muy grandes de información en 0s y 1s, la cual es acomodada en un arreglo similar a una tabla de ajedrez de aproximadamente 1 millón de bits.

El SLM (Modulador de Luz Espacial) es un dispositivo que sirve para el almacenamiento de los datos en el sistema en forma de una matriz de píxeles, cada píxel es como una persiana que deja o no pasar la luz, es decir, 0s y 1s mediante micro espejos o cristal líquido el cual tiene un poco menos de rendimiento. Tiene la capacidad de refrescar la información hasta 1,000 veces por segundo por ejemplo ver figura 3.

La figura 4 muestra el esquema general del funcionamiento de un SLM. Una reacción química ocurre en el medio de almacenamiento fotosensible cuando los elementos luminosos del haz de señal se difractan con el haz de referencia y se crea un holograma volumétrico. El proceso de grabado holográfico se da cuando al variar el ángulo de incidencia del haz de referencia, su longitud de onda o la posición del medio de almacenamiento, se pueden grabar varios hologramas en el mismo volumen del material de almacenamiento. Los datos son decodificados reflejando el haz de referencia so-

bre el material, éste haz es diseñado para reproducir la información dada por el haz de objeto, de dicho modo se reconstruye el holograma que fue almacenado. Un haz de referencia común es una onda plana, por ejemplo, un haz de luz que al propagarse no converge ni diverge.

Por otro lado, el proceso de lectura se da cuando el haz de referencia ilumina el patrón de interferencia en donde se encuentran los puntos claros y oscuros en el material fotorefractivo, lo anterior en ausencia del haz de señal, provoca que la luz se difracte en la misma dirección del haz objeto, así dichos puntos son interpretados por un dispositivo que transforma esta información holográfica en datos electrónicos digitales, por lo tanto la información original se reconstruye y el holograma que fue grabado se puede acceder.

El holograma almacenado se proyecta en un detector que se encarga de leer los datos en paralelo, esto quiere decir que un holograma puede colocar la información y ser accesada a la misma velocidad. Un sistema como éste tiene una rápida capacidad para la recuperación de datos debido a sus propiedades de multiplexación, es decir, que se utiliza el mismo medio para el grabado y/o transmisión de datos diferentes.

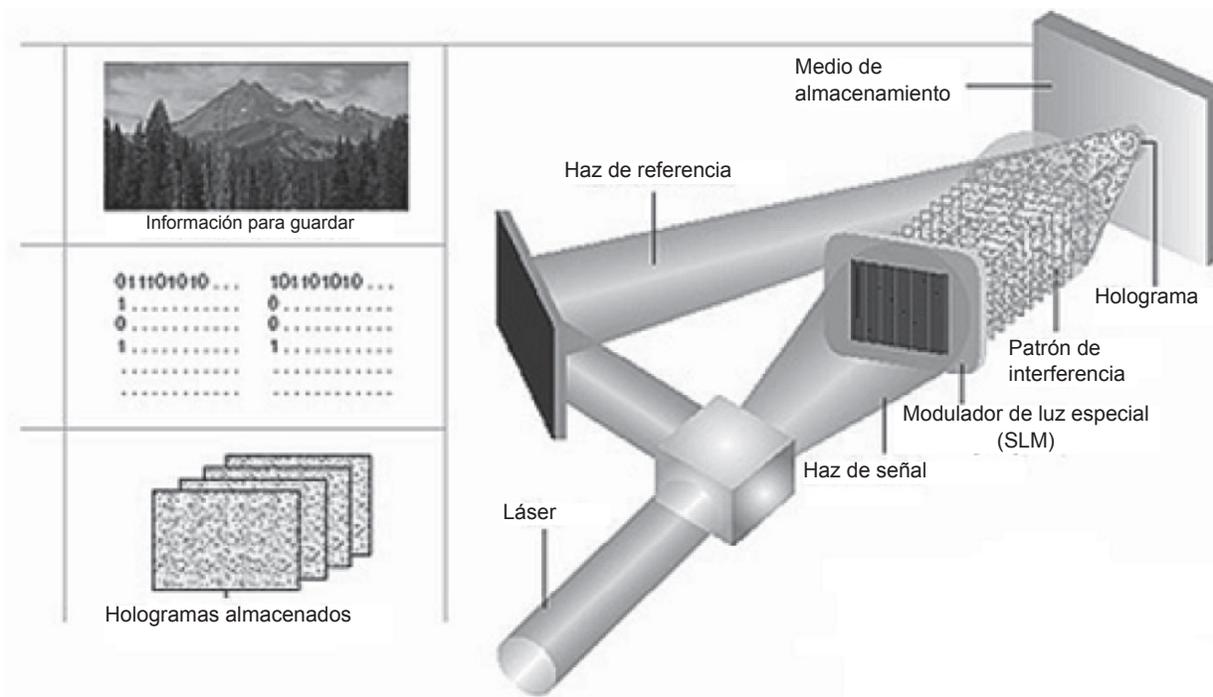


Fig. 4. Un arreglo particular para la formación de un holograma [10].

VENTAJAS

Una de las mejores ventajas del almacenamiento holográfico es la capacidad para guardar datos en los cristales fotorefractivos, su densidad potencial de almacenamiento es de hasta 1 TB de información en un centímetro cúbico, lo cual comparado con los 100 Kb por centímetro cuadrado de los dispositivos magnéticos actuales, es una gran diferencia la cual permite hacer más versátil el uso de la holografía como dispositivo de memoria.

Actualmente, en la práctica se han logrado guardar datos de en espacios bastantes pequeños, hasta el momento aún en desarrollo, tiene alta fiabilidad, permite almacenar ficheros de grandes dimensiones como los multimedia, los cuales se refieren al sonido, imagen, texto, etc.

La velocidad de acceso a los datos almacenados se realiza en milisegundos, permite una selección aleatoria de información, permite la recuperación en paralelo de los datos la cual puede llegar a 1 GB por segundo.

El almacenamiento de los datos es permanente, por lo que se puede utilizar para guardar copias de seguridad y respaldos de una manera muy eficiente, tiene la característica de multiplexación, esto quiere decir que se pueden grabar varios hologramas a la vez en el mismo material sin verse afectados o interferidos. Tiene bajo costo de almacenamiento debido al ahorro en el espacio.

DESVENTAJAS

Alto costo comercial, lo que por el momento lo hace poco competitivo en el mercado, la regrabación es una de las desventajas de este tipo de dispositivo, ya que no se puede modificar sólo una parte del holograma porque cada uno tiene un ángulo, intensidad y forma de grabación por lo que no se puede regrabar por partes, por ser una tecnología nueva, no hay normas que lo estandaricen o regulen. Aún no son producidos en grandes cantidades.

Uno de varios trabajos recientes para la formación de rejillas holográficas está desarrollado en [11].

CONCLUSIONES

Un problema importante en la formación de solitones, el grabado holográfico y otras aplicaciones experimentales y teóricas en los cristales fotorefractivos es el diseño de los experimentos que generen esos efectos como también la solución al modelo matemático que describen estos fenómenos físicos los cuales son no lineales.

Actualmente en diversas Instituciones y Centros de Investigación Nacionales de gran importancia, se investiga en las diversas aplicaciones científicas en los cristales fotorefractivos, como por ejemplo En la UACJ, UNAM; IPN, BUAP, CICESE, CIICAP-UAEM, UAG, INAOE, CIO, UAG, FIMEE-Depto. de Electrónica, Universidad de Guanajuato, Universidad de las Américas-Puebla, indiscutiblemente en diferentes institutos de diferentes países alrededor del mundo. Por lo que es un problema científico en desarrollo tecnológico e industrial.

REFERENCES

- [1] http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html
- [2] N. V. Kukhtarev, V. B. Markow, S. G. Odoluv, M. S. Soskin and V. L. Vinetskii, Holographic storage in electro optic crystals, *Ferroelectrics* 22 (1979) 949-960.
- [3] M. P. Petrov, I. A. Sokolov, S. I. Stepanov, and G. S. Trofimov, .Non-steady-state photo-electromotive force induced by dynamic gratings in partially compensated photo- conductors,. *J. Appl. Phys.* 68, 2216-2225 (1990).
- [4] I. Sokolov and S. Stepanov, .Non-steady-state photo-electromotive force in crystals with long photo carriers lifetimes. *JOSA B*, 8, 1483-1488 (1993).
- [5] R. Torres-Cordoba, J. J Sanchez Mondragon, V. A. Vysloukh, .Propagation of spatial surface waves along the interface of photorefractive crystals., *J. Opt. Soc. Am. B.* 18 1 (2001).
- [6] Rafael Torres-Cordoba, Propagation of a photo-induced surface wave along an ideal metal-photorefractive crystal interface, *Revista Mexicana de Física* agosto 2005
- [7] T. H. Zhang a, B. H. Wang, X. K. Ren, W. W. Shao, Y. H. Xu, Z. J. Hu, H. Z. Kang, J. Yang , L. Feng, F. Jia, R. Guo, J.J. Xu a Influence of the external field on photorefractive surface waves, *Optics Communications* 265, 649-654 (2006).
- [8] Jassem Safioui, Eugenio Fazio Devaux and Mathieu Chauvet, Surface-wave pyroelectric photorefractive solitons, *Optics Letters*, vol. 35, 1254-1256, (2010).
- [9] Mehran Vahdani Moghaddam, Zeynab Chenari1, Hamid Lati., Vladimir Vladimirovich Shuvalov, Konstantin Valentinovich Rudenko, Numerical Simulation of Self-Pumped Phase Conjugate Plane-Curve Loop Mirror Based on Photorefractive Nonlinearity, *Chin. Phys. Lett.* Vol. 25, No. 8 2888 (2008).
- [10] http://inphase-technologies.com/technology/default.asp?subn=2_1.
- [11] Emilio J. Ambite and Luis Arizmendi, Feedback-controlled recording and fixing of photorefractive holograms in reflection geometry on lithium niobate crystals, vol. 28 issue 5, 1161-1167, *JOSA B* (2011).

■ ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Ecuaciones diferenciales parciales, el método del elemento finito y una aplicación a las matemáticas financieras: la ecuación de Black-Scholes

Francisco Ávila Álvarez¹, Víctor Hugo Jiménez Nava²

RESUMEN

Muchos procesos físicos en la naturaleza que el ser humano desea entender, predecir y hasta controlar pueden ser descritos por ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden resolver de manera analítica. En algunas ocasiones, ni siquiera se puede asegurar la existencia de una solución única, es por esto que en muchos de los casos la única manera de resolver problemas concretos que surgen en la ingeniería, en economía o en la ciencia en general es a través de soluciones numéricas. La herramienta más general y eficiente para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es el Método del Elemento Finito, el cual se ha empleado usando, en la mayoría de los casos, funciones de forma lineales o cuadráticas debido a que ha sido relativamente fácil su implementación. Sin embargo, en la actualidad los elementos de orden superior han incrementado su popularidad debido a su excelente capacidad de aproximación y la reducción significativa en el cálculo computacional. Desafortunadamente, la teoría necesaria para implementar un algoritmo para resolver numéricamente una ecuación diferencial es muy complicada y los programas dedicados a este fin son muy costosos. Nuestro grupo de investigación se encuentra desarrollando un software libre para la solución numérica de estas ecuaciones y con el afán de mostrar una idea general de lo que involucra resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, empleando toda esta herramienta disponible de manera gratuita, decidimos presentar un problema de economía utilizando elementos de orden superior, lo que le da originalidad a la implementación. En este trabajo consideramos un problema de valor en la frontera para una ecuación diferencial no lineal que surge en un modelo de fijación de precios de opciones con costos de transacción. Se presentarán las soluciones obtenidas mediante el método de soluciones superiores e inferiores y se implementará el Método del Elemento Finito de Orden Superior en Hermes2D.

¹ M. en C. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Mexicano, fcoavila@prodigy.net.mx.

² Lic. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Mexicano, vhhjimenez@utep.edu.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos procesos naturales que son importantes pueden ser descritos en un nivel macroscópico, sin tomar en cuenta el comportamiento individual de moléculas, átomos y otras partículas. Las cantidades macroscópicas tales como la deformación, densidad, velocidad, presión, temperatura, concentración o campos electromagnéticos son gobernadas por las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs). Estas ecuaciones también constituyen el lenguaje básico para la formulación de la mayoría de los problemas científicos o de ingeniería. En el área de las finanzas, la ecuación de Black-Scholes tiene muchas soluciones, que dependen de las condiciones iniciales y de frontera, y que corresponden a la multitud de posibles instrumentos derivados financieros. En muchos casos prácticos, los procedimientos no permiten una solución analítica, y se hace necesario recurrir a métodos numéricos. La herramienta más popular y poderosa en la solución numérica de EDPs es el método del elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés). El método del elemento finito de orden superior (hp-FEM) es una versión moderna del FEM que combina elementos de diámetro variable así como polinomios de grado variable para obtener una rápida convergencia. Hermes2D es una librería modular C++ que contiene algoritmos hp-FEM espacio y espacio-tiempo adaptables, cuyo propósito es facilitar el uso de hp-FEM para aplicaciones prácticas. En este trabajo consideramos un problema de valor en la frontera para una ecuación diferencial no lineal que surge en un modelo de fijación de precios

de opciones con costos de transacción. Se presentarán las soluciones obtenidas mediante el método de soluciones superiores e inferiores y se implementará el Método del Elemento Finito de Orden Superior de Hermes2D.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchos fenómenos físicos pueden ser modelados matemáticamente. Las maneras de modelar dicho fenómeno pueden ser varias ya que la descripción del fenómeno se plantea desde diferentes puntos de vista según alguna rama de la matemática. Las ecuaciones diferenciales ordinarias modelan una gran cantidad de fenómenos tanto físico como químicos y de otra índole. El problema es que no bastan para modelar la amplia gama de fenómenos en su totalidad, para esto necesitamos otro tipo de ecuaciones que son las llamadas ecuaciones diferenciales parciales. Una ecuación diferencial parcial es aquella en la cual se ven involucradas derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a sus variables independientes. En general las ecuaciones diferenciales parciales sirven para modelar cantidades macroscópicas tales como deformación, densidad, velocidad, presión, temperatura, etcétera.

Si Ω es un conjunto abierto conexo contenido en \mathbb{R}^d , $d = 2,3$. Una forma suficientemente general de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en n variables independientes $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ es

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_i} (b_i u) + c_i \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) + a_0 u = f \quad (1)$$

$$a_{ij} = a_{ij}(z), b_i = b_i(z), c_i = c_i(z), a_0 = a_0(z) \text{ y } f = f(z)$$

Para todas las derivadas que existen en la forma convencional. La solución y los coeficientes deben satisfacer ciertas condiciones

$$: u \in C^2(\bar{\Omega}), a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), b_i \in C^1(\bar{\Omega}), c_i \in C^2(\bar{\Omega}), a_0 \in C(\bar{\Omega}), f \in C(\bar{\Omega})$$

Considerando la matriz de coeficientes simétricos $A(z) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ correspondiente a la ecuación diferencial de segundo orden.

1. La ecuación se dice elíptica en un punto $z \in \mathbb{R}^n$ si $A(z)$ es positiva definida.

2. La ecuación se dice parabólica en un punto $z \in \mathbb{R}^n$ si $A(z)$ es positiva semidefinida, pero no positiva definida y el rango de $(A(z), b(z), c(z))$ es igual a n .

3. La ecuación se dice hiperbólica en un punto $z \in \mathbb{R}^n$ si $A(z)$ tiene un eigenvalor negativo y $n - 1$ eigenvalores positivos.

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse de una forma más: aquéllas que son dependientes del tiempo y aquéllas que no lo son. Si la ecuación es independiente del tiempo es $n = d$ y $z = x$, donde d es la dimensión del espacio y x la variable del espacio. Esto ocurre seguido con las ecuaciones elípticas. Con las ecuaciones hiperbólicas frecuentemente ocurre que las cantidades o magnitudes dependan del tiempo; ahí tendríamos $n = d + 1$ y $z = (x, t)$, donde el par ordenado (x, t) con componentes x y t y representan la variable del espacio y el tiempo respectivamente. En ese caso el dominio \mathcal{D} representa algún dominio de espacio tiempo. Es costumbre, por ejemplo en el caso de una ecuación elíptica, escribir en forma compacta como

$$Lu = f$$

donde L es el operador diferencial elíptico de segundo orden y está definido como

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_i} (b_i u) + c_i \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) + a_0 u$$

La parte de L con las derivadas de orden superior

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

es llamada la parte principal de L .

2.1 Espacios de Funciones Importantes

Los espacios L^p juegan un rol central en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. Los espacios L^p son espacios de Banach y de estos, son sin dudarlos de los más importantes. Uno de los propósitos al definir los espacios L^p es controlar las singularidades de una función, así como controlar la rapidez de decaimiento en conjuntos no acotados. Los espacios de Sobolev son subespacios de los espacio L^p . Así como estos últimos controlan las singularidades y tasa de decaimiento de una función en conjuntos no acotados, los espacios de Sobolev tratan de tener control de las derivadas. Estos espacios son de creación relativamente nueva. Fueron introducidos en 1930 por Sergei Lvovich Sobolev, gran matemático ruso que influyó mucho en el análisis y solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Un Multi-índice es un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ que consiste de enteros no negativos, donde d es la dimensión del espacio. Por $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ denotamos la longitud del multi-índice. Sea f una función continuamente diferenciable m veces. Definimos la α -ésima derivada parcial de f como

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

El espacio de distribuciones está definido por

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty, \text{supp}(\phi) \subset \Omega \text{ es compacto}\}$$

donde definimos

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega: \phi(x) \neq 0\}}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es abierto y $1 \leq p \leq \infty$, la función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente p -integrable en Ω si para cada $x \in \Omega$ existe una bola abierta $B(x, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ tal que $f \in L^p(B(x, \epsilon))$. Si f es localmente p -integrable escribiremos $f \in L_{loc}^p(\Omega)$.

Diremos que la función $D_\omega^\alpha \in L_{loc}^p(\Omega)$ es la α -ésima derivada débil de f si $\int_\Omega D_\omega^\alpha \phi = (-1)^\alpha \int_\Omega f D^\alpha \phi dx$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p$ tal que para cada multi-índice $\alpha \leq k$, la derivada débil $D_\omega^\alpha f$ existe y está en $L^p(\Omega)$. Para cada $1 \leq p < \infty$ la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ está definida como

$$\|f\|_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{\alpha \leq k} D^\alpha f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\alpha \leq k} D^\alpha f_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{k,p} = \max_{\alpha \leq k} D^\alpha f_\infty$$

Para el caso especial $p = 2$ abreviamos $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Finalmente, recordemos que el espacio Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con el producto interno

$$(f, g)_{k,2} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)} \quad (2)$$

es un espacio de Hilbert y que las funciones continuas también son densas en los espacios de Sobolev.

Un subespacio de uso frecuente es $H_0^k(\Omega)$ que se define como la cerradura en $H^k(\Omega)$ del espacio $C_c^\infty(\Omega)$, aunque en algunos textos lo definen

simplemente como

$$H_0^k(\Omega) = \{v \in H^k(\Omega); D^\alpha v = 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ para todo } |\alpha| < k\}. \quad (3)$$

En estos espacios ocurre seguido que las formulaciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales toman lugar.

3. PROBLEMAS PARABÓLICOS DE SEGUNDO ORDEN

A nosotros nos concernirá la aplicación de las ecuaciones parabólicas en la fórmula de Black-Scholes, razón por la cual debemos ahondar un poco más en su estudio. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio abierto con frontera Lipschitz-continua. La clase de ecuaciones lineales parabólicas representada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \text{ en } \Omega \quad (4)$$

donde t es tiempo, $u = u(x, t)$, $f = f(x, t)$ y L es un operador elíptico de la forma (1) con coeficientes independientes del tiempo. La ecuación (4) es considerada en un conjunto de espacio-tiempo $Q_T = \Omega \times (0, T)$, donde $T > 0$.

3.1 Condiciones iniciales y de frontera

Por simplicidad denotemos los casos de Dirichlet, Neumann, Newton de la forma siguiente

$$(B_u)(x, t) = g(x, t) \text{ para todo } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (5)$$

Los problemas parabólicos describen procesos evolucionarios respecto al tiempo y de ese modo es necesario proveer con condiciones iniciales de la forma

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ para toda } x \in \Omega. \quad (6)$$

3.2 Formulación débil

En cualquier instante de tiempo t la solución se busca en un subespacio cerrado $V \subset H^1(\Omega)$ tal que

$H_0^1(\Omega) \subset V$. Para el análisis de existencia y unicidad de la solución necesitamos introducir funciones del espacio y normas para funciones dependientes del tiempo.

Definición 1. Por $L^q(0, T; W^{k,p}(\Omega))$ denotamos al espacio

$$L^q(0, T; W^{k,p}(\Omega)) = \{u : (0, T) \rightarrow W^{k,p}(\Omega); \\ u \text{ es medible y } \int_0^T \|u(t)\|_{k,p,\Omega}^q dt < \infty\}$$

Con la norma

$$\|u(t)\|_{L^q(0,T;W^{k,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{k,p,\Omega}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Aquí $u(t)$ es una función de x con la regla $x \rightarrow u(x, t)$. Además definimos el espacio

$$C([0, T]; L^p(\Omega)) = \{u: [0, T] \rightarrow L^p(\Omega); \\ \|u(t)\|_{p,\Omega} \text{ es continua en } [0, T]\}. \quad (7)$$

De forma análoga, usando la $W^{k,p}$ -norma en Ω definimos el espacio

$$C([0, T]; W^{k,p}(\Omega)) \\ = \{u: [0, T] \rightarrow W^{k,p}(\Omega); \|u(t)\|_{k,p,\Omega} \text{ es continua en } [0, T]\}. \quad (8)$$

Formulación débil. Tratando de imitar los pasos del caso elíptico para la formulación débil del problema (4)-(5)-(6), supondremos lo siguiente

$$a_{ij}, b_{ij}, c \in L^\infty(Q_T) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (9)$$

$$f \in L^2(Q_T) \quad (10)$$

$$u_0 \in L^2(\Omega) \quad (11)$$

donde la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ correspondiente al operador elíptico (1), está dada por:

$$a(u, v, t) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d b_i(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\cdot, t) uv \right] dx$$

Haciendo analogía con el caso elíptico hemos agregado la variable t , haciendo de forma explícita que la forma bilineal dependa del tiempo. Daremos una definición de operador diferencial parabólico que nos servirá más adelante.

Definición 2. Decimos que el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ es parabólico si existe una constante $\theta < 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (13)$$

para todo $(x, t) \in Q_T, \xi \in \mathbb{R}^d, \xi_i \xi_j \in \mathbb{R}$.

Nótese en particular que para cada tiempo fijo $0 \leq t \leq T$ el operador L es uniformemente elíptico en la variable x .

4. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

En muchas situaciones, derivar las ecuaciones que describen un fenómeno natural o algún otro proceso no resulta difícil, sin embargo, resolverlas por medio de métodos exactos de análisis es una tarea compleja. En éstos casos, los métodos de aproximación representan una alternativa para encontrar soluciones. Se pueden considerar formulaciones variacionales (o débiles) lo cual consiste en transformar la ecuación diferencial en una forma variacional equivalente. Entonces se asume que la solución aproximada es una combinación $(\sum c_j \phi_j)$ de las funciones de aproximación ϕ_j dadas. Los coeficientes c_j son determinados a partir de la forma variacional. El método del elemento finito provee un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones de aproximación. El método tiene dos características básicas muy importantes: en primer lugar, un dominio geoméricamente complejo es representado como una colección de subdominios simples, llamados elementos finitos; segundo, so-

bre cada elemento finito se derivan las funciones de aproximación utilizando la idea básica de que cualquier función continua puede representarse como una combinación lineal de polinomios y usando conceptos de interpolación. De esta manera el método del elemento finito puede interpretarse como una aplicación a trozos de los métodos variacionales, en donde las funciones de aproximación son polinomios y los parámetros a determinar representan los valores de la solución en un número finito de puntos preseleccionados, llamados nodos, en la frontera y en el interior del elemento.

Al implementar el método del elemento finito, deben de considerarse muchos detalles. Algunos de ellos se presentan a continuación:

1. El dominio es representado como una colección finita de subdominios (elementos), que pueden ser triángulos, cuadriláteros, etc. Éste proceso se llama discretización del dominio. Dependiendo su forma, pueden utilizarse ya sea triángulos o rectángulos o diferentes tipos de elementos a la vez. A la colección de elementos se le conoce como malla.
2. Si se utiliza más de un tipo de elemento, cada tipo de elemento debe ser aislado para analizar sus propiedades.
3. En muchas situaciones, las ecuaciones no pueden ser resueltas sobre un elemento por dos razones. Primero, las ecuaciones no permiten solución exacta; es en estos casos donde los métodos variacionales tienen lugar. Segundo, las ecuaciones discretas obtenidas con los métodos variacionales no pueden ser resueltas de manera independiente (sin considerar el resto de los elementos) debido a que el ensamblaje de elementos está sujeto a ciertas condiciones de frontera y/o condiciones iniciales.
4. Hay dos grandes diferencias en la forma de la solución aproximada usada en el método del elemento finito y la usada en los métodos variacionales clásicos. Primero, en lugar

de representar la solución u como una combinación lineal ($u = \sum c_j \phi_j$) en términos de parámetros arbitrarios c_j como es el caso en los métodos variacionales, en el método del elemento finito, la solución se representa como una combinación lineal ($u = \sum u_j \psi_j$) en términos de los valores u_j de u en los puntos nodales o nodos. Segundo, las funciones de aproximación en el método del elemento finito son polinomios que se derivan usando teoría de interpolación.

5. Se consideran principalmente tres fuentes de error en una solución: (a) errores debido a la aproximación del dominio, (b) errores debidos a la aproximación de la solución y (c) errores debidos a los cálculos numéricos.
6. La exactitud y convergencia de la solución depende de la ecuación diferencial resuelta o de la forma variacional y del elemento utilizados.
7. Para problemas dependientes del tiempo, se sigue una formulación en dos etapas. En la primera etapa, las ecuaciones diferenciales son aproximadas por el método del elemento finito para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable temporal. En la segunda etapa, estas ecuaciones diferenciales se resuelven de manera exacta o se aproximan ya sea por métodos variacionales o mediante métodos de diferencias finitas para obtener ecuaciones algebraicas que finalmente serán resueltas.

Formalmente, el elemento finito es una terna $\kappa = (K, P, \Sigma)$ donde

- K es un dominio en \mathbb{R}^d que en nuestro caso para $d = 1$ serán intervalos, $d = 2$ cuadriláteros (o triángulos) y $d = 3$ prismas.
- P es un espacio de polinomios en K de dimensión $\dim(P) = N_p$.
- $\Sigma = \{L_1, L_2, \dots, L_{N_p}\}$ es un conjunto de formas lineales.

$$L_i: P \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N_P$$

Los elementos de Σ son llamados los grados de libertad.

Luego, asumiendo que el dominio Ω , donde el problema en cuestión es investigado, es acotado con frontera Lipschitz-Continua, éste será aproximado con un dominio Ω_h cuya frontera se una función polinomial a trozos.

La malla del elemento finito $T_{h,p} = \{K_1, \dots, K_M\}$ sobre un dominio $\Omega_h \subset \mathbb{R}^d$ con frontera polinomial definida a trozos es una división geométrica de Ω_h en un número finito de celdas abiertas poligonales que no se traslapan entre sí tales que:

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^M \bar{K}_i$$

Cada celda K_i , $1 \leq i \leq M$ está equipada con un polinomio de orden $1 \leq p(K_i) = p_i$.

Para aproximaciones de funciones lineales definidas a trozos, los grados libertad están usualmente asociados con los valores de la solución en los vértices de la rejilla y la fórmula variacional puede ser evaluada directamente en la rejilla. La información cambia en forma drástica con elementos finitos de orden mayor ya que usan una gran cantidad de información que se traslapa y para que dicha información sea manejada se requiere más estructura. Para discretizaciones del elemento finito, las celdas de la malla $K_i \in T_{h,p}$ son mapeos de referencia sobre un dominio de referencia K por medio de mapeos de referencia suaves y biyectivos $x_{K_i}: K \rightarrow K_i$

$$(14)$$

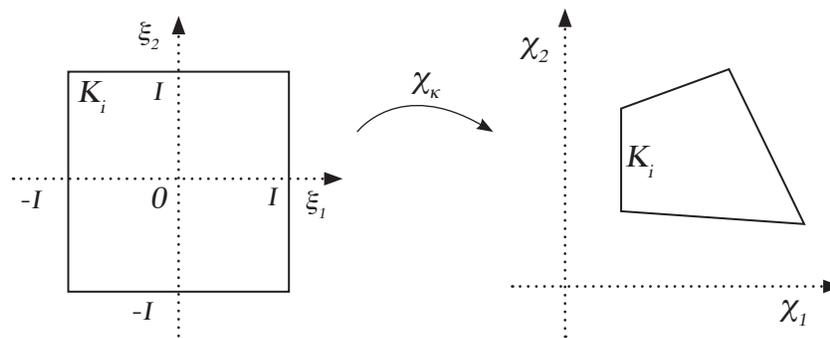


Figura 1: Un ejemplo de un mapeo de referencia en el caso cuadrilateral en 2D.

Estos mapeos x_K junto con los espacios de polinomios en el dominio de referencia K , serán usados para definir el espacio de funciones $V_{h,p}(\Omega_h)$.

4.1 Discretización y Aproximación de las Formas Débiles

Consideremos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con frontera Lipschitz-Continua, una ecuación diferencial parcial por ser resuelta en Ω y una serie de condiciones de frontera convencionales. Multiplicando la ecuación diferencial parcial por una función prueba v de un espacio considerable V , integrando sobre Ω y aplicando la fórmula de Green uno obtiene una formulación variacional

$$L(u^* + \bar{u}, v) = f(v) \text{ para todo } v \in V$$

Ambas formas se asumen lineales en v . Si tenemos las condiciones de frontera de Dirichlet la solución $u^* + \bar{u}$ se busca en un espacio de funciones afín el cual es diferente de V . La función lift u^* se escoge para satisfacer las condiciones de Dirichlet no homogéneas. Solamente se busca la componente \bar{u} que satisface las condiciones homogéneas de Dirichlet. Todas las funciones $v \in V$ son cero en cualquier parte de la frontera de Ω .

Al resolver una ecuación diferencial parcial utilizando el método del elemento finito, se procederá de la siguiente manera:

Paso 1. Se aproxima el dominio Ω con otro dominio Ω_h que sea más conveniente para la malla y la discretización.

Paso 2. Se cubre el dominio Ω_h con una malla del elemento finito $T_{h,p}$. Se escogen apropiados dominios de referencia para todos los tipos geométricos de elementos y para cada $K \in T_{h,p}$ se construye un mapeo de referencia biyectivo suave x_K .

Paso 3. Se aproxima el espacio V , usando espacios de polinomios apropiados en los dominios de referencia y los mapeos de referencia, por un espacio más conveniente $V_{h,p} = \text{gen}\{v_2, \dots, v_N\}$.

Paso 4. Se aproxima la forma L por otra forma $L_{h,p}$ que reemplace la integración exacta sobre Ω y sobre la $\partial\Omega$ por una integración numérica sobre Ω_h y $\partial\Omega_h$.

Paso 5. Se aproxima la forma lineal f por otra forma lineal $f_{h,p}$ en la misma forma que el paso 4.

Paso 6. Llegamos ahora a una nueva formulación variacional de aproximación: la solución $u_{h,p}$ se busca en la forma $u_{h,p} = u_{h,p}^* + \bar{u}_{h,p}, \bar{u}_{h,p} \in V_{h,p}$ satisfaciendo

$$L_{h,p}(u_{h,p}^* + \bar{u}_{h,p}, v_{h,p}) = f_{h,p}(v_{h,p}) \quad (15)$$

para todo $v_{h,p} \in V_{h,p}$.

Paso 7. Se expresa la función $\tilde{u}_{h,p}$ como una combinación lineal de las funciones base v_i del espacio $V_{h,p}$ con coeficientes desconocidos y_i ,

$$u_{h,p}(x) = u^*(x) + \tilde{u}_{h,p}(x) + \sum_{j=1}^N y_j v_j(x) \quad (16)$$

Paso 8. Pongamos la construcción (16) en la forma débil aproximada (15) y seleccionemos $u_{h,p} = u_i, i = 1, 2, \dots, N$.

$$L_{h,p} \left(\tilde{u}_{h,p} + \sum_{j=1}^N y_j v_j, v_i \right) = f_{h,p}(u_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

Paso 9. Resolvamos el sistema (17) para los coeficientes desconocidos de $\tilde{u}_{h,p}$ con una adecuada técnica numérica.

5. LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

Ahora mostraremos una aplicación del método del elemento finito y de la librería Hermes que es usada con el lenguaje de programación C++. La aplicación será resolver la ecuación de Black-Scholes, que da el precio de una opción de venta o compra sujeta a un número n de activos o bienes. El término Black-Scholes podemos asociarlo a:

- Un modelo matemático el cual modela el precio de una opción. Una opción, ya sea de compra o de venta, da el derecho al propietario mas no la obligación de poder comprar o vender cierto bien que está sujeto a la opción.
- Podemos entenderlo también como una ecuación diferencial parcial estocástica. Ésta debe ser satisfecha por la variable que representa el precio de la opción. Esta variable es un proceso estocástico. Podemos entender un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias.
- También el término hace referencia a la fórmula obtenida al resolver la ecuación diferencial parcial estocástica mencionada anteriormente.

El primer trabajo de la deducción de la fórmula de Black-Scholes tiene un complicado fundamento matemático. La primera aparición de un artículo haciendo una descripción más simple del trasfondo matemático en la deducción de la ecuación de Black-Scholes fue publicada por Robert C. Merton. Él en realidad lo que hizo fue detallar el trabajo de Fisher Black y Myron Scholes. Black y Scholes ganaron el premio Nobel por su trabajo en este campo. En la actualidad, no se utiliza este modelo

pero su importancia radica en que la novedad en la manera de analizar y modelar el comportamiento del precio de una opción.

El modelo de Black-Scholes es un modelo de tiempo-continuo que involucra tanto un bien libre de riesgo como un bien de riesgo. El precio del bien de riesgo S_t^0 satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS_t^0}{dt} = r(t)S_t^0$$

donde $r(t)$ es una tasa de interés instantánea. Haciendo $S_0^0 = 1$, encontramos que

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r(\tau) d\tau}, \text{ y } S_t^0 = e^{rt} \text{ si } r \text{ es constante}$$

Por otra parte si S^t es el precio del bien de riesgo bajo una probabilidad \mathbb{P} y la filtración F_t , éste satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

donde μ es una tasa promedio del crecimiento del precio del bien llamado el montón, B_t es un movimiento Browniano estándar en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y σ es la volatilidad. Aquí la volatilidad σ puede depender del precio y del tiempo. Entonces tendríamos $\sigma = \sigma(S_t, t)$. Asumiendo que las funciones $\sigma(S_t, t)$ y $r(t)$ son continuas no negativas y acotadas en sus respectivos dominios y que la función $S \rightarrow S_\sigma(S_t, t)$ es Lipschitz-Continua con una constante independiente de t , se puede demostrar (ver [3]) que bajo las suposiciones anteriores existe una probabilidad \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} tal que $W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r(s)}{\sigma_s} dS$ es un movimiento browniano estándar y el precio de la opción con pago P_0 y madurez T está dado por

$$\phi(S_t, t) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} P_0(S_T) \middle| F_T \right) \quad (18)$$

(F_T es la filtración natural de W_T)

5.1 La deducción de la ecuación diferencial parcial

Es posible relacionar la función ϕ dada por (18) a la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica.

Proposición 1. Asumamos que las funciones $\sigma(S_t, t)$ y $r(t)$ son continuas no negativas y acotadas, así como continuas no negativas y acotadas, en $\mathbb{R}_+ \times [0, T]$ y $[0, T]$, y que $S \mapsto S_\sigma(S, t)$ es Lipschitz-continua con una constante independiente de t . Entonces para cualquier función continua u cuya regla de asignación es $(S, t) \mapsto u(S, t)$ en $\mathbb{R}_+ \times [0, T]$ y tal que $S \frac{\partial u}{\partial S} \leq C(1 + S)$ con C independiente de t , el proceso

$$M_t = e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} u(S_t, t) - \int_0^t e^{-\int_0^\tau r(v) dv} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(S_\tau, T) + L_\tau u(S_\tau, T) \right) d\tau$$

Es una martingala bajo F_t , donde L_t es el operador diferencial

$$L_t f(S) = \frac{\sigma^2(S_t, t) S^2}{2} \frac{d^2}{dS^2} f(S) + r(t) S \frac{d}{dS} f(S)$$

Demostración 1. De las suposiciones sobre r y σ , sabemos que S_t es un proceso cuadrado integrable, esto es $\mathbb{E}^*(S_t^2) < \infty$. Gracias a la fórmula de Ito's

$$\begin{aligned} & d \left(e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} u(S_t, t) \right) \\ &= \left(-r(t) u(S_t, t) + \frac{\partial}{\partial t} u(S_t, t) + r S_t \frac{\partial}{\partial S} u(S_t, t) \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma^2(S_t, t) S_t^2}{2} \frac{d^2}{dS^2} u(S_t, t) \right) e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} dt \\ &+ \sigma(S_t, t) S_t \frac{\partial}{\partial S} u(S_t, t) e^{-\int_0^t r(s) ds} dW_t \end{aligned}$$

Lo cual según la definición de M_t ,

$$dM_t = \sigma(S_t, t) S_t \frac{\partial}{\partial S}(S_t, t) e^{-\int_0^t r(s) ds} dW_t$$

Por tanto M_t es una martingala y debido a las suposiciones sobre σ y u ,

$$\mathbb{E}^* \left(\int_0^t \left| \sigma(S_T, T) S_T \frac{\partial}{\partial S} u(S_T, T) \right| dT \right)$$

$$\text{y } \mathbb{E}^*(M_t | F_t) = M_t.$$

Teorema 1. Asumamos que σ y r son continuas, no negativas y acotadas, y que $S \mapsto S_\sigma(S, t)$ es Lipschitz-continua con una constante independiente de t . Consideremos una función $F: \mathbb{R}_+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $\mathbb{R}_+ \times [0, T]$ y C^1 regular con respecto a S en $\mathbb{R}_+ \times [0, T]$, tal que $\left| S \frac{\partial F}{\partial S} \right| \leq C(1 + S)$ con C independiente de t . Asumamos que P satisface

$$\frac{\partial}{\partial t} P(S, t) + \frac{\sigma^2(S, t) S^2}{2} \frac{d^2}{dS^2} P(S, t) + r(t) S \frac{\partial}{\partial S} P(S, t) - r(t) P(S, t) = 0 \quad (19)$$

y

$$P(S, T) = P_0(S), S \in \mathbb{R}_+ \quad (20)$$

Entonces con ϕ dado por (18), tenemos que $\phi = P$.

Demostración 2. Aplicando la proposición (1) anterior a $u = P$, la solución a (19), (20) tenemos

$$\mathbb{E}^* \left(e^{\int_0^T r(s) ds} P_0(S_T) \middle| F_T \right) = e^{-\int_0^T r(s) ds} P(S, t)$$

lo cual da el resultado que queríamos. Para ahondar más en los detalles de esta deducción ver [3].

Ahora bien, si tenemos dos bienes cuyos precios son S_1 y S_2 asumimos que dichos bienes subyacentes obedecen al siguiente sistema de ecuacio-

nes diferenciales estocásticas

$$\begin{aligned} dS_{1t} &= S_{1t}(\mu_1 dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}}(dW_{1t}) + \rho dW_{2t}) \\ dS_{2t} &= S_{2t}(\mu_2 dt + \frac{\sigma_2}{\sqrt{1+\rho^2}}(dW_{1t}) + \rho dW_{2t}) \end{aligned}$$

donde como antes W_{1t} y W_{2t} son dos movimientos Brownianos estándar independientes y σ_1, σ_2 son constantes positivas. El parámetro ρ es el factor de correlación y cumple $-1 < \rho < 1$. Consideremos una función de pago $F_0(S_1, S_2)$. De forma análoga al caso de un solo activo, es posible encontrar una probabilidad \mathbb{P}^* con la cual el precio de la opción es

$$F(S_{1t}, S_{2t}, t) = d^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(F_0(S_{1t}, S_{2t}) | F_t)$$

Se puede aplicar la fórmula de Ito's para dos dimensiones y encontrar la ecuación diferencial parcial para el precio de la opción $F(S_1, S_2, t)$; reemplazando el tiempo por el tiempo de madurez. Y la ecuación diferencial queda:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2^2} + \frac{1}{2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2} \rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 S_2 S_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2 \partial S_1} \\ + r S_1 \frac{\partial F}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial F}{\partial S_2} - r F = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

Sujeta a

$$F(S_1, S_2, 0) = F_0(S_1, S_2), (S_1, S_2) \in \Omega F(S_1, S_2, t) = 0 \quad (22)$$

para un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Introducimos el siguiente espacio de Hilbert en el conjunto $Q = \mathbb{R}_+^2$

$$V = \left\{ v: v, S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1}, S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \in L^2 Q \right\} \quad (23)$$

con la norma

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Uno puede comprobar las siguientes propiedades:

- El espacio $\mathcal{D}(Q)$ de funciones con soporte compacto y suaves en Q es denso en V .
- V es separable.
- La seminorma $|\cdot|_V$ definida por

$$|v|_V^2 = \left\| S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \right\|_{L^2(Q)}^2$$

es de hecho una norma en V equivalente a $\|\cdot\|_V$ ya que $\|v\|_{L^2(Q)} \leq 2|v|_V$.

Entre las funciones de pago podemos citar

$$F_0(S_1, S_2) = (K - (S_1 + S_2))_+ \\ F_0(S_1, S_2) = (K - \max(S_1, S_2))_+$$

En lo que sigue nos enfocaremos en la teoría de la formulación débil de (24) y (25) la cual aplica para $F_0 \in L^2(Q)$. Introducimos la forma bilineal

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial v}{\partial S_1} \frac{\partial w}{\partial S_1} + \frac{1}{2} \rho_{12} S_1 S_2 \frac{\partial v}{\partial S_1} \frac{\partial w}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \rho_{21} S_2 S_1 \frac{\partial v}{\partial S_2} \frac{\partial w}{\partial S_1} \\ + \frac{1}{2} S_1^2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \frac{\partial w}{\partial S_2} + \int_Q \left(-r + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} w + \left(-r + \frac{1}{2} \rho_{12} \right) S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} w \\ + \left(-r + \frac{1}{2} \rho_{21} \right) S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} w + \left(-r + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} w + r \int_Q vw$$

Ahora bien, se puede probar que existen dos constantes positivas $\sigma_3 < \sigma_4$ y una constante λ tal que para toda $v, w \in V$, se tiene

$$a(v, w) \leq \sigma_4 |v|_V |w|_V$$

y

$$a(v, v) \geq \sigma_3^2 |v|_V^2 - \lambda \|v\|_{L^2(Q)}^2$$

Asumiendo que $F_0 \in L^2(Q)$, la formulación débil de (24) y (25) consiste en encontrar

tal que $F \in C^0([0, T]; L^2(Q)) \cap L^2(0, T; V)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$, que cumpla

$$F|_{t=0} = F_0 \text{ en } Q$$

y para casi todo $t \in (0, T)$

$$\forall v \in V, \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t), v \right) + a(F(t), v) = 0$$

Además para todo $0 < t < T$, tenemos la estimación

$$e^{-2\lambda t} \|F(t)\|_{L^2(Q)}^2 + 2\sigma_3^2 \int_0^t e^{-2\lambda t} |F(t)|_V^2 dt \leq \|F_0\|_{L^2(Q)}^2$$

Además analizando el dominio del operador en (24) y (25) podemos probar que

- Para todo $t > 0, F \in C^0([0, T]; D) \cap C^1([t, T]; L^2(Q))$

$$D = \left\{ v \in V, S_k S_l \frac{\partial^2 F}{\partial S_l \partial S_k} \in L^2(Q) \right\}$$

- Si $F_0 \in D$, entonces

$$F \in C^0([0, T]; D) \cap C^1([0, T]; L^2(Q))$$

- Si $F_0 \in V$, entonces

$$F \in C^0([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D)$$

Con esto podemos resolver la ecuación diferencial parcial estocástica

$$-\frac{\partial F}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2^2} + \frac{1}{2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2} \rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 S_2 S_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2 \partial S_1} \\ + r S_1 \frac{\partial F}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial F}{\partial S_2} - r F = 0 \quad (24)$$

Sujeta a

$$F(S_1, S_2, 0) = F_0(S_1, S_2), (S_1, S_2) \in \Omega \quad F(S_1, S_2, t) = 0 \quad (25)$$

para un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Nos restringiremos a un dominio cuyas fronteras son localmente Lipschitz-continua.

Así el espacio de Sobolev con el que trabajaremos será la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en el espacio $\{v \in L^2(\Omega), S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1} \in L^2(\Omega); S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2} \in L^2(\Omega)\}$ con la norma

$$\|v\|_V = (\|v^2\|_{L^2(Q)} + \left\|S_1 \frac{\partial v}{\partial S_1}\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|S_2 \frac{\partial v}{\partial S_2}\right\|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

5.2 Implementación en Hermes 2D

Recordemos que la ecuación que vamos a considerar es

$$-\frac{\partial F}{\partial T} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2^2} + \frac{1}{2}\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\rho_{21}\sigma_2\sigma_1 S_2 S_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S_2 \partial S_1} + rS_1 \frac{\partial F}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial F}{\partial S_2} - rF = 0$$

Sujeta a

$$F(S_1, S_2, 0) = F_0(S_1, S_2), (S_1, S_2) \in \Omega, F(S_1, S_2, t) = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Con $\Omega \in \mathbb{R}_+^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Como este será un caso particular, asignaremos valores a las constantes dadas. Los valores que manejaremos serán:

- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$
- $r = 0.1, r = 0.1$
- $\rho_{12} = \rho_{21} = -0.3, \rho_{12} = \rho_{21} = -0.3$

Condiciones de frontera. Las condiciones de frontera ya establecidas anteriormente (condición de Dirichlet) como sigue:

$$F(S_1, S_2, T) = 0 \text{ para todo } (S_1, S_2) \in \partial\Omega, T \in (0, T).$$

Condición Inicial. La condición inicial, también fue establecida anteriormente

$$F(S_1, S_2, 0) = F_0(S_1, S_2) \text{ para todo } (S_1, S_2) \in \Omega$$

donde

$$F_0(S_1, S_2) = (100 - (S_1 + S_2))_+ \quad (26)$$

o bien

$$F_0(S_1, S_2) = (100 - \max\{S_1, S_2\})_+ \quad (27)$$

y además $F_0(S_1, S_2) = 0$ en Ω .

Esta es la ecuación particular, derivada de (24)-(25), que debemos resolver. La solución la encontraremos usando la librería Hermes, una librería usada para resolver ecuaciones por el método del elemento finito utilizada en el lenguaje de programación C++. El proceso para implementar la ecuación en el programa requiere del siguiente proceso.

Creación de la malla. Lo primero que debemos hacer es particionar el dominio donde está definida la ecuación diferencial para crear la malla. Esto puede ser usando ya sea triángulos o cuadriláteros. En la creación de la malla usaremos conceptos como borde de frontera, marcas de frontera que serán usados para especificar condiciones iniciales. Al introducir el código de la malla debe contener al menos las siguientes variables a la hora de definirla: vértices, elementos y fronteras. La variable vértices lista todos los vértices en la malla. Los vértices especifican, en un sistema de coordenadas centrado en el cero, la ubicación de los vértices. La variable elementos lista los elementos en la malla. Los elementos son definidos por los índices de sus vértices y en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Las variables de frontera asignan marcas de frontera a todos los bordes de frontera. Solamente aquéllos con marcas positivas yacen en la frontera del dominio y a éstos se les puede asignar una condición de frontera. Todo esto en el código queda de la siguiente forma:

a = 0.0
b = 160.0
c = 0.0
d = 160.0
vertices =

```

{
{a, c}, # vertex 0
{b, c}, # vertex 1
{b, d}, # vertex 2
{a, d}, # vertex 3
}
elementos =
{{0,1,2,3,0} # element 0 }
fronteras = { { 0, 1, 2 }, { 1, 2, 1 }, { 2, 3, 1 },
{ 3, 0, 2 } }

```

Con esto le hemos especificado a la computadora la malla para que el programa pueda reconocerlo. Ahora explicaremos como introducir la ecuación. Diremos lo pertinente a las condiciones de frontera y las formas bilineales.

Las condiciones de frontera dadas por (25) se implementan de la siguiente forma:

```

// definición de las condiciones de frontera
intF_bc_type(int marker) { return BC_ESSENTIAL; }
doubleF_bc_value(int marker, double x, double y) { return F_BOUNDARY; }
scalarfn(double x, double y, double &dx, double &dy) // {return abs(100-std::max(x,y));} {return std::max(100-(x+y),0.0);} // {return abs(100-(x+y));}

```

Ahora hay que implementarla en el programa como formas bilineales. Primero consideremos la formulación débil. Buscamos una función $F(S_1, S_2)$ tal que para cualquier instante de tiempo $(0, T)$ la identidad:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \tau} \varphi(S_1, S_2) dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1^2 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_2^2 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1 S_2 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \rho_{21} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_1 S_2 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 + \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} [r S_1 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} [r S_2 \varphi(S_1, S_2)] dS_1 dS_2 - \int_{\Omega} r F \varphi(S_1, S_2) dS_1 dS_2 = 0
\end{aligned}$$

Se cumpla para todas las funciones $\varphi(S_1, S_2) \in H_0^1(\Omega)$.

Ahora hacemos la discretización del tiempo

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial \tau} \varphi dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1^2 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_2^2 \varphi] dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1 S_2 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \rho_{21} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_1 S_2 \varphi] dS_1 dS_2 + \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_1} [r S_1 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial F^{n+1}}{\partial S_2} [r S_2 \varphi] dS_1 dS_2 - \int_{\Omega} r F^{n+1} \varphi dS_1 dS_2 = - \int_{\Omega} \frac{F^n}{\tau} \varphi dS_1 dS_2
\end{aligned}$$

Enseguida lo expresamos como una forma bilineal:

$$\begin{aligned}
a_{00}(F, \varphi) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \tau} \varphi dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1^2 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_2^2 \varphi] dS_1 dS_2 - \frac{1}{2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial}{\partial S_1} [S_1 S_2 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& - \frac{1}{2} \rho_{21} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial S_2} [S_1 S_2 \varphi] dS_1 dS_2 + r \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_1} [S_1 \varphi] dS_1 dS_2 \\
& + r \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial S_2} [S_2 \varphi] dS_1 dS_2 - r \int_{\Omega} F \varphi dS_1 dS_2 \quad y \quad l_0(\varphi) = - \int_{\Omega} \frac{F^n}{\tau} \varphi dS_1 dS_2
\end{aligned}$$

Y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_{00}(F, \varphi) &= - \left(\frac{1}{\tau} + r \right) \int_{\Omega} F \varphi dS_1 dS_2 - \left(\sigma_1^2 + \frac{\rho_{21} \sigma_1 \sigma_2}{2} - r \right) \int_{\Omega} S_1 \frac{\partial F}{\partial S_1} \varphi dS_1 dS_2 \\
& - \left(\sigma_2^2 + \frac{\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{2} - r \right) \int_{\Omega} S_2 \frac{\partial F}{\partial S_2} \varphi dS_1 dS_2 - \frac{\sigma_1^2}{2} \int_{\Omega} S_1^2 \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial S_1} dS_1 dS_2 \\
& - \frac{\sigma_2^2}{2} \int_{\Omega} S_2^2 \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial S_2} dS_1 dS_2 - \frac{\rho_{21} \sigma_1 \sigma_2}{2} \int_{\Omega} S_1 S_2 \frac{\partial F}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial S_2} dS_1 dS_2 \\
& - \frac{\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{2} \int_{\Omega} S_2 S_1 \frac{\partial F}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial S_1} dS_1 dS_2 \quad y \quad l_0(\varphi) = - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} F^n \varphi dS_1 dS_2
\end{aligned}$$

Escribiremos esta forma bilineal en el código de programa de la siguiente manera:

```

scalar bilinear_form_0_0(RealFunction* fu,
RealFunction* fv, RefMap* ru,
RefMap* rv)
{ return -C1*int_u_v(fu, fv, ru, rv) -C2*int_x_
dudx_v(fu, fv, ru, rv) -
C3*int_y_dudy_v(fu, fv, ru, rv) -C4*int_xx_
dudx_dvdx(fu, fv, ru, rv) -
C5*int_yy_dudy_dvdy(fu, fv, ru, rv) -C6*int_
xy_dudx_dvdy(fu, fv, ru, rv) -
C7*int_yx_dudy_dvdx(fu, fv, ru, rv); }
scalar linear_form_0(RealFunction* fv, Ref-
Map* rv) { return (-1.0 / TAU) *
int_u_v(&Fprev, fv, Fprev.get_refmap(), rv); }

```

Hemos descrito los elementos esenciales del código del programa. Ahora al compilarlo, éste nos dará la solución buscada.

SOLUCIONES EN FORMA GRÁFICA

Presentaremos algunas soluciones en forma gráfica variando las condiciones iniciales:

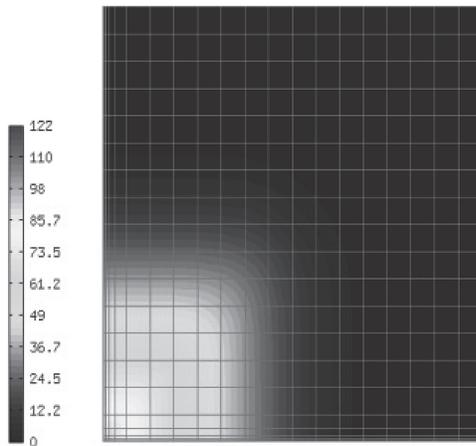


Figura 2: Precio de una opción de venta sujeta a dos bienes subyacentes con un tiempo de madurez de .7 años. Las condiciones iniciales están dadas por (26). La figura muestra la solución vista desde el dominio de definición.

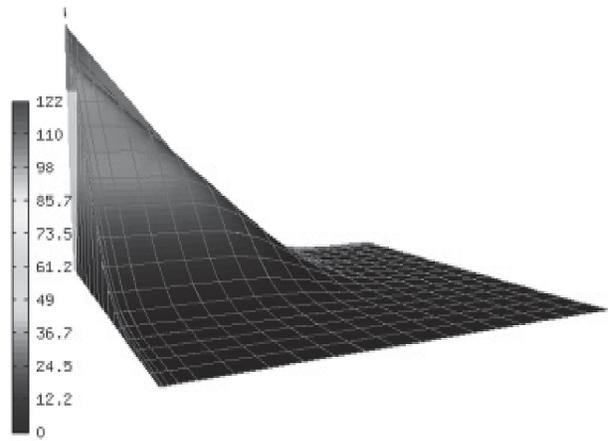


Figura 3: La misma solución anterior vista desde una perspectiva tridimensional. Nótese como el precio de la opción tiende a ser más alto de una forma no tan gradual a medida que los precios de los bienes se acercan a cero.

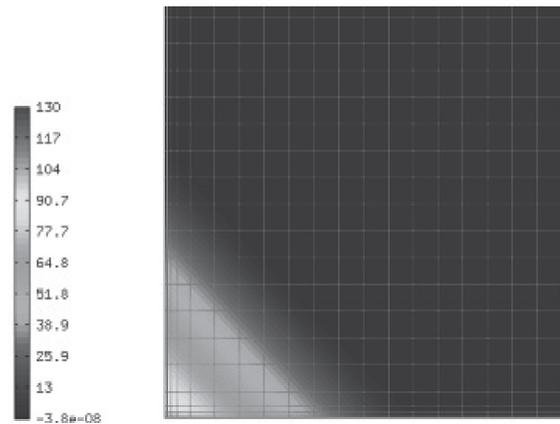


Figura 4: Precio de una opción de venta sujeta a dos bienes subyacentes con condiciones iniciales dadas por (27). La vista de esta solución está dada en el dominio donde está definida. El tiempo de madurez también es de .7 años.

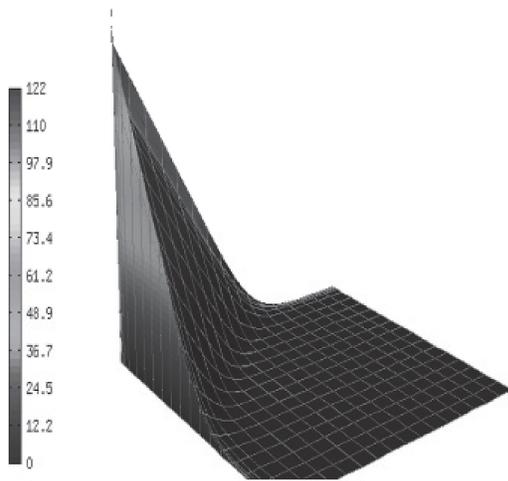


Figura 5: La misma solución anterior vista desde una perspectiva tridimensional. Nótese como el precio de la opción tiende a ser más alto de una forma rápida a medida que los precios de los bienes se acercan a cero.

6. CONCLUSIONES

La importancia de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en la ciencia es evidente. Un gran número de procesos como el clima, el flujo de líquidos, la deformación de cuerpos sólidos, la transferencia de calor, muchas reacciones químicas, la electromagnética y problemas en economía, entre muchos otros, pueden ser descritos y modelados por éstas. Las soluciones numéricas nos permiten hasta visualizar estos procesos aun cuando en algunos casos no podemos determinar analíticamente la solución. Los altos costos del software dedicado a implementar el método del elemento finito hacen muchas veces imposible tener acceso a ellos. Por otra parte, los elementos de orden superior han incrementado su popularidad debido a las propiedades descritas en este trabajo, sin embargo, utilizarlos requiere un mejor entendimiento de la matemática involucrada en el proceso, en particular, es necesario un conocimiento básico de álgebra lineal y análisis funcional. La implementación del método del elemento finito aquí presentada puede compararse con la presentada en [3] aunque debe resaltarse que en nuestro caso, utilizamos elementos de orden superior, por lo que la implementación es más eficiente y relativamente más simple.

El desarrollo de HERMES 2D y 3D continua y permanece como un software libre desarrollado por estudiantes de posgrado bajo la dirección del Dr. Pavel Solin. Para más información se puede visitar la página <http://hpfem.org/main/>.

REFERENCIAS

- 1] Fernando Galaz Fontes. *Medida e integral de Lebesgue en R^n* . México, D.F. Editorial Oxford, 2002.
- 2] Pavel Solin. *Partial Differential Equations and the Finite Element Method* Hoboken. Nueva Jersey, Editorial Wiley, 2006.
- 3] Yves Achdou, Olivier Pironneau. *Computational Methods for Options Pricing*. Philadelphia, Estados Unidos, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- 4] Fernando Galaz Fontes. *Elementos de análisis funcional*, Guanajuato, México, S y G editores, 2006.
- 5] Robert A. Adams, John J. F. Fournier Sobolev. *Spaces* Vancouver, Canadá, Editorial Elsevier, 2003, segunda edición.

Valor biológico de los alimentos para rumiantes

Héctor González García¹, Aracely Orozco Erives¹, Roberto Martínez de la Rosa¹,
Efraín García SanMiguel¹, Imelda Ramos Guevara¹ y Hugo Hernández Contreras²

RESUMEN

El análisis proximal centesimal o de macronutrientes (sistema Weende) y el sistema de valoración del contenido total de nutrientes digestibles (TND) han sido utilizados durante más de un siglo como la base para predecir la energía y la proteína disponible de los ingredientes alimenticios. El sistema de Energía Neta (EN) fue desarrollado para ajustar las pérdidas de metano, de orina y del incremento calórico. El sistema de EN ha trabajado bien bajo las condiciones de alimentación estándar, pero el valor tabulado de EN de un alimento en particular es normalmente estimado a partir del TND y representa el valor promedio esperado, basado sobre un grupo de alimentos más que en la EN que se deriva de un grupo particular de ganado consumiendo ese alimento. Debido a que las condiciones de alimentación del ganado son variables y frecuentemente únicas, los valores de EN generalmente no son fiables. Las determinaciones de proteína cruda y digestible no son usualmente corregidas por la dinámica de fermentación ruminal y por las pérdidas potenciales de nitrógeno como amoníaco.

INTRODUCCIÓN

Los alimentos están compuestos de componentes mayoritarios tales como carbohidratos, proteína, grasa, cenizas y agua, los cuales son químicamente cuantificables. Las características químicas son usadas para cuantificar las variaciones que ocurren sobre una base normal debido a cambios en el suelo, la fertilidad, medio ambiente (temperatura, humedad, etc.), variedad, estado de madurez, etc. Los valores químicos pueden ser usados para predecir las proporciones de las fracciones de carbohidratos

y de proteína de un alimento que pueden ser disponibles para los microorganismos ruminales de los animales rumiantes y para los procesos digestivos que tienen lugar en éstos. Debido a que los valores son estimados en el laboratorio por diversas técnicas, pueden ser utilizados para el control de calidad en la toma de decisiones de compra de producto y para mantener uniformidad en el mismo. La seguridad de los análisis para saber con exactitud que es lo que comen los animales, depende de un adecuado muestreo del alimento (Cheeke, 2004).

1 Cuerpo Académico de Nutrición Animal. Departamento de Ciencias Veterinarias. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Anillo PRONAF y Estocolmo s/n, Col. Progresista, Ciudad Juárez, Chihuahua, México. C. P. 32300. hgonzale@uacj.mx
2 Universidad Autónoma de Baja California Sur.

El análisis de Weende o Proximal ha sido utilizado durante más de un siglo (desarrollado en la década de 1860 por Henneberg y Stohman en la Estación Experimental Weende en Alemania) para medir componentes como fibra cruda (FC), extracto etéreo (EE), materia seca (MS) y el nitrógeno (N) total, siendo determinado por diferencia el extracto libre de nitrógeno (ELN):

$$\text{ELN} = 100 (\text{Ceniza} + (\text{Nitrógeno} \times 6.25) + \text{Extracto etéreo} + \text{Fibra Cruda})$$

Los componentes altamente digestibles se asume que son el ELN (carbohidratos no estructurales, azúcar y almidón), el EE (grasa), y el N X 6.25 (proteína Cruda; PC). No obstante, los errores del método al determinar estas fracciones, resultan en una sobreestimación del ELN, ya que éste es obtenido por diferencia, por lo cual no necesariamente describe la fracción más digestible.

FRACCIONAMIENTO DE CARBOHIDRATOS Y PROTEÍNAS

Al inicio de 1960 y hasta hace unos años, Peter J. Van Soest y sus colaboradores (USDA en Beltsville y después en Cornell; Van Soest y Wine, 1967; Goering y Van Soest, 1970; Figura 1) desarrollaron un sistema de análisis de los alimentos más adecuado para determinar los carbohidratos (CHO) y el contenido de proteína en la fibra (CHO estructurales; SC) y los componentes no fibrosos (CHO no estructurales; NSC) y el contenido de proteína acorde a sus características de fermentación ruminal (A = rápida, B = intermedia y lenta, y C = no fermentable y no disponible para el animal), tal y como sigue (Sniffen *et al.*, 1992):

- El residual del procedimiento de fibra detergente neutro (FDN) es el total de fibra (hemicelulosa, celulosa y lignina).
- El procedimiento de lignina mide la fibra indigestible.
- La fibra disponible (CHO fracción B2) es igual a

FDN – (lignina X 2.4).

- El N total es medido por el método Kjeldahl.
- El N soluble (NNP + proteína verdadera soluble) es medido para identificar el N total rápidamente degradado en el rumen.
- La proteína verdadera es precipitada a partir de separar el N no protéico (NNP) soluble (proteína fracción A) de la proteína rápidamente degradada (proteína fracción B1).
- El N insoluble en detergente neutro (NIDN X 6.25 = PIDN) mide la proteína degradada lentamente más la no disponible.
- El N insoluble en detergente ácido (NIDA X 6.25 = PIDA) identifica la proteína no disponible (proteína fracción C).
- La diferencia entre PIDN – PIDA identifica la proteína disponible degradable lentamente (proteína fracción B3).
- La PC (N X 6.25) – A – B1 – B3 – C = proteína intermedia en tasa de degradación (proteína fracción B2).
- La ceniza es medida por calcinación.
- La grasa es medida por un solvente soluble en grasa.
- Los carbohidratos no estructurales (NSC; azúcar, almidón, pectinas; también llamados carbohidratos no fibrosos; NFC) se estiman como:

$$\text{NSC} = 100 - [\text{PC} + (\text{FDN} - \text{FDN proteína}) + \text{grasa} + \text{ceniza}]$$

Tal y como en el ELN, los errores en los métodos pueden causar error en la determinación de NSC.

- Los CHO de la fracción A es igual a NSC – (almidón + pectina).
- Los CHO de la fracción B1 es igual a NSC – azúcares.

Los procedimientos de laboratorio recomendados para estimar las fracciones de carbohidratos y proteína (Sniffen *et al.*, 1992) son:

- MS del alimento (AOAC, 2005).

- 2) FDN (Van Soest *et al.*, 1991).
 - 3) Lignina (Van Soest *et al.*, 1991).
 - 4) N total por macro o micro Kjeldahl (AOAC, 2005).
 - 5) NIDN (sin sulfito de sodio) y NIDA (Van Soest *et al.*, 1991).
 - 6) Cenizas (AOAC, 2005).
 - 7) Grasa soluble en solvente (AOAC, 2005).
 - 8) Estimación de NSC a partir de las determinaciones de FDN, proteína, grasa y ceniza, o directamente (Van Soest *et al.*, 1991).
- $$\text{NSC} = 100 - [\text{PC} + (\text{FDN} - \text{FDN proteína}) + \text{grasa} + \text{ceniza}]$$

ESTIMACIÓN DEL VALOR BIOLÓGICO DEL ALIMENTO A PARTIR DEL ANÁLISIS QUÍMICO

La utilidad de un alimento depende del grado de digestión de las fracciones de carbohidratos y proteínas. Las pruebas de digestión fueron históricamente usadas para determinar el valor del alimento para el animal, así como el valor del TND. Éste es estimado por el análisis químico de las fracciones de carbohidratos y proteínas en el alimento y en las heces en pruebas de digestión para determinar la cantidad digerida. Ésto es usado para predecir el valor energético de un alimento y para estimar la utilidad del contenido de proteína del mismo (McDonald *et al.*, 2002).

$$\text{TND} = \text{proteína digestible} + \text{ELN digestible} + \text{FC digestible} + (\text{grasa digestible} \times 2.25)$$

A pesar del éxito obtenido, un número considerable de errores y limitaciones han sido identificados a través de los años que limitan la utilidad de este sistema, los cuales incluyen:

- a) La asunción de que todo el ELN es disponible, cuando de hecho esto es calculado como un residual después de que la proteína, la grasa y la fibra son determinadas, lo cual refleja todos los

errores acumulados de estas determinaciones, incluyendo algunos componentes, tales como la lignina.

- b) El valor de FC no es representativo de toda la fibra del alimento, ni de la fibra no disponible en el mismo.
- c) Se asume que toda la proteína “digestible” es disponible para el animal.
- d) Se asume que el valor de TND de un alimento es constante, a pesar de la variabilidad debido al nivel de consumo y a las variaciones por efecto del procesamiento.
- e) Se asume que el valor de TND tiene un valor constante, a pesar de la fuente del TND.
- f) No existe diferenciación entre la utilidad para diferentes funciones fisiológicas.
- g) No se determinan las necesidades para los microbios del rumen, ni para la producción de proteína microbial.

SISTEMAS DE ENERGÍA NETA

En los años setenta, los sistemas de energía neta fueron desarrollados para ganado en crecimiento en la Universidad de California y para ganado lactante en el Centro de Investigación de la USDA en Beltsville y adaptado por el NRC, Beef and Dairy Cattle Nutrient Requirements, para ajustarlos por pérdidas por metano, orina e incremento calórico. Esto permitió determinar que las diferencias en la utilidad de la energía absorbida dependían de la fuente de energía y de la función fisiológica para la que era utilizada. Sin embargo, estos valores no son directamente medidos en los alimentos, deben de ser estimados a partir del análisis químico (Pond *et al.*, 2004).

SISTEMAS UIP/DIP PARA PROTEÍNAS

En los años ochentas, un sistema fue desarrollado por el NRC para determinar los requerimientos de N ruminal para crecimiento microbial (proteína degradable; DIP) y los requerimientos de proteína para tejido (proteína no degradable; UIP), y fue implementado por primera vez en las recomendacio-

nes del NRC Dairy Nutrient Requirements. El DIP y el UIP son determinados analíticamente, tanto por el método *in vitro* como *in situ*.

El método *in vitro* involucra la adición de una proteasa a las muestras del alimento y la incubación en baño maría por 48 horas. Las muestras son removidas del baño, filtradas y analizadas para proteína cada 4 a 8 horas. La UIP es determinada como el N residual en la muestra cuando esta es removida del baño, $DIP = 100 - UIP$. En las muestras removidas cada 4 a 8 horas, es posible estimar la degradabilidad ruminal al relacionarla con la tasa de pasaje del alimento (Cheeke, 2004).

El método *in situ* involucra la incubación de muestras en bolsas de nylon en el rumen usando un cordón de nylon. El análisis es similar al del método *in vitro*; cada 4 a 8 horas una bolsa es retirada, lavada y analizada para N residual. La última muestra es retirada después de 48 horas. La UIP y la DIP son calculadas de la misma forma que el método *in vitro*. Uno de los principales problemas con este método es que para una adecuada degradación bacteriana de la proteína en la muestra, el tamaño de poro de la bolsa de nylon debe de ser lo suficientemente grande para que permita la entrada de las bacterias a la bolsa. Aún y cuando las bolsas con las muestras son lavadas cuando son removidas del rumen, las bacterias permanecen en el residual debido a la adhesión con las partículas. Por ello, el valor de la UIP es sobreestimado, mientras que el de la DIP es subestimado (McDonald *et al.*, 2002).

Un problema con ambos métodos es la cantidad de tiempo involucrado, el cual oscila entre 5 a 6 días. En este periodo de tiempo, los alimentos evaluados bien pueden ser consumidos y reemplazados. Otro problema es que la porción de UIP también contiene una porción no disponible o ligada a la proteína. Se asume que la proteína ligada es totalmente no disponible para el animal. En los alimentos dañados por el calor, este tipo de proteína puede representar hasta un 30 % del total de la proteína, por lo cual el sistema UIP/DIP podría ocasionar que se ofrecieran dietas deficientes en

proteína. Un problema aún más serio es que los valores son estáticos. Se asume que para un alimento, sin considerar el tipo de animal, el consumo u otro factor, el contenido de UIP/DIP del alimento es el mismo (Cannas *et al.*, 2004).

ESTIMACIÓN DEL VALOR DE ENERGÍA NETA DEL ALIMENTO A PARTIR DE SU ANÁLISIS QUÍMICO

- Los valores de energía neta de los concentrados son estimados de valores tabulares, los cuales son obtenidos de pruebas de digestión o determinaciones directas de valores de energía neta.
- Los valores de energía neta de los forrajes pueden ser estimados a partir del análisis de fibra, debido a la relación negativa entre la lignina y la digestibilidad (Traxler *et al.*, 1998). La lignina y la parte de la pared celular que esta asociada a ella (lignina X 2.4), no son digestibles (Cuadros 2 y 3). La FDA es el análisis químico más comúnmente usado, debido a que contiene la lignina y la sílica (Cuadro 4). En los cuadros referidos se puede apreciar la utilidad de estos análisis, así como el uso de ecuaciones de predicción para estimar valores de energía neta.

La principal limitación de estas ecuaciones es la necesidad de ajustarlas por el efecto del nivel de consumo. Tadeschi *et al.* (2000) han sugerido ecuaciones más complejas para aproximarse al ajuste de la disminución en la digestibilidad presentada con niveles altos de consumo. Estos ajustes son más importantes en vacas lecheras de alta producción con un alto nivel de consumo.

1. Método alternativo a partir de la energía digestible (ED) o TND

$$ED = \frac{\% \text{ TND} \times 2 \times 2.2}{100}$$

$$EM = 0.82 (ED)$$

$$EN_m = 1.37 (EM) - 0.738 (EM)^2 + 0.0105 (EM)^3 - 1.12$$

$$EN_g = 1.42 (EM) - 0.174 (EM)^2 + 0.0122 (EM)^3 - 1.65$$

$$ENI = (EM) 0.65$$

Todas las unidades son en Mcal / Kg.

2. Ecuaciones para predecir EN_m y EN_g (Mcal / Kg) a partir de FDA

$$EN_m = 2.19 - 0.0266 (\% \text{ FDA}) \quad r^2 = 0.82$$

$$EN_g = 1.73 - 0.029 (\% \text{ FDA}) \quad r^2 = 0.84$$

3. Ecuaciones para predecir la ENI (Mcal / lb) de la Universidad de California para el heno de alfalfa a partir de la FDN y FDA

$$ENI (\text{Mcal} / \text{lb MS}) = 0.906 - (0.00730 \times \text{FDN} (\% \text{ MS})) \quad r^2 = 0.72$$

$$ENI (\text{Mcal} / \text{lb MS}) = 0.883 - (0.00824 \times \text{FDA} (\% \text{ MS})) \quad r^2 = 0.7$$

4. Ecuaciones para predecir la ENI (Mcal / lb) de la Universidad de California para el ensilaje de maíz a partir de la FDN y FDA

$$ENI (\text{Mcal} / \text{lb MS}) = 1.242 - (0.01236 \times \text{FDN} (\% \text{ MS})) \quad r^2 = 0.73$$

$$ENI (\text{Mcal} / \text{lb MS}) = 1.065 - (0.01371 \times \text{FDA} (\% \text{ MS})) \quad r^2 = 0.6$$

FIBRA EFECTIVA

El uso reciente del término fibra efectiva (FDNe) reconoce la diferente funcionalidad de la fibra de la dieta. La grasa de leche, la tasa de masticación y el tamaño de partícula han sido utilizados como un índice de la fibra efectiva. Actualmente, el Sistema Cornell de Carbohidratos y Proteína Netos (CN-CPS), utiliza la FDNe para ajustar el pH ruminal y la tasa de pasaje (Cannas et al., 2004). Otros factores, aparte del tamaño de partícula, que influyen en la FDNe incluyen el grado de lignificación de la fibra, el grado de hidratación, y la densidad de llenado. La importancia de la FDNe puede ser detectada al reducirse la tasa de crecimiento de los microorganismos que fermentan los carbohidratos estructurales y la reducción en el rendimiento microbiano total cuando el pH ruminal es menor de 6.2 (se presenta a niveles de 20 % de FDNe; Cuadro 5).

CONCLUSIONES

La determinación del valor nutricional de los ingredientes comúnmente utilizados en la alimentación

de los animales es muy importante para poder formular adecuadamente las dietas; para ello, es necesario estandarizar las técnicas y los procedimientos más novedosos que se utilizan en los laboratorios para los análisis de los alimentos. En los sistemas de alimentación de los rumiantes es indispensable considerar tanto los análisis químicos como el valor biológico de los ingredientes alimenticios. Esto último, en el caso del contenido energético, puede ser estimado a través de la utilización de ecuaciones de predicción; sin embargo los valores no son constantes y pueden ser afectados por el nivel de consumo de alimento que tengan los animales. Para el caso de las fracciones de carbohidratos y de proteínas de los alimentos, éstas difieren en el grado y en la velocidad de digestión en el animal de acuerdo a la forma química en que se presentan.

REFERENCIAS

- AOAC. (2005). *Official Methods of Analysis*. (18th ed.). Assoc. Offic. Anal. Chem., Arlington, VA.
- Cannas, A., L. O. Tedeschi, D. G. Fox, A. N. Pell, y P. J. Van Soest. (2004). "A mechanistic model for predicting the nutrient requirements and feed biological values for sheep". *J. Anim Sci.* 82: 149-169.
- Cheeke, P. R. (2004). *Applied Animal Nutrition, Feeds and Feeding*. Third Edition. Prentice Hall. New Jersey.
- Galyean, M. (1997). *Techniques and Procedures in Animal Nutrition Research*. New Mexico State University. Las Cruces, NM.
- Goering, H. K., y P. J. Van Soest. (1970). *Forage fiber analyses (apparatus, reagents, procedures, and some applications)*. Agric. Handbook No. 379. ARS, USDA, Washington, DC.
- McDonald, P., R. A. Edwards, J. F. D. Greenhalgh, y C. A. Morgan. (2002). *Animal Nutrition*. Prentice Hall, Englewood Cliff, NJ.
- Pond, W. G., D. C. Church, K. R. Pond, y P. A. Scoknecht. (2004). *Basic Animal Nutrition and Feeding*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Sniffen, C. J., J. D. O'Connor, P. J. Van Soest, D. G.

Fox y J. B. Russell. (1992). "A net carbohydrate and protein system for evaluating cattle diets: II. Carbohydrate and protein availability". *J. Anim. Sci.* 70: 3552-3577.

Tedeschi, L. O., D. G. Fox, L. E. Chase, y S. J. Wang. (2000). "Whole-herd optimization with the Cornell net carbohydrate and protein system. I. Predicting feed biological values for diet optimization with linear programming". *J. Dairy Sci.* 83: 2139-2148.

Traxler, M. J., D. G. Fox, P. J. Van Soest, A. N. Pell, C. E. Lascano, D. P. D. Lanna, J. E. Moore, R. P. Lana, M. Velez, y A. Flores. (1998).

"Predicting forage indigestible NDF from lignin concentration". *J. Anim. Sci.* 76: 1469-1480.

Van Soest, P. J. (1994). *Nutritional Ecology of the Ruminant*. O and B Books. Corvallis, Oregon.

Van Soest, P. J. y R. H. Wine. (1967). "Use of detergents in the analysis of fibrous feeds. IV. Determination of plant cell-wall constituents". *J. Assoc. Offic. Anal. Chem.* 50: 50.

Van Soest, P. J., J. B. Robertson, y B. A. Lewis. (1991). "Methods for dietary fiber, neutral detergent fiber, and non-starch polysaccharides in relation to animal nutrition". *J. Dairy Sci.* 44: 3583-3597.

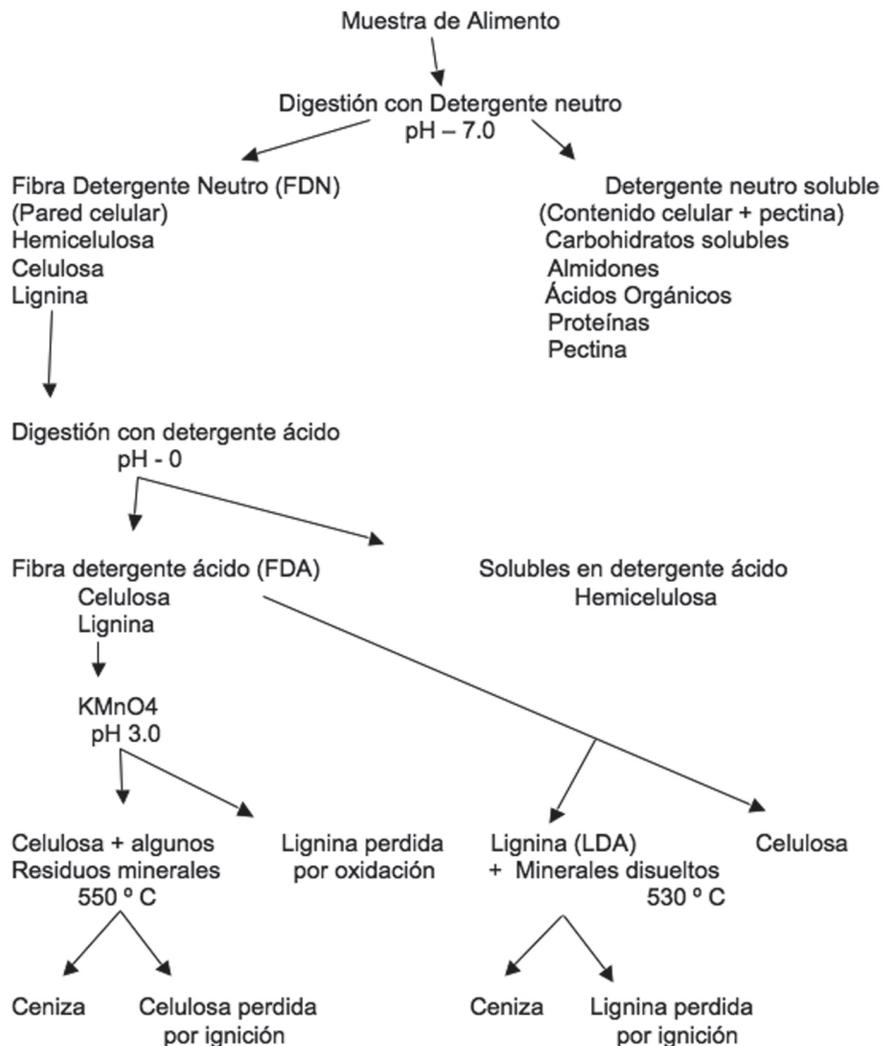


Figura 1. El método Van Soest del fraccionamiento de la fibra en el alimento (Galylean, 1997).

CUADRO 2. Características de algunos componentes importantes de la pared celular en forrajes

COMPONENTE	CARACTERÍSTICAS
Lignina	Principal porción de la pared celular que no son carbohidratos. La baja disponibilidad de la celulosa y la hemicelulosa está asociada con ella. Provee el soporte estructural a la planta.
Celulosa	Principal SC de la planta. Provee soporte estructural a la planta. Su digestibilidad depende de la cantidad de lignina, sílica y cutina presentes.
Hemicelulosa	Provee soporte estructural a la planta. Su digestibilidad depende de la cantidad de lignina presente.
Pectina	Altamente digestible y su disponibilidad no se ve fuertemente afectada por la lignina.
Cutina	Puede estar integrada con la lignina y es medida como lignina en lignina detergente ácido (LDA). Baja la disponibilidad de la celulosa y la hemicelulosa.
Sílice	Su contenido en la planta puede variar de 1 a 22 % de MS. Las plantas de suelos arenosos tienen niveles más altos. Tiene un efecto similar a la lignina sobre la digestibilidad de la celulosa y la hemicelulosa. Puede tener un efecto directo sobre la celulosa y la hemicelulosa o puede envolver algunos minerales traza necesarios para los microorganismos ruminales.

CUADRO 3. Componentes del sistema de análisis de la fibra detergente del forraje y lo que cada uno determina

COMPONENTE	DETERMINACIÓN
FDN ^a	Principalmente celulosa, hemicelulosa y lignina. Su disponibilidad depende de la lignificación.
FDA ^a	Principalmente celulosa y lignina: Su disponibilidad depende de la lignificación.
LDA	Principalmente lignina, con algo de cutina y N ligado (reacción de Maillard). No disponible.
CIA (Ceniza insoluble en ácido)	Bueno para estimar el contenido de sílice.

^a FDN – FDA proveerá un estimado del contenido de HEM; FAD – LAD proveerá un estimado del contenido de celulosa.

CUADRO 4. *Constituyentes fibrosos y aporte energético de diversos ingredientes.*

Ingrediente	FDA (% MS)	FDN (% MS)	ENL (Mcal/lb)
Maíz ensilaje	25	41	0.68
Maíz ensilaje	30	49	0.65
Heno de alfalfa	37	50	0.56
Heno de alfalfa	28	38	0.68
Grano de cebada	7	18	0.88
Grano de maíz	3	19	0.89

Serología del Síndrome Ascítico en pollos de la línea *Arbor Acres*

Luis Olivares-Sánchez¹, Pablo Rangel-Silva², Carlos López-Coello³, Héctor Fernando Serrano⁴,
María Dolores García-Suárez⁵, Alondra Castro-Campillo⁵, Arturo Salame-Méndez⁶,
Rafael Valencia-Quintana⁷, Gómez-Olivares, José Luis^{4,8}

RESUMEN

El síndrome ascítico (SA) en aves es una enfermedad que produce alteraciones fisiológicas en distintos órganos y tejidos, y con mucha frecuencia la muerte del animal. Es un padecimiento que afecta negativamente a la industria avícola, pues la mortandad oscila del 3 al 40%, lo que se traduce en pérdidas económicas elevadas. La serología acerca de la evolución o tipificación del SA, no han sido determinadas completamente.

En el presente estudio se evaluó el contenido de varios componentes lipídicos y proteicos en sueros de pollos con SA. Para esto, se utilizaron 60 pollos que se distribuyeron en pollos clínicamente sanos (30 aves) y pollos ascíticos (30 aves). Los resultados obtenidos mostraron que en los pollos con SA hubo una disminución significativa ($p < 0.05$) en el contenido de proteínas totales, albúmina, lípidos totales, colesterol, triglicéridos, fosfolípidos y fosfatasa alcalina en comparación con los valores determinados en los animales control. Sin embargo, los pollos con SA mostraron variaciones no significativas en calcio y en las actividades de aspartato aminotransferasa y gamma glutamil-transpeptidasa. No se observaron diferencias entre ambos grupos de aves en el contenido de glucosa, ni en la actividad de alanina aminotransferasa.

Estos resultados indican que el SA modifica algunos parámetros metabólicos básicos. Estas observaciones pueden ser utilizadas en el desarrollo de métodos diagnósticos para esta enfermedad.

¹ BIOS. Administración de Personal Especializado en Áreas Química, Farmacéutica y Médica. Av. Insurgentes. No.300. México, 06700. D.F.

² Instituto de Fisiología Celular. Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria. México, D.F.

³ Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia. Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria. México, D.F.

⁴ Departamento de Ciencias de la Salud. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. San Rafael Atlixco 186. México 09340. D.F.

⁵ Departamento de Biología. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. San Rafael Atlixco 186. México 09340. D.F.

⁶ Departamento de Biología de la Reproducción. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. San Rafael Atlixco 186. México 09340. D.F.

⁷ Facultad de Agrobiología. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Av. Universidad No. 1 Col. La Loma X.

⁸ Corresponde a la dirección del autor

INTRODUCCIÓN

Desde que las gallinas fueron domesticadas hace miles de años en el Lejano Oriente han servido al hombre para su alimentación. Actualmente, tanto en México como en otros países, las gallinas se crían y utilizan para aprovechar su carne y huevo, que son considerados alimentos con elevado nivel nutricional (Castellanos, 1990). Anterior a la década de los años cincuenta, el consumo de carne en México provenía de la producción rural. A partir de esos años se empezaron a generar líneas especializadas de gallinas con características importantes para su comercialización, como una mayor cantidad de carne en un menor tiempo y capacidad de producir huevos.

Los avances en el desarrollo de la genética, nutrición y la aplicación de novedosos sistemas de crianza y producción de aves asociado a un aumento en la población propiciaron un aumento en el consumo de pollo (Maynard *et al.*, 1989).

A nivel mundial, en el año 2008 se produjeron 92.9 millones de toneladas de carne de pollo, las cuales se distribuyeron entre 204 países, según estadísticas de la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO, por sus siglas en inglés), México ocupó el quinto lugar, con un volumen de 2,685 miles de toneladas.

No obstante, la rentabilidad en la industria avícola ha mostrado algunas caídas debido al aumento en costos de producción relacionados con incrementos en la mortalidad de las aves que proceden de problemas específicos, como el síndrome ascítico. Esta enfermedad no es exclusiva de México, se ha informado de su incidencia en países de los cinco continentes (López *et al.*, 1991). En 1984 en México las pérdidas generadas por SA llegaron a cerca de 41 millones de dólares, mientras que en 1983 fue de 19 millones de dólares, lo que hace suponer que para muchos productores representó una de las principales pérdidas económicas (Antillón y López, 1987).

Desde un punto de vista biológico, se hace necesaria una distinción entre ascitis y síndrome as-

cítico. La ascitis es una condición patológica que se caracteriza por la acumulación de líquidos en la cavidad abdominal. Mientras, que el SA es una enfermedad en la que se presentan características epidemiológicas, clínicas, anatomopatológicas constantes que transcurren con ascitis (López *et al.*, 1991).

La etiología del SA no está totalmente establecida, ya que se trata de un padecimiento de etiología múltiple (Rojo, 1991). No obstante, en la mayoría de los informes acerca del SA se le relaciona con problemas de hipoxia. Sin embargo, no se ha excluido la posibilidad que ciertas sustancias extrañas presentes en el alimento influyan en el desarrollo del SA (López *et al.*, 1985; Riddel, 1985).

El SA se ha documentado preferentemente en machos entre 3 y 7 semanas de edad y se ha correlacionado con altitudes superiores a los 1400 msnm (López *et al.*, 1992).

Algunos autores han realizado la descripción macroscópica y microscópica de las lesiones producidas por el SA. Sin embargo, los estudios bioquímicos sobre este tema son escasos debido a que es limitado el número de investigadores interesados.

El objetivo de este estudio fue determinar las posibles diferencias serológicas entre aves de la línea Arbor Acres clínicamente sanas y aves que sufrieron síndrome ascítico, para esto se realizó la cuantificación de los niveles séricos de varios componentes proteicos, lipídicos y enzimáticos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se emplearon pollos de la línea Arbor Acres de siete semanas de edad, los cuales se obtuvieron del Centro de Enseñanza, Investigación y Extensión en Producción Avícola (CEIEPA) de la Facultad de Medicina y Veterinaria de la UNAM. Este centro está ubicado a una altitud de 2250 msnm.

Los animales se separaron en dos grupos; a) 30 pollos que presentaron un cuadro clínico de SA y b) 30 pollos clínicamente sanos. Por animal se colectaron aproximadamente 10 mL de sangre

completa mediante punción de la vena humeral o cubital cutánea. Colectándose a un tubo de ensayo, el cual se mantuvo a temperatura ambiente hasta la formación del coágulo, que se retiró con una pajilla de madera. Los sueros se depositaron en un tubo de ensayo limpio y se centrifugaron a 3500 rpm durante 20 min. Finalmente, los sueros clarificados se colocaron en tubos Eppendorf estériles, que se almacenaron a -70°C hasta el momento de realizar los distintos análisis.

Se llevaron a cabo las determinaciones de los contenidos de distintos componentes séricos: proteínas totales, albúmina, lípidos totales, colesterol, triglicéridos, fosfolípidos, glucosa y calcio. La actividad de las enzimas alanina-aminotransferasa, aspartato aminotransferasa, gamma glutamil-transpeptidasa y fosfatasa alcalina. En todos los análisis se utilizaron equipos Wiener-Lab (Argentina) y todas las mediciones se hicieron por triplicado. El análisis estadístico se hizo mediante la prueba de t de Student o U-Mann Whitney.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el síndrome ascítico en las aves, se han descrito diversas lesiones macroscópicas que van desde la congestión generalizada, hasta el depósito de fibrina en la cavidad abdominal y en la superficie hepática.

En la figura 1 se muestran los valores promedio de proteínas totales obtenidos para ambos grupos de animales, donde se observa un contenido significativamente menor en aquellos con SA. Este efecto parece relacionarse con la reducción en el contenido de la albúmina, que en el suero de pollo representa el 50% de las proteínas, por lo tanto, cualquier modificación repercute en el contenido de proteínas. Los resultados anteriores concuerdan con los obtenidos por Cárdenas y colaboradores (1985), en cuanto a los valores de proteínas totales y albúmina, son similares con estudios previos (Báez, 1984).

Esto puede tener una explicación fisiológica. El análisis histológico de pollos que han muerto

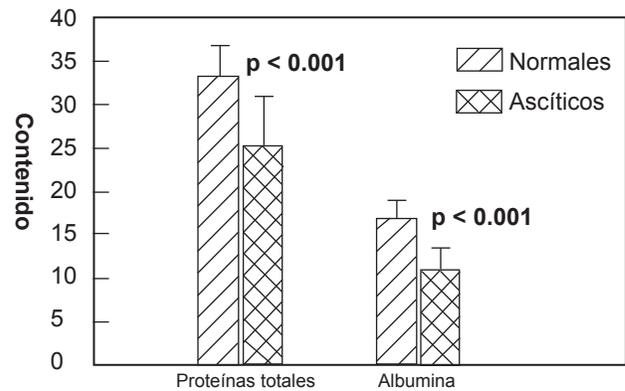


Figura 1. Cambios en el contenido de proteínas totales y albúmina en sueros de pollos con Síndrome Ascítico (líneas cruzadas). Se obtuvo sangre venosa por punción de la vena axilar. Las barras representan el promedio de 30 determinaciones por triplicado.

de ascitis, revelaron cambios estructurales en el hígado como degeneración, necrosis y fibrosis de la cápsula hepática (Nakamura et al., 1999). Estas anomalías fisiológicas pueden influir negativamente en el metabolismo de las proteínas en las células hepáticas. Otra posibilidad, puede ser la congestión crónica pasiva, la cual se ha observado en la patogenia del SA. La transvascularización de proteínas plasmáticas hacia la cavidad peritoneal provocaría una disminución en el contenido de proteínas totales en el suero.

La albúmina cumple función fisiológica importante en la regulación de la presión coloidal osmótica, y el mantenimiento del volumen y pH sanguíneo (Evans *et al.*, 1977). Se ha determinado que en pollos con ascitis disminuye la viscosidad aparente de la sangre y que puede influir en la hipertensión arterial (Fedde y Wideman, 1996).

Los lípidos representan una amplia variedad de compuestos que difieren en composición química, aquellos que circulan en el torrente circulatorio proceden de la absorción intestinal, síntesis y/o movilización de la grasa. Las aves pueden sintetizar cantidades considerables de ellos, aunque la capacidad para utilizarlos varía entre las especies domésticas. Su contenido en suero se puede modificar según la edad, sexo y especie.

En la figura 2 se muestran los valores obtenidos en la determinación de diversos lípidos. El contenido de lípidos totales en sueros de pollos con SA fue menor al estimado en los sueros de pollos del grupo control. El balance en el depósito y utilización de los lípidos en las aves se encuentra bajo regulación hormonal, en la cual están involucradas la triiodotironina en la lipogénesis y la hormona de crecimiento durante la lipólisis (Scheele *et al.*, 1992).

El síndrome ascítico, también produjo una disminución en el contenido de colesterol en los pollos enfermos. Este comportamiento puede relacionarse con la nutrición. Se ha observado que los pollos pueden llegar a absorber hasta un 50% del colesterol que ingieren. La velocidad de síntesis de este lípido varía según la especie, edad y estado nutricional (Sturkie y Newman, 1951).

Otra alternativa puede ser una anomalía sobre las velocidades en las vías de degradación y síntesis de dicho lípido, dado que estos procesos son dependientes de los niveles de NAD, NADP y oxígeno. En el desarrollo del SA, los animales pueden estar sufriendo problemas de hipoxia derivada de alteraciones cardiopulmonares.

Las aves tienen mayor capacidad que otra clase de vertebrados para almacenar triacilglicérols como una fuente alternativa de energía (Blen, 1976). El contenido de estos se modificó en suero de pollos de la cepa Arbor Acres por el síndrome ascítico. Se ha informado que los contenidos basales de triacilglicérols se modifican cuando se presenta cirrosis o nefrosis, anomalías fisiológicas que pudieron haber mostrado los animales empleados en este trabajo.

El contenido sérico de fosfolípidos en pollos con SA fue menor que el estimado en el suero de los pollos control. Esta diferencia puede relacionarse con alteración en el metabolismo de los lípidos.

En la figura 3 se muestran los valores de actividad enzimática medidos en sueros de pollos normales y de aves con síndrome ascítico. La actividad de la aspartato aminotransferasa (ASAT) fue

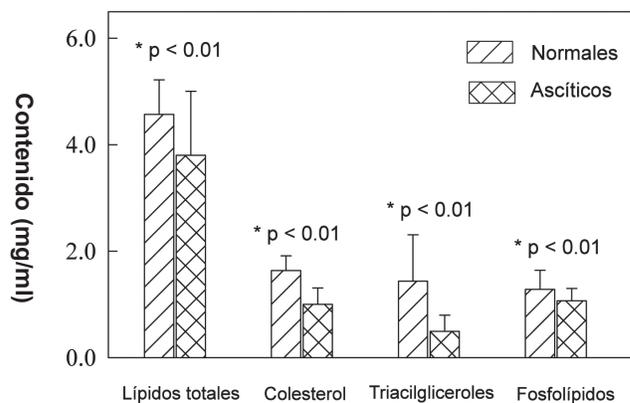


Figura 2. Alteración en el contenido de lípidos en suero de pollos de la línea Arbor Acres con Síndrome Ascítico (líneas cruzadas). Los diferentes tipos de lípidos se determinaron en sueros clarificados obtenidos por punción de la vena axilar. Las barras muestran los promedios de 30 determinaciones por triplicado por grupo de animales.

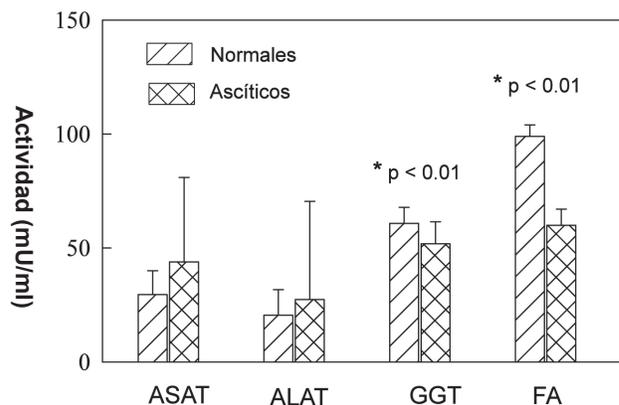


Figura 3. Modificación en la actividad de enzimas citosólicas (ASAT y ALAT) y membranales (GGT y FA) en sueros de pollos que sufrieron Síndrome Ascítico (líneas cruzadas). Las barras muestran los promedios de 30 determinaciones por triplicado.

mayor que en sueros de pollos sanos, aunque no fue significativa. La ASAT es una enzima citosólica que cuando se presenta en el suero es indicio de que en el hígado y corazón, ha ocurrido un daño en la membrana plasmática favoreciendo la salida de proteínas (Lynch y Raphael, 1990).

En otros organismos, se han buscado otros marcadores que sirvan de diagnóstico para estimar el daño cardíaco. En el caso de los humanos, se ha usado a la troponina T. En un estudio en pollos

ascíticos en los que se cuantificó esta proteína, se observó un aumento en su contenido sérico, indicando que existen alteraciones en el corazón de las aves (Maxwell *et al.*, 1994).

Como causa de la privación de alimento, ocurre una inmediata movilización de carbohidratos hepáticos de reserva dando lugar a la liberación de glucosa al plasma manteniéndose cubiertas las necesidades energéticas de los tejidos (Figura 4). El comportamiento de la glucosa parece estar relacionado con la actividad de la alanina aminotransferasa (ALAT), en la que no se observaron diferencias entre los valores medidos en los sueros de ambos grupos de pollos. Hazelgood y colaboradores (1976) propusieron que en el pollo existe escasa adaptación a la disposición de glucosa durante la privación de alimento en periodo corto.

Existen informes en los que se sugiere, que en los pollos durante privación de alimentos los contenidos plasmáticos de glucosa, lactato, piruvato y glicerol se mantienen constantes, y que puede estar relacionado con elevados niveles de glicina, alanina y serina.

En cuanto a la actividad de enzimas membranales como la gamma glutamil transpeptidasa y la fosfatas alcalina en suero de ambos grupos de estudio, su determinación sérica ambas implica el rompimiento de la integridad de las membranas celulares. Además, se trata de una enzima específica de enfermedades hepáticas. Los resultados en los pollos SA mostraron una mayor actividad en la gamma glutamil transpeptidasa (GGT) en comparación a la actividad estimada en pollos clínicamente sanos, siendo un reflejo del daño hepático que a nivel membrana plasmática están sufriendo las aves con SA.

En suero de los pollos con SA, la actividad de fosfatas alcalina (FA) fue menor que en los sueros de pollos control, que puede relacionarse con un retardo en el crecimiento. Se ha sugerido que los osteoblastos muestran una elevada actividad FA como reflejo de la fijación de calcio para la formación de los huesos. Es posible suponer que

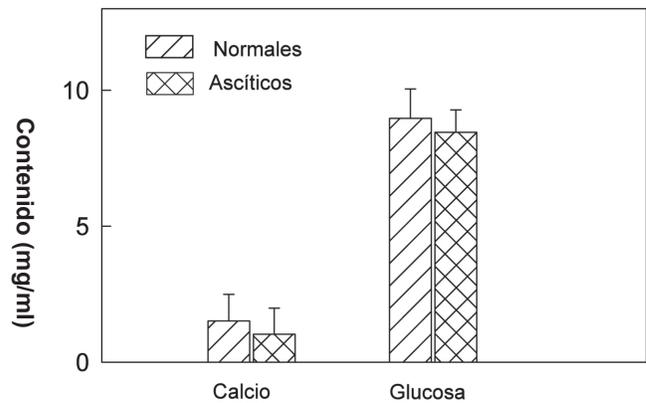


Figura 4. Contenido de calcio y glucosa en suero de pollos que sufrieron Síndrome Ascítico (líneas cruzadas). Se obtuvo sangre venosa por punción de la vena axilar. Los resultados muestran el promedio de 30 determinaciones por triplicado.

no sólo ocurren alteraciones en diversos órganos y tejidos de los pollos durante el SA. Por último, los valores del contenido sérico de calcio en pollos con SA fueron menores en comparación a los que se determinaron en el suero de pollos sanos. Esta alteración puede relacionarse con el nivel de calcio añadido en la alimentación de los pollos.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que los pollos con SA tuvieron niveles séricos significativamente menores en proteínas totales, albúmina, lípidos totales, colesterol, triglicéridos, fosfolípidos, calcio y la actividad de alanina aminotransferasa, gamma glutamiltranspeptidasa y fosfatas alcalina en comparación con parámetros estimados en pollos clínicamente sanos.

Estos resultados constituyen la evidencia de que el SA altera negativamente el metabolismo de proteínas y lípidos, pero no así, el metabolismo de los carbohidratos.

El análisis de las alteraciones serológicas causadas por el SA, pueden permitir el desarrollo de protocolos que pueden utilizarse rutinariamente. Sin embargo, es necesario realizar investigaciones básicas encaminadas a la realización de un monitoreo serológico más completo que incluya niveles

hormonales y estudios de respirometría en pollos con edades más tempranas y hasta el final de su ciclo reproductivo con el propósito de pronosticar si el pollo muestra riesgo relativo a presentar síndrome ascítico.

AGRADECIMIENTOS

Laboratorios Sanfer (México) y Wiener Lab (Argentina) por proporcionarnos algunos de los reactivos. Al CEIEPA de la Facultad de Medicina y Veterinaria de la UNAM por facilitar los animales.

REFERENCIAS

- Antillón, R.A y López, C.C. (1987). *Enfermedades nutricionales de las aves*. México. Ed. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Báez, F.M. (1984). *Evaluación de análisis clínicos del síndrome ascítico en pollos de engorda criados a diferentes alturas sobre el nivel del mar*. Tesis Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Blen, C.R. (1976). "Patterns of lipid storage and utilization in bird". *Am. Zool.* 16: 67-72.
- Cárdenas, D.M., Hernández, A. y Osuna, O. (1985). "Algunos valores hematimétricos y de proteínas totales en pollos Arbor acres sanos y ascíticos en la sabana de Bogotá". *Acoves.* 9: 29-33
- Castellanos, E.F. (1990). *Aves de corral*. México. Ed. Trillas.
- Evans, R.J., Flegal, C.A., Bauer, D.H. y Lavigne, M. (1977). "The influence of crude cotton seed oil in the feed on the blood and egg yolk lipoproteins of laying hens". *Poult. Sci.* 56: 468-472.
- Fedde, M.R. y Wideman, R.F. Jr. (1996). "Blood viscosity in broilers: influence on pulmonary hypertension syndrome". *Poult. Sci.* 75:1261-1267.
- Hazlegood, R.L. (1976). "Carbohydrate metabolism". En: Sturkie, P.D. ed. *Avian Physiology*. 3th ed. Springer-Verlag. New-York, USA.
- Krupp, A., Tierney, M.I., Jawetz, E., Roe, L.R. y Camargo, A.C. (1986). *Diagnóstico clínico y de laboratorio*. México. Ed. Manual Moderno.
- López, C.C., Odom, T. y Wideman, F.R. (1985). "Ascitis: Una de las causas de mayor mortalidad en pollos de engorda". *Avi. Prof.* 3: 49-52.
- López, C.C., Arce, M.J., Ávila, G.E. y Vásquez, P.C. (1991). "Investigaciones sobre el síndrome ascítico en pollos en engorda". *Ciencia Veterinaria* (México) 5: 13-48.
- López, C.C., Arce, M.J., Ávila, G.E. y Vásquez, C.P. (1992). *El síndrome ascítico*. Instituto de Investigaciones Agrícolas, Forestales y Pecuarias. Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos. pp 137-157.
- Lynch, M.J. y Raphael, S.F. (1990). *Métodos de laboratorio*. México Ed. Interamericana.
- Maynard, L.A. y Loosli, J.K. (1989). *Nutrición animal*. México. Ed. Mc-Graw-Hill.
- Maxwell, M.H, Robertson, G.W. y Moseley, D. (1994). "Potential role of serum troponin T in cardiomyocyte injury in the broiler ascites syndrome". *Br. Poult. Sci.* 35: 663-667.
- Nakamura, K., Ibaraki, Y., Mitarai, Z. y Shibahara, T. (1999). "Comparative pathology of heart and liver lesions of broiler chickens that died of ascites, heart failure, and others". *Avian. Dis.* 43:526-32.
- Olkowski, A.A., Rathgeber, B.M., Sawicki, G. y Classen, H.L. (2001). "Ultrastructural and molecular changes in the left and right ventricular myocardium associated with ascites syndrome in broiler chickens raised at low altitude". *J. Vet. Med. A. Physiol. Pathol. Clin. Med.* 48:1-14.
- Riddel, C. (1985). "Ascitis en Canada". *Avit. Prof.* 3: 66-67.
- Rojo, M.E. (1991). *Enfermedades de las aves*. México. Ed. Trillas.
- Scheele, C.W, Decuypere, E., Vereijken, P.F y Schreurs, F.J. (1992). "Ascites in broilers. 2. Disturbances in the hormonal regulation of metabolic rate and fat metabolism". *Poult. Sci.* 71:1971-84.

Sturkie, P.D. y Newman, H.J. (1951). "Plasma proteins of chickens as influenced by time of laying, evolution, number of blood samples taken and plasma". *Poult. Sci.* 20: 240-243.

Coordinación General de Ganaderías. (2010). "Producción de carnes en México 2010". *Claridades agropecuarias*, 207: 19-33.

Instructions to Authors

*The Editorial Board of the journal **Ciencia en la Frontera: Revista de Ciencia y Tecnología de la UACJ**, invites authors to submit manuscripts under three categories: research articles, short manuscripts (which will be short articles showing results of undergraduate thesis and written by the undergraduate students, reviewed by their advisers), and invited reviews. Manuscripts should be sent to the Editor in Chief, according to the following specifications:*

1. Papers should be from original research and with scientific content.
2. Once published, articles cannot be published elsewhere in the same form, in any language, without the consent of UACJ publishers.
3. Papers may be: research articles, short manuscripts and invited reviews, belonging to the fields of natural or exact sciences (biology, life sciences, chemistry, mathematics, physics, etc). Final decisions concerning acceptability of the manuscripts will be made by the Editorial Board.
4. Papers may be written in English, Spanish or any Romance language. If a translation to Spanish is submitted, the text in original language should also be provided. Abstracts written both in Spanish and English should also be provided.
5. Originals are not sent back.
6. If the author fails to respond to the final comments of the Editorial Board of *Ciencia en la Frontera: Revista de Ciencia y Tecnología de la UACJ*, the journal can make editing changes which do not modify the original content of the article.
7. Papers should meet the following format:
 - Short and concise title, written in both English and Spanish or Romance languages.
 - A brief abstract between 40 and 150 words, which should also be written in both languages.
 - Name and nationality of authors.
 - Affiliation of authors, including highest degree and research field of all authors.
 - Author affiliations should be included as footnotes starting from number 1.
 - Ex. Ramírez, J. L.¹ y Martínez, R.²
¹ Universidad de Puebla, México.
² Universidad de Santiago Compostela, España.
 - Footnotes should be posted at the bottom left side of the page where they are mentioned.
 - Specify type of paper, i.e. Research article, Short manuscript or Invited Review.
 - Postal address of the corresponding author, which includes: telephone, fax and e-mail. Corresponding author should be highlighted with an asterisk (*) mark.
 - Manuscripts should be submitted in triplicate, printed in one side only, letter or A4 size paper, double-spaced, with margins of 3 cm.
 - A disk copy of the manuscript in Win/Word 6.0 or higher, should also be provided. Figures and tables should be sent in Excel or WinWord 97, each saved in a different file.
 - For Research articles, manuscript length should be between 10 and 30 pages, plus figures and tables. Short manuscripts should be shorter than 10 pages, plus figures and tables.

- Figures and tables should be mentioned in the text, and numbered in arabic numbers. The software in which they were created should be mentioned.
- Figure and table legends should be concise and understandable, and should be listed at the end of the manuscript (after references).
- Bibliographic references should be quoted in the text by writing the last name of the first author and publication year between parenthesis. References will be included at the end of the text, ordered alphabetically.
- In references for book titles, capital letters should be used only at the beginning of the title and on authors names.
- When using acronyms, the full meaning of them should be provided when mentioned for the first time.
- Bibliographic references should be formatted as follows:

Book references:

Author's last name, name (year). "*Book title*". City: Editorial. Total pages.

Ex:

Foucault, Michael (1984). "*Las palabras y las cosas*". México: Siglo XXI. pp. 200.

Book section references:

Author's last name, first name (year). "*Section title*". En: Editor's name and last name (ed.). *Book title*. City: Editorial. pages.

Ex:

Levine, Frances (1991). "*Economic perspectives on the Comanchero trade*". En: Catherine A Spielmann (ed.). *Farmers, hunters and colonists*. Tucson, AZ: The University of Arizona Press. 155-169.

Journal references:

Auhor's last name, fist name(s) initial(s); other authors. (year). "Article's title". *Journal abbreviation*, volume, pages.

Ex:

Sagara, Y., Fernández-Belda, F., de Meis, L. e Inesi, G. (1992). "Characterization of the inhibition of intracellular Ca²⁺ transport ATPases by thapsigargin". *J. Biol. Chem.*, 267, 12606-12613.

Rivas-Cáceres, R. (1999). "Médanos de Samalayuca. Un urgente reclamo, una estrategia emergente". *Ciencia en la Frontera*, 1, 29-32.

Normas de publicación para los autores

*El comité editorial de la revista **Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ**, acoge con gusto, propuestas de artículos para su publicación, bajo dos modalidades: artículos de investigación y artículos síntesis de investigación o Revisiones sobre tópicos de Ciencia en General. Los manuscritos pueden estar derivados de tesis de pregrado o posgrado. Las normas establecidas para la publicación son las siguientes:*

1. Los trabajos deberán ser de calidad científica e inéditos avalados por un investigador de carrera.
2. Una vez publicado el artículo, los derechos de autor pasan a la UACJ.
3. Los artículos pueden ser artículos de investigación original, revisiones invitadas (actualizaciones en temas de investigación) o comunicaciones breves (avances de investigación), los cuales deberán referirse a las áreas de ciencias naturales y exactas, ajustándose al dictamen del comité editorial, el que evalúa su contenido científico de calidad y decide sobre la pertinencia de su publicación.
4. Los trabajos pueden ser enviados para su publicación en el idioma inglés o el español. Si se envía una traducción al español, hay que adjuntar el texto también en forma original. Los artículos deberán incluir resumen en español seguido de uno en inglés (y viceversa).
5. No se devuelven los originales.
6. En caso de que el autor no responda después de haberse presentado las correcciones o dudas de su trabajo, la Revista Ciencia en la frontera: revista de ciencia y tecnología de la UACJ, se reserva el derecho de hacer los cambios de edición sin modificar el contenido original de la obra.
7. Los trabajos deben ajustarse a los siguientes requisitos (de no cumplirse con ellos, no se con-

siderarán para su publicación):

- Título del trabajo, breve y conciso en inglés y español
- Un resumen del contenido de una extensión aproximada de 40 palabras como mínimo y 150 palabras como máximo que deberá estar en inglés y español.
- Nombre de los autores. De la manera tal y como los autores desean que aparezca en la versión impresa.
- Adscripción de todos los autores, incluyendo el máximo grado de estudios y área de especialización.
- La institución de adscripción de los autores participantes deberá incluirse como un pie de página, comenzando con el número 1.
- Ejem. Ramírez, J. L.¹ y Martínez, R.²
¹ Universidad de Puebla, México.
² Universidad de Santiago Compostela, España
- Naturaleza del trabajo: artículo de investigación, avance de investigación, etc.
- Dirección para correspondencia que incluya: teléfono, fax y correo electrónico. El nombre del autor al cual se dirigirá la correspondencia debe indicarse con un asterisco (*) y la leyenda "Autor para correspondencia".
- La extensión del trabajo deberá ser de un mínimo de 10 cuartillas de texto más las figuras, y de un máximo de 30 cuartillas más las figuras para un artículo de investigación. La extensión de los avances de investigación deberá ser de un máximo de 10 cuartillas de texto más las figuras.
- Las ilustraciones, cuadros y fotografías, deberán referirse dentro del texto, enumerándose en el orden que se cita en el mismo, e indicar el programa de cómputo en el que están elaborados.

- Los pies de figura deberán ser explícitos sin necesidad de leer el texto principal. Deberán incluirse en un listado después de la bibliografía.
- Las referencias bibliográficas deben asentarse de la forma convencionalmente establecida en español, indicando éstas en el cuerpo del texto con los apellidos del primer autor y año de publicación entre paréntesis, y los datos bibliográficos al final del escrito. La bibliografía se presenta al final del artículo por orden alfabético.
- Al citar los títulos de libro, se deben utilizar mayúsculas solo al inicio y en nombres propios.
- Al menos la primera vez, deben proporcionarse la equivalencia de las siglas empleadas en el texto, en la bibliografía y en los cuadros y las figuras.
- Distribuir los datos de las referencias bibliográficas de la siguiente manera:

Referencia de libro:

Apellidos, nombre del autor (año). "Título del libro".
Lugar: Editorial. Número de páginas totales.

Ejemplo:

Foucault, Michael (1984). "Las palabras y las cosas". México: Siglo XXI. Pp. 30-45.

Referencia de capítulo de libro:

Apellidos, nombre del autor (año). "Título del capítulo". En: Nombre y apellido del editor (ed.). *Título del libro*. Lugar: Editorial. Páginas.

Ejemplo:

Levine, Frances (1991). "Economic perspectives on the Comanchero trade". En: Catherine A Spielmann (ed.). *Farmers, hunters and colonists*. Tucson, AZ: The University of Arizona Press. 155-169.

Referencia de revista:

Apellido(s) del autor, inicial(es); otros autores. (año). "Título del artículo". *Nombre de la revista*, abreviado según el Index Medicus journal abbreviations: <http://www.nlm.nih.gov/tsd/serials/lji.html>, volumen, páginas.

Ejemplos:

Sagara, Y., Fernandez-Belda, F., de Meis, L. e Inesi, G. (1992). "Characterization of the inhibition of intracellular Ca²⁺ transport ATPases by thapsigargin". *J. Biol. Chem.*, 267, 12606-12613.

Rivas-Cáceres, R. (1999). Médanos de Samalayuca. Un urgente reclamo, una estrategia emergente. *Ciencia en la Frontera*, 1, 29-32.

SOBRE LA REMISIÓN DE ARTÍCULO Y EL PROCESO EDITORIAL

Remitir el original por correo electrónico a:

ciencia.frontera@uacj.mx
con atención al Comité Editorial

Indicar los nombres y datos de contacto de 2 revisores que se sugieran para dictaminar el artículo. Los datos de contacto son:

Nombre Completo del Revisor
Adscripción: Institución, Dependencia, Departamento, Grupo de Trabajo.
Correo electrónico
Números de Teléfono, y FAX
Dirección con Código Postal.

- El Comité Editorial acusará recibo del trabajo mediante correo electrónico. No se extienden oficios por la recepción del manuscrito. La recepción del manuscrito no garantiza su publicación.
- Posteriormente a un tiempo de dictamen de un mes máximo, el Comité Editorial remite, vía correo electrónico, el trabajo a sus autores para que realicen las modificaciones que hubiera, con base en las acotaciones de los dictaminadores.
- Los autores remitirán la segunda versión del ma-

nuscrito en un plazo máximo de 2 semanas y el Comité Editorial acusa recibo mediante correo electrónico. En caso de no recibir la versión corregida en este plazo, el comité se reserva el derecho de descartar la publicación y su posterior remisión se considerará como un nuevo proceso.

- No se emitirán oficios por la recepción de los trabajos corregidos.
- Posteriormente a la recepción del artículo en su versión definitiva, el Comité Editorial emite una acuse de recibo por correo electrónico y anunciará el proceso de revisión de galeras y publicación. Durante éste, el Comité Editorial trabaja en conjunto con la Subdirección de Publicaciones de la UACJ.
- No se emiten oficios por cada artículo aceptado para publicación.
- Cada fascículo se incluye en la página de publicaciones periódicas de la UACJ, bajo la dirección:

<http://www.uacj.mx/difusion/publicaciones/Paginas/cienciasdelafrontera.aspx>

- La versión impresa de cada fascículo se procesa por la Subdirección General de Publicaciones. Se obsequia un ejemplar por artículo como regalías.

