
Estudio estadístico de la sincronización de osciladores caóticos unidimensionales por el método de sistemas acoplados

Héctor Garcés Guzmán, Rosa Isela Ochoa Carrillo

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

RESUMEN

La sincronización de osciladores caóticos ha sido estudiada ampliamente; aquí se presentan los resultados de un proyecto de investigación sobre este fenómeno, el cual se logra por el método de sistemas acoplados. Este trabajo tiene el propósito de incrementar el conocimiento sobre las condiciones y características de la sincronización de osciladores caóticos unidimensionales. Específicamente se determinó estadísticamente la rapidez de sincronización en base a la realización de diez mil experimentos por parámetro(s) y por tipo de oscilador, como consecuencia se clasifico a los osciladores caóticos bajo estudio en tres grupos en base a la prontitud de la sincronización. Del mismo modo se determinó la existencia de estabilidad en el fenómeno bajo estudio, ya que en estudios anteriores solo se trabajó con tres y ahora se incrementó a once el tipo de oscilador caótico, observándose consistencia en los resultados.

Palabras clave: Osciladores caóticos, Método de sistemas acoplados.

INTRODUCCIÓN

Es evidente el avance en la tecnología de la información y las telecomunicaciones ocurrido en las pasadas décadas, a tal grado que los métodos existentes de detección y corrección de errores se ha llevado a los límites marcados por el teorema de capacidad de canal de C. E. Shannon. En consecuencia hay una gran demanda por explorar nuevas técnicas y herramientas como puede ser el caso de las señales caóticas, ya que estas destacan por su amplio ancho de banda y su comportamiento pseudo aleatorio. Sin embargo normalmente se asocia al caos con el desorden, con lo impredecible o con lo confuso, pero hay que hacer notar que la imprevisibilidad se debe al llamado “efecto mariposa”, en otras palabras a la extrema sensibilidad de las condiciones iniciales de

los osciladores caóticos. Asimismo es necesario resaltar que el caos está presente en la naturaleza en diversas formas y es estudiado por disciplinas del conocimiento humano tan disimiles como: biología, física, química, matemáticas, economía, meteorología, geología, filosofía, ingeniería. Aún más la naturaleza como el caos tienen un comportamiento fractal en su geometría y lo encontramos en: hojas, nubes, montañas, costas.

Por lo que se refiere a la sincronización, ésta ocurre cuando dos o más sistemas tienen idéntico comportamiento al mismo tiempo, y en algunas aplicaciones como por ejemplo los enlaces alámbricos o inalámbricos de comunicaciones digitales, la sincronización entre transmisor y receptor es crucial. En

cuanto a la sincronización de osciladores caóticos, este fenómeno se ha analizado en gran detalle tanto en forma experimental como teórica, por ejemplo Carroll y Pecora (1990) han demostrado que cuando el exponente de Lyapunov de una señal caótica es negativo es posible sincronizarla, otros estudios dieron como resultado la evaluación de los valores de umbral que aseguran la sincronización. De la misma manera, otras investigaciones (Martian et al., 1994; Malescio, 1996; Garcés, 2007; Ochoa et al., 2009) establecieron que una pequeña perturbación o una diferencia en parámetros pueden causar la sincronización de señales caóticas. En particular para osciladores caóticos discretos y unidimensionales se han desarrollado dos métodos de sincronía, los cuales son: caos más ruido y sistemas acoplados. Este artículo está enfocado al segundo caso, el cual tiene la ventaja de poder ser aplicado a todos los osciladores, a diferencia del método de caos más ruido el cual solo se puede emplear a algunos osciladores caóticos.

DESARROLLO

Osciladores caóticos

Un oscilador caótico discreto y unidimensional se define como una función no lineal $F : \phi \rightarrow \phi$, cuya función iterativa F o mapa puede ser escrito como

$$\phi(k+1) = F(\phi(k)) \quad (1)$$

Existen numerosas funciones (Kennedy et al., 2000) donde se ha observado un comportamiento caótico, entre ellas se seleccionaron para este trabajo las mostradas en la tabla 1.

Tabla 1. Mapas caóticos unidimensionales.

Mapa	Definición
Bernoulli desplazado	$F(\phi(k)) = A\phi(k-1) \bmod 1$
Chebyshev	$F(\phi(k)) = \cos(A \arccos(\phi(k-1)))$
Circulo Seno	$F(\phi(k)) = \phi(k-1) + A - B \sin(\phi(k-1))$
Congruente	$F(\phi(k)) = \begin{cases} B\phi(k-1) - 2A & \text{si } \phi > A \\ B\phi(k-1) & \text{si } \phi \leq A \\ B\phi(k-1) + 2A & \text{si } \phi < -A \end{cases}$
Coseno	$F(\phi(k)) = A \cos(\phi(k-1)) + B$
Cuadrático	$F(\phi(k)) = B - A\phi(k-1)^2$
Exponencial	$F(\phi(k)) = \phi(k-1) \exp(B(A - \phi(k-1)))$
Gaussiano	$F(\phi(k)) = A + \exp(-B\phi(k-1)^2)$
Hopping	$F(\phi(k)) = \begin{cases} D(\phi(k-1) - A) + C & \text{si } \phi > A \\ B\phi(k-1) & \text{si } \phi \leq A \\ D(\phi(k-1) + A) + C & \text{si } \phi < -A \end{cases}$
Logístico	$F(\phi(k)) = A\phi(k-1) (1 - \phi(k-1)^2)$
Tienda	$F(\phi(k)) = \begin{cases} A\phi(k-1) & \text{si } \phi < 0.5 \\ A(1 - \phi(k-1)) & \text{si } \phi > 0.5 \end{cases}$

Indiscutiblemente las funciones mostradas en la tabla 1 son deterministas, no obstante tienen características peculiares, una manera de observar su comportamiento es variar el valor de los parámetros constantes (A, B, etc.) y como consecuencia se obtiene el denominado diagrama de bifurcación. Específicamente para el mapa Gaussiano en la figura 1 se ilustra su evolución al variar los parámetros A y B de la siguiente manera; $A \in [-0.8 \ 0.8]$ y $B = 7.5$. En esta gráfica se distinguen dos regiones de operación, en la primera por ejemplo para $A = 0.6$ el resultado de todas las iteraciones siempre es el mismo $\phi(k) =$

0.6, mientras que para $A = -0.6$ el resultado de cada iteración varía en un rango aproximado de $\phi(k) \in [-0.25 \ 0.4]$, esta es una zona de operación caótica. Un análisis cuidadoso de la figura 1 muestra una alternancia o bifurcación entre regiones caóticas y deterministas.

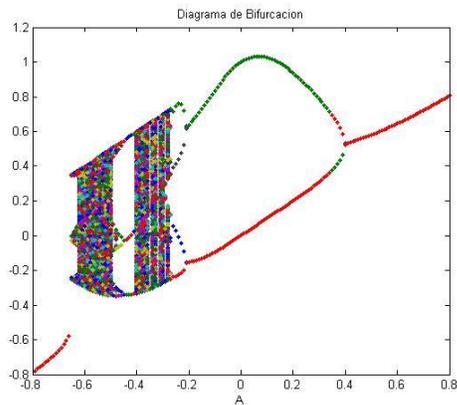


Fig. 1. Diagrama de bifurcación del mapa Gaussiano.

Sistemas acoplados

El sistema acoplado utilizado en este proyecto fue presentado en Martian y Banavar (1994) y se muestra en la figura 2, involucra la sincronización de dos parejas de osciladores. Específicamente, incluye cuatro osciladores caóticos: dos maestros ($\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$) y dos esclavos ($\Phi_1(k)$ y $\Phi_2(k)$) y están relacionados de la siguiente manera:

$$\phi_1(k+1) = F_1(\phi_1(k)) \quad (2)$$

$$\phi_2(k+1) = F_2(\phi_2(k)) \quad (3)$$

$$\Phi_1(k+1) = F_1(\Phi_1(k)) + \varepsilon[F_1(\phi_1(k)) + F_2(\phi_2(k)) - F_1(\Phi_1(k)) - F_2(\Phi_2(k))] \quad (4)$$

$$\Phi_2(k+1) = F_2(\Phi_2(k)) + \varepsilon[F_1(\phi_1(k)) + F_2(\phi_2(k)) - F_1(\Phi_1(k)) - F_2(\Phi_2(k))] \quad (5)$$

donde ε es un factor de acoplamiento que en Martian y Banavar (1994) se determinó que simplifica el sistema si $\varepsilon = 1/2$. Se puede establecer que el sistema estará sincronizado cuando:

$$\Phi_1(k) = \phi_1(k) \quad (6)$$

$$\Phi_2(k) = \phi_2(k) \quad (7)$$

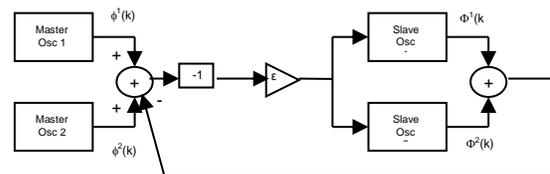


Fig. 2. Sincronización de dos pares de osciladores caóticos.

Hay que hacer notar que en este estudio de sincronía, para el arreglo descrito en la figura 2 se emplearon los mapas de la tabla 1. Asimismo y considerando el comportamiento pseudo aleatorio de los osciladores discretos y unidimensionales definidos en (1), para garantizar una respuesta caótica de los osciladores, en la tabla 2 se presentan los valores específicos de los parámetros empleados.

Tabla 2. Valores de los parámetros.

Mapa	Parámetros	
	Maestro-Esclavo 1	Maestro-Esclavo 2
Bernoulli desplazado	$A = 3.7$	$A = 3.8$
Chebyshev	$A = 3$	$A = 3$
Círculo Seno	$A = 2\pi$ $B = 1.8$	$A = 2\pi$ $B = 1.8$
Congruente	$A = 0.01$ $B = 1.8$	$A = 0.01$ $B = 1.8$
Coseno	$A = \pi/2$ $B = 47\pi/64$	$A = \pi/2$ $B = 47\pi/64$
Cuadrático	$A = 3$ $B = 1.3$	$A = 3$ $B = 1.3$

Mapa	Parámetros	
	Maestro-Esclavo 1	Maestro-Esclavo 2
Exponencial	A = 1 B = 3	A = 1 B = 3
Gaussiano	A = - 0.6 B = 7.5	A = - 0.6 B = 7.5
Hopping	A = 0.24 B = 2.5 C = 0.6 D = -2	A = 0.24 B = 2.5 C = 0.6 D = -2
Logístico	A = 3.7	A = 3.9
Tienda	A = 1.5	A = 1.2

RESULTADOS

Con el propósito de estudiar la sincronización por el método de sistemas acoplados se realizaron simulaciones numéricas en Matlab. En particular, cada observación de sincronización consto de diez mil experimentos y se exploraron los once mapas caóticos listados en la tabla 1.

El proceso de sincronía se puede analizar examinando su evolución en el tiempo, en este caso en la figura 3 se observa el desarrollo de un experimento donde se sincronizaron por el método de sistemas acoplados dos pares de osciladores maestro-esclavo que operan con el mapa Chebyshev. La sincronización se alcanza después de ocho iteraciones cuando ambos osciladores (maestro y esclavo) producen la misma señal caótica $\phi(k)$, tal como lo establecen las ecuaciones (6 - 7).

Uno de los factores para evaluar el desempeño del arreglo mostrado en la figura 2, para la sincronización de osciladores caóticos es mediante la rapidez con que se logra. En particular se denomina índice de sincronización al número de iteraciones que

realizan los osciladores hasta conseguirla. Ochoa et al. (2009) reportaron las mediciones de este parámetro para las señales caóticas: Bernoulli, Logística y Tienda, en cambio para este estudio como se mencionó con anterioridad se amplió la cantidad de mapas a once, así pues en la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos en este trabajo de investigación.

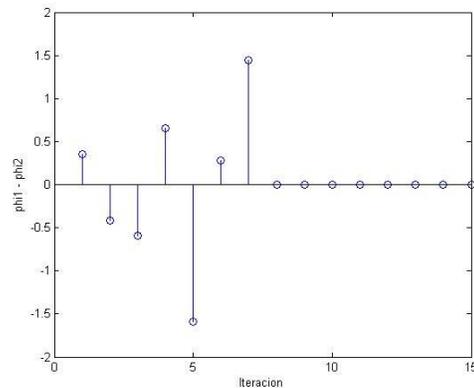


Fig. 3. Un experimento de sincronización usando el mapa Chebyshev.

En la tabla 3 se reporta para el índice de sincronización sus valores: mínimo, máximo, esperado y la desviación estándar. Tomando en cuenta la naturaleza estadística de los experimentos en la figura 4 se muestra el histograma de los diez mil experimentos de sincronización realizados usando el oscilador caótico Gaussiano. Claramente se observa que como lo indica su desviación estándar (3.39) la mayoría de los experimentos tienen una rapidez cercana al valor esperado (42.46).

Tabla 3. Índice de sincronización.

Mapa	Mínimo	Máximo	Valor esperado	Desviación estándar
Bernoulli desplazado	12	30	16.03	2.16
Chebyshev	8	53	13.01	4.49
Círculo Seno	90	132	126.01	5.94
Congruente	1208	1216	1209.8	0.82
Coseno	50	94	90.04	3.42
Cuadrático	11	21	13.35	0.86
Exponencial	5	134	13.49	7.82
Gaussiano	18	48	42.46	3.39
Hopping	1026	2017	1059	67.80
Logístico	22	2880	663.46	270.88
Tienda	22	165	60.63	19.25

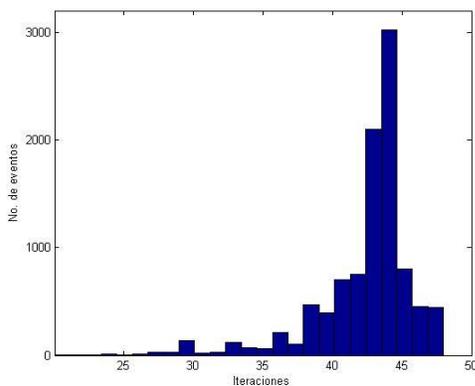


Fig. 4. Histograma de la sincronización por sistemas acoplados para el mapa Gaussiano.

En general las figuras 5 y 6 exhiben los dos principales indicadores estadísticos; el valor esperado y la desviación estándar de los once osciladores caóticos. En particular

la figura 5 ilustra el comportamiento de los mapas bajo estudio mediante el valor esperado de los diez mil experimentos, resalta que un gran número de mapas, el 64% requirió de menos de cien iteraciones, mientras que un reducido 18 % de ellos lograron sincronizarse en más de mil iteraciones.

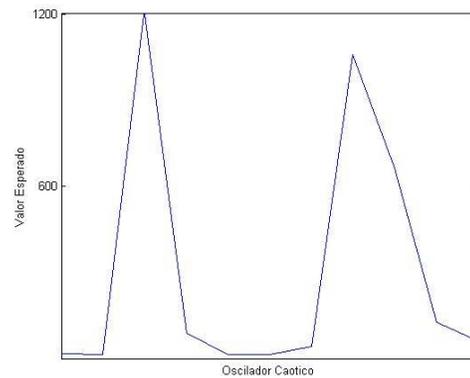


Fig. 5. Valor esperado del índice de sincronización.

Una medida de la estabilidad del proceso de sincronización es la desviación estándar de los experimentos y como se puede observar en la figura 6 solo dos mapas tienen una gran dispersión, en particular el oscilador Logístico tiene una amplia diseminación en los resultados estadísticos lo que se debe a la enorme diferencia entre los valores mínimo y máximo del índice de sincronía. Otro caso de una desviación estándar grande es el mapa Hopping, pero en este caso es diferente ya que en promedio requiere de más de mil iteraciones para lograr la sincronía.

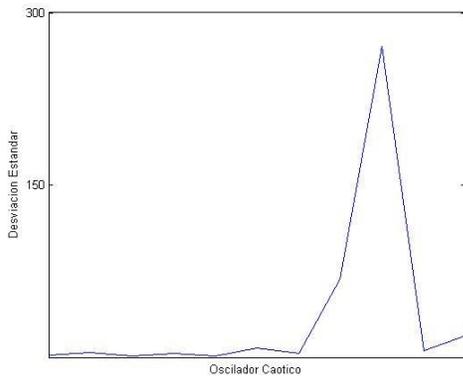


Fig. 6. Desviación estándar del índice de sincronización.

CONCLUSIONES

Con este trabajo se lograron extender los resultados previamente reportados en la literatura, así como profundizar en el conocimiento del fenómeno de sincronización de señales caóticas unidimensionales, en el caso de los sistemas acoplados. Para lograr lo anterior fue primordial el uso de herramientas estadísticas, específicamente se obtuvo el valor mínimo y máximo, el valor esperado y la desviación estándar del índice de sincronización o velocidad de sincronización.

Partiendo de los resultados previos (Garcés, 2007) que indicaron que el método de sincronización denominado caos más ruido tenía limitaciones en cuanto al tipo de osciladores caóticos, en este proyecto se continuo empleando el método de los sistemas acoplados y se amplió sustancialmente de tres a once mapas el área de conocimiento. Por otro lado se lograron identificar la existencia de osciladores que se sincronizan muy rápido, esto es en menos de veinte iteraciones en promedio, mientras que se estableció que solo dos de los mapas

estudiados logran la sincronización en más de mil iteraciones. Para continuar con el estudio ahora es necesario determinar si los mapas rápidos, en realidad lo son para la mayoría de las regiones de comportamiento caótico y lo mismo con los lentos. En otras palabras ahora habrá de determinarse si los resultados reportados son consistentes con diferentes valores de sus parámetros.

En resumen el tener un mejor conocimiento de la sincronización de señales caóticas permitirá el diseño de mejores aplicaciones donde su uso sea recomendado.

REFERENCIAS

- Carroll, T.L. Pecora, L.M. (1990). Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp 821-824.
- Garcés, H. (2007). Wideband Chaotic Signal Analysis and Processing, Dissertation, The University of Texas at El Paso.
- Kennedy, M.P. Rovatti, R. Setti, G. (2000). *Chaotic Electronics in Telecommunications*, CRC Press, ISBN 0-8493-2348-7.
- Liu, Y. Davis, P. (2000). Dual Synchronization of Chaos, *Phys. Rev. E*, vol. 61, pp R2176-R2179.
- Lim, W. Kim, S.Y. (2006), Coupling Effect on the Occurrence of Partial Synchronization in four Coupled Chaotic Systems, *Phys. Lett. A*, vol. 353, pp 398-406.
- Martian, A. Banavar, J.R. (1994). Chaos, Noise, and Synchronization, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp 1451-1454, 1994.
- Malescio, G. (1996). Effects of Noise on Chaotic One-dimensional Maps, *Phys. Lett. A*, vol. 218, pp 25-29, 1996.
- Ochoa Carrillo, R. I. Garcés Guzmán, H. Hinojosa Zubia, V. Mendoza Carreón, A. (2009). Sincronización de señales caóticas unidimensionales por el método de sistemas acoplados, *Proceedings ICSS, 31th International Congress of Electronic*

Engineering, Chihuahua, Chih., vol. XXXI, pp. 168 - 171, ISSN 1405-2172.

Tsimring L.S., Sushchik M.M., Multiplexing Chaotic Signals Using Synchronization, Phys. Lett. A, vol. 213, pp 155-166, 1996.