

DVA basado en tecnología de rigidez negativa para amortiguar fuerza inercial

Negative stiffness technology-based DVA for damping inertial force

Dr. Eduardo Barredo^{1a} , Dr. Alan Cruz Rojas² , Dra. Karina Cancino Villatoro^{1b} , Mtro. Arturo Paniagua Balcázar^{1a}, Mtro. Emmanuel Yoc Solís^{1a}

^{1a}{Departamento de Ingeniería en Sistemas Automotrices}, ^{1b}{Departamento de Tecnologías de la Información e Innovación Digital}, Universidad Politécnica de Tapachula, Tapachula - Puerto de San Benito, Chiapas, México

² Departamento de Ciencias Computacionales e Ingenierías, Centro Universitario de los Valles, Ameca, Jalisco, México

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una metodología analítica para el diseño cuasióptimo de un absorbedor dinámico de vibraciones con rigidez negativa (NS-DVA) destinado al control de vibraciones inducidas por fuerzas inerciales de desbalance en sistemas mecánicos de un grado de libertad (SDOF). La metodología integra la Técnica de los Puntos Fijos (FPT) combinada con la teoría de Steen Krenk, el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y la optimización bajo la norma $\mathcal{H}_\infty$. Se obtienen expresiones analíticas para determinar la relación óptima de ajuste de frecuencias, el factor de amortiguamiento óptimo y el intervalo permisible de la relación de rigidez negativa, garantizando la estabilidad global del sistema. Además, se incorpora un parámetro de seguridad para incrementar la robustez del diseño frente a incertidumbres paramétricas. La metodología se valida mediante la comparación entre la FPT y la optimización $\mathcal{H}_\infty$, obteniéndose respuestas dinámicas prácticamente equivalentes. Finalmente, un caso de estudio demuestra que el NS-DVA reduce el Factor de Magnificación Dinámica (DMF) en un 71 % respecto a un DVA convencional, evidenciando su superior capacidad para la mitigación de vibraciones.

PALABRAS CLAVE: rigidez negativa; vibración inercial; estabilidad de Routh-Hurwitz; Técnica de los Puntos Fijos; optimización $\mathcal{H}_\infty$.

ABSTRACT

This paper presents an analytical methodology for the quasi-optimal design of a Negative-Stiffness Dynamic Vibration Absorber (NS-DVA) intended to suppress vibrations induced by unbalanced inertial forces in single-degree-of-freedom mechanical systems (SDOF). The proposed methodology combines the Fixed-Points Theory (FPT), Steen Krenk's theory, the Routh-Hurwitz stability criterion, and $\mathcal{H}_\infty$ optimization. Closed-form expressions are derived to determine the optimal frequency tuning ratio, the optimal damping ratio, and the admissible range of the negative stiffness ratio, thereby ensuring the global stability of the coupled system. In addition, a safety parameter is introduced to enhance the robustness of the design against parametric uncertainties. The proposed methodology is validated by comparing the FPT solutions with those obtained from $\mathcal{H}_\infty$ optimization, showing nearly identical dynamic responses. Finally, a case study demonstrates that the proposed NS-DVA achieves a 71% reduction in the Dynamic Magnification Factor (DMF) compared with a conventional DVA, highlighting its superior vibration mitigation capability.

KEYWORDS: negative stiffness; inertial vibration; Routh-Hurwitz stability; Fixed-Points Technique; $\mathcal{H}_\infty$ optimization.

Correspondencia:

DESTINATARIO: Dr. Eduardo Barredo

INSTITUCIÓN: Universidad Politécnica de Tapachula /
Departamento de Ingeniería en Sistemas Automotrices

DIRECCIÓN: Carretera Tapachula-Puerto Madero km 24+300,
C. P. 30830, Tapachula - Puerto de San Benito, Chiapas, México

CORREOELECTRÓNICO: eduardo.barredo@uptapachula.edu.mx

Fecha de recepción: 10 de julio de 2026. **Fecha de aceptación:** 23 de septiembre de 2026. **Fecha de publicación:** 13 de octubre de 2026.



I. INTRODUCCIÓN

Las vibraciones inducidas por fuerzas inerciales de desbalance constituyen una de las principales fuentes de falla en maquinaria rotatoria, ya que incrementan las cargas dinámicas, aceleran el desgaste de los componentes mecánicos y reducen la precisión y confiabilidad de operación [1], [2]. Entre las diferentes estrategias de control pasivo de vibraciones, los DVA representan una de las soluciones más simples y ampliamente utilizadas, debido a que no requieren una fuente de energía externa y demandan un mantenimiento mínimo en comparación con los sistemas de control activo o semiactivo [3], [4]. Un DVA convencional está conformado por una masa auxiliar conectada a un elemento Kelvin, integrado por un resorte y un amortiguador viscoso en paralelo, cuya función es almacenar y disipar la energía vibratoria transferida desde la estructura primaria [5], [6].

El desempeño de un DVA convencional depende fuertemente de la relación de masas entre el absorbedor y la estructura primaria. Den Hartog demostró, mediante la FPT, que la capacidad de mitigación de vibraciones disminuye considerablemente cuando la masa del absorbedor es pequeña [7]. Esta limitación ha motivado el desarrollo de nuevas configuraciones de absorbedores, entre las que destacan los DVA de múltiples masas [5], [8], [9], los dispositivos basados en el elemento Maxwell [10] y aquellos que incorporan un J-damper o inerter [11], [12]. Estas tecnologías permiten incrementar la denominada masa aparente del sistema, mejorando significativamente el desempeño dinámico sin aumentar la masa física del absorbedor [13], [14]. En aplicaciones donde el espacio disponible es limitado, como ocurre en motores de combustión interna, turbomáquinas y generadores eléctricos, el uso de estos dispositivos constituye una alternativa atractiva para incrementar la eficiencia del control de transmisión vibraciones [15].

El J-damper genera un efecto de amplificación de fuerza inercial que puede interpretarse como una pseudorigidez negativa dependiente de la frecuencia de excitación, produciendo una fuerza de control en fase con la del DVA convencional [16]. Una alternativa para obtener un efecto similar consiste en incorporar un elemento de rigidez negativa (Negative Stiffness Element, NSE) [17], el cual puede implementarse mediante estructuras mecánicas precargadas [18], [19], resortes oblicuos [20], actuadores magnéticos [21] y metamateriales mecánicos [22], como se describen en la [Figura 1](#). Al igual que el

J-damper, los absorbedores dinámicos con rigidez negativa permiten incrementar la capacidad de mitigación de vibraciones utilizando masas auxiliares reducidas [23]. Sin embargo, la incorporación de una rigidez negativa puede comprometer la estabilidad dinámica del sistema, haciendo indispensable establecer límites de diseño que garanticen un funcionamiento estable [24].

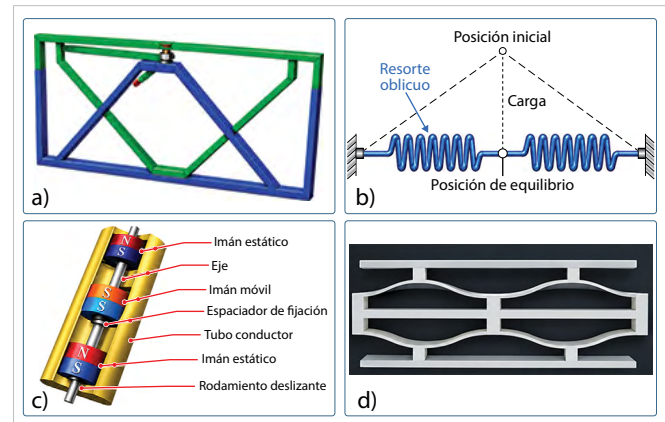


Figura 1. Principales configuraciones mecánicas empleadas para obtener características de rigidez negativa: a) estructura mecánica precargada [25], b) resortes oblicuos [24], c) actuador magnético [26] y d) metamateriales mecánicos [22].

Aunque en la literatura se han reportado diversas configuraciones de NS-DVA [24], la mayoría de sus metodologías de diseño se han desarrollado con el objetivo de minimizar el desplazamiento de la estructura principal, principalmente bajo excitaciones de fuerza externa [27] o de movimiento en la base [17], [28]. Sin embargo, cuando la excitación es producida por una fuerza inercial asociada al desbalance rotatorio [29], el problema de diseño presenta características particulares y, hasta donde se ha podido identificar, no existe una metodología analítica que permita determinar de manera sistemática los parámetros óptimos de sintonización y, simultáneamente, establecer los límites de estabilidad del sistema [30], [31]. En particular, no se ha reportado una metodología analítica que combine la FPT y la teoría de Steen Krenk [32] con un análisis explícito de estabilidad para el diseño de NS-DVA sometidos a este tipo de excitación.

Con el propósito de cubrir este vacío, en este trabajo se desarrolló una metodología analítica para el diseño cuasióptimo de un NS-DVA destinado al control de vibraciones en maquinaria rotatoria excitada por desbalance. La metodología combina la FPT, basada en los criterios de ajuste de Den Hartog y Steen Krenk, con el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y la optimización bajo

la norma $\mathcal{H}_\infty$. Como resultado, se obtienen expresiones analíticas para determinar la relación óptima de ajuste de frecuencias, el factor de amortiguamiento óptimo y el intervalo permisible de la relación de rigidez negativa, garantizando la estabilidad global del sistema. Además, se introduce un parámetro de seguridad que incrementa la robustez del diseño frente a incertidumbres paramétricas. Finalmente, la metodología propuesta se valida mediante un caso de estudio correspondiente a un motor de combustión interna, demostrando que el NS-DVA proporciona un desempeño de control significativamente superior al de un DVA convencional cuando se emplean masas auxiliares reducidas.

II. METODOLOGÍA

La metodología propuesta en este trabajo se basa en el desarrollo de un procedimiento analítico para el diseño cuasióptimo de un NS-DVA destinado a la mitigación de vibraciones inducidas por fuerzas inerciales de desbalance en sistemas mecánicos SDOF. Inicialmente, se formula el modelo matemático del sistema acoplado mediante la formulación de Euler-Lagrange y se obtiene la función de respuesta en frecuencia (FRF) en forma adimensional.

Posteriormente, se aplica la FPT, basada en los enfoques de ajuste propuestos por Den Hartog y Steen Krenk, para derivar expresiones analíticas del ajuste óptimo de frecuencias y del factor de amortiguamiento óptimo del NS-DVA. Con el fin de validar estas soluciones analíticas, se emplea la optimización bajo la norma $\mathcal{H}_\infty$, utilizando la metodología propuesta por Asami, la cual minimiza los picos resonantes de la FRF mediante la combinación del teorema de Vieta y ecuaciones constitutivas obtenidas a partir de la matriz jacobiana.

Debido a la incorporación del elemento de rigidez negativa, se realiza un análisis de estabilidad mediante el criterio de Routh-Hurwitz para determinar el intervalo permisible de la relación de rigidez negativa que garantiza la estabilidad global del sistema. Asimismo, se introduce un parámetro de seguridad que permite incorporar un margen de estabilidad adicional frente a incertidumbres y desajustes paramétricos, proporcionando un diseño más robusto.

Finalmente, la metodología propuesta se valida mediante un caso de estudio correspondiente a un motor de combustión interna sometido a fuerzas de desbalan-

ce. Se comparan las respuestas dinámicas del NS-DVA y de un DVA convencional en los dominios de la frecuencia y del tiempo, evaluando el desempeño de control en términos de la reducción del DMF. Los resultados obtenidos permiten discutir las ventajas del dispositivo propuesto y establecer las principales conclusiones del trabajo.

2.1. MODELO MATEMÁTICO

En la [Figura 2](#) se muestra una estructura mecánica no amortiguada, caracterizada por una masa M_s y una rigidez K_s , controlada mediante un dispositivo NS-DVA. Este dispositivo antivibratorio está compuesto por un resorte de rigidez k_1 , un amortiguador de fluido viscoso con coeficiente c_1 , una masa física m_1 y un elemento de rigidez negativa k_{NS} .

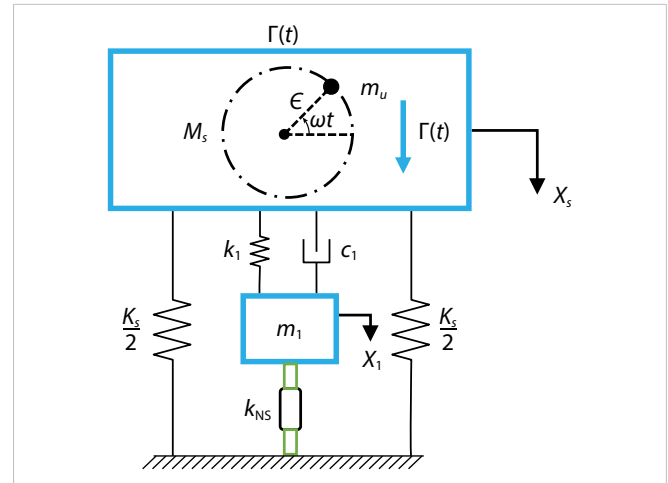


Figura 2. Absorbedor Dinámico de Vibración basado en tecnología de rigidez negativa.

El elemento NS opera dentro de su rango elástico, en el cual la deformación es linealmente proporcional a la fuerza aplicada. Por otra parte, la fuerza inercial de excitación $\Gamma(t)$ se origina principalmente debido al desbalance presente en el eje rotatorio de la máquina. Dicho desbalance se modela mediante una masa excéntrica m_u , ubicada a una distancia ϵ medida desde el centro de masa del eje, el cual gira a la velocidad angular ω . Con base en esta configuración, las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema mecánico se obtienen a partir de la formulación de Euler-Lagrange, y pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} M_s \ddot{X}_s + K_s X_s - c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_s) - k_1(X_1 - X_s) = \Gamma(t) = m_u \epsilon \omega^2 e^{i\omega t} \\ m_1 \ddot{X}_1 + c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_s) + k_1(X_1 - X_s) + k_{NS} X_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En la ecuación (1), los desplazamientos de las masas inerciales M_s y m_1 son X_s y X_1 , respectivamente. Con el objetivo de minimizar la respuesta dinámica de la estructura primaria en el dominio de la frecuencia, es necesario seleccionar las variables dimensionales siguientes:

$$\beta = \frac{m_1}{M_s}, \quad q^2 = \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2}, \quad \eta = \frac{k_{NS}}{k_1}, \quad \omega_s^2 = \frac{K_s}{M_s} \quad (2)$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m_1}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_s}$$

donde β representa la relación de masa del DVA a la masa de la estructura SDOF, q denota la frecuencia de ajuste expresada en términos de las frecuencias circulares no amortiguadas ω_s^2 y ω_1^2 , η es la relación de rigidez negativa a la rigidez del DVA y ζ_1 representa el factor de amortiguamiento del DVA. Finalmente, Ω es la relación de frecuencia forzada. Después de aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (1) y sustituir estas variables adimensionales, se obtiene la siguiente:

$$\begin{cases} (j2\beta q\Omega\zeta_1 + \beta q^2 - \Omega^2 + 1)X_s(j\Omega) - (j2\beta q\Omega\zeta_1 + \beta q^2)X_1(j\Omega) = m_1\epsilon\Omega^2 K_s^{-1}\omega_s^2 \\ -(j2q\Omega\zeta_1 + q^2)X_s(j\Omega) + (j2q\Omega\zeta_1 + j\Omega^2 - \Omega^2 + q^2)X_1(j\Omega) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

En la ecuación (3), $X_s(j\Omega)$ y $X_1(j\Omega)$ representan la transformada de Fourier de los desplazamientos $X_s(t)$ y $X_1(t)$, respectivamente. Además, $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Para determinar la FRF de la estructura primaria, es necesario resolver simultáneamente la ecuación (3). Por lo tanto, se obtiene la siguiente:

$$|H(\beta, q, \eta, \zeta_1, \Omega)|_M = \frac{X_s K_s}{m_1 \epsilon \omega_s^2} = \Omega^2 \sqrt{\frac{A(q, \eta, \Omega) + 4\zeta_1^2 B(q, \Omega)}{C(\beta, q, \eta, \Omega) + 4\zeta_1^2 D(\beta, q, \eta, \Omega)}} \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} A(q, \eta, \Omega) &= (-(1 + \eta)q^2 + \Omega^2)^2; \quad B(q, \Omega) = q^2\Omega^2; \\ C(\beta, q, \eta, \Omega) &= (-\Omega^4 + ((\eta + \beta + 1)q^2 + 1)\Omega^2 - \beta\eta q^4 - (\eta + 1)q^2)^2; \\ D(\beta, q, \eta, \Omega) &= q^2\Omega^2(-(\beta + 1)\Omega^2 + \beta\eta q^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

En la siguiente subsección, la ecuación (4) se utiliza como punto de partida para obtener los parámetros cuasióptimos que definen el diseño del NS-DVA.

2.2. TÉCNICA DE LOS PUNTOS FIJOS (FPT)

En términos generales, en el diseño dispositivos de supresión de vibración acoplados a estructuras mecánicas ligeramente amortiguadas, la variación del factor de amortiguamiento de un DVA clásico revela la existencia inherente de dos amplitudes de vibración de la FRF de la

estructura primaria, las cuales permiten establecer la base para el diseño cuasióptimo del NS-DVA. Estas amplitudes de vibración, ampliamente conocidas en la literatura como puntos fijos/invariantes, se obtienen al evaluar la ecuación (4) en los casos límite $\zeta_1 \rightarrow 0$ y $\zeta_1 \rightarrow \infty$, dando lugar a dos condiciones particulares de operación del NS-DVA. Al imponer la igualdad entre ambas condiciones de operación, se alcanza el equilibrio de los puntos invariantes, lo que conduce a la obtención de dos ecuaciones bicuadráticas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \Omega^4 + a(\beta, q, \eta)\Omega^2 + b(\beta, q, \eta) = 0 \\ \Omega^4 + \tilde{a}(\beta, q, \eta, |H_M|)\Omega^2 + \tilde{b}(\beta, q, \eta, |H_M|) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

donde

$$a(\beta, q, \eta) = \frac{-2 - 2(\beta + 1)(1 + \eta)q^2}{2 + \beta}; \quad \tilde{a}(\beta, q, \eta, |H_M|) = -\frac{2|H_M|^2(\beta + 1)(\eta\beta q^2 + 1)}{-1 + (\beta + 1)^2|H_M|^2}$$

$$b(\beta, q, \eta) = \frac{(q^2\eta(\eta + 2)\beta + 2\eta + 2)q^2}{2 + \beta}; \quad \tilde{b}(\beta, q, \eta, |H_M|) = \frac{|H_M|^2(\eta\beta q^2 + 1)^2}{-1 + (\beta + 1)^2|H_M|^2}$$

La ecuación (5) permite obtener las frecuencias invariantes de control Ω_1^2 y Ω_2^2 , correspondientes a las ubicaciones de los puntos invariantes. Asimismo, las subfunciones $a(\beta, q, \eta)$ y $\tilde{a}(\beta, q, \eta, |H_M|)$ representan la suma de las frecuencias invariantes Ω_1^2 y Ω_2^2 , mientras que las subfunciones $b(\beta, q, \eta)$ y $\tilde{b}(\beta, q, \eta, |H_M|)$ representan el producto de dichas frecuencias. Al imponer la igualdad entre estas subfunciones, se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales que determina las condiciones de sintonización cuasióptima del NS-DVA. Dicho sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_1(\beta, q, \eta, |H_M|) = \sum_{i=1}^2 \underbrace{\Omega_{i,\zeta_1 \rightarrow 0}^2}_{@a(\beta, q, \eta)} - \sum_{i=1}^2 \underbrace{\Omega_{i,\zeta_1 \rightarrow \infty}^2}_{@ \tilde{a}(\beta, q, \eta, |H_M|)} = 0 \\ f_2(\beta, q, \eta, |H_M|) = \prod_{i=1}^2 \underbrace{\Omega_{i,\zeta_1 \rightarrow 0}^2}_{@b(\beta, q, \eta)} - \prod_{i=1}^2 \underbrace{\Omega_{i,\zeta_1 \rightarrow \infty}^2}_{@ \tilde{b}(\beta, q, \eta, |H_M|)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Cuando se sustituyen las subfunciones de las ecuaciones bicuadráticas, la ecuación (6) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_1(\beta, q, \eta, |H_M|) = (\beta + 1)(-1 + (\beta^2 + 2\beta + \eta + 1)q^2)|H_M|^2 - (1 + (\beta + 1)(\eta + 1)q^2) = 0 \\ f_2(\beta, q, \eta, |H_M|) = (\eta\beta\Phi_1 q^4 + \Phi_2 q^2 - \beta - 2)|H_M|^2 - (q^2\eta(\eta + 2)\beta + 2\eta + 2)q^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

donde

$$\Phi_1 = 2\beta^2 + 4\beta + \eta + 2; \quad \Phi_2 = 2(\beta^2 + 2\beta + \eta + 1)$$

La relación de ajuste de frecuencias q y la magnitud de sintonización $|H_M|^2$, correspondientes a las frecuencias invariantes, pueden determinarse resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones definido en la ecuación (7). Como resultado, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} q_{\text{ópt}}(\beta, \eta) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\Psi_1 - (1 + \beta + \eta)}{\beta\eta(1 + \beta)}} \\ |H_M|_{\text{máx}}(\beta, \eta) = \sqrt{\frac{-(1 + \eta)\Psi_1 + (-\eta + 1)\beta + (\eta + 1)^2}{-0.5\Phi_2\Psi_1 + \beta^3 + (3\eta + 3)\beta^2 + (5\eta + 3)\beta + (\eta + 1)^2}} \end{cases} \quad (8)$$

donde

$$\Psi_1 = \sqrt{\eta^2 + (4\beta^2 + 6\beta + 2)\eta + (\beta + 1)^2}$$

La variable óptima $q_{\text{ópt}}(\beta, \eta)$ permite ajustar perfectamente la amplitud vibración $|H_M|_{\text{máx}}(\beta, \eta)$ en las frecuencias invariantes Ω_1^2 y Ω_2^2 , tal como se muestra en la Figura 3.

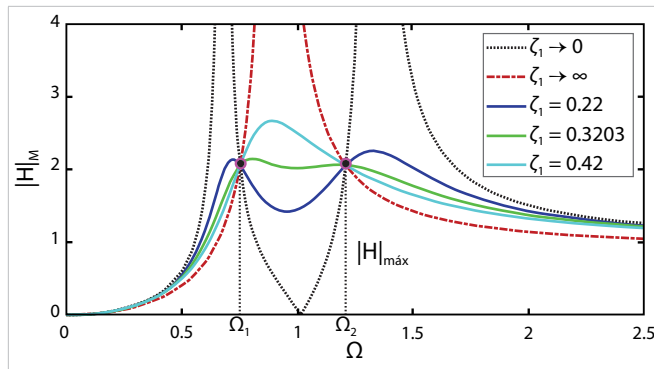


Figura 3. Sintonización de la FRF de la estructura primaria mediante la FPT basada en los enfoques de Den Hartog y Steen Krenk.

Las curvas mostradas en la Figura 3 ilustran la variación de la amplitud de la FRF de la estructura primaria para una relación de masas $\beta = 0.1$, una relación de rigidez negativa $\eta = -0.5$ y distintos valores del factor de amortiguamiento ζ_1 . Los resultados revelan que los puntos fijos localizados en las frecuencias invariantes se igualan perfectamente. Asimismo, para alcanzar este equilibrio es necesario emplear la relación de ajuste de frecuencias $q_{\text{ópt}}(\beta, \eta)$ dada por la ecuación (8). No obstante, las amplitudes de vibración en el intervalo $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ experimentan variaciones significativas a medida que cambia el factor de amortiguamiento ζ_1 , tal como se observa en las curvas de línea sólida de color cian y azul. Para lograr un balance dinámico adecuado de las amplitudes de vibración dentro de este intervalo,

se recurre al enfoque de calibración del amortiguamiento propuesto por Steen Krenk [32].

Este enfoque predice la existencia de un factor de amortiguamiento óptimo que produce amplitudes de vibración idénticas en el dominio $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$, justo antes de que el amortiguador del NS-DVA se bloquee y provoque el acoplamiento virtual de las masas inerciales M_s y m_1 . En consecuencia, para reproducir esta condición de operación del NS-DVA, es necesario determinar la frecuencia natural del sistema cuando el factor de amortiguamiento tiende a infinito, es decir, cuando $\zeta_1 \rightarrow \infty$. Dicha frecuencia está dada por la expresión siguiente:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta\eta q^2 + 1}{\beta + 1}} \quad (9)$$

Al sustituir la ecuación (9) en (4), el factor de amortiguamiento óptimo $\zeta_{1,\text{ópt}}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\zeta_{1,\text{ópt}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C(\beta, q, \eta, \Omega)}{\Omega^4 B(q, \Omega)} |H_M|^2 - \frac{A(q, \eta, \Omega)}{B(q, \Omega)}} \quad (10)$$

Nótese que el factor de amortiguamiento $\zeta_{1,\text{ópt}}$ dado por la ecuación (10), puede expresarse únicamente en función de los parámetros β y η al sustituir las variables q y $|H_M|^2$ por sus respectivas expresiones óptimas, $q_{\text{ópt}}(\beta, \eta)$ y $|H_M|_{\text{máx}}^2(\beta, \eta)$. Como resultado, se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\zeta_{1,\text{ópt}} = \sqrt{\frac{8\eta^2((2\beta^2 + 3\beta + \eta + 1)\Psi_1\Psi_4 - \Psi_2)}{(\beta + 1)(\eta + \beta + 1 - \Psi_1)(-\beta^2 + 2\beta + \eta + 1)\Psi_1 + \Psi_3)(\eta - \beta - 1 - \Psi_1)^3}} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= 2\beta^8 + 12\beta^7 + (16\eta + 34)\beta^6 + (72\eta + 60)\beta^5 + \\ &\quad (20\eta^2 + 136\eta + 71)\beta^4 + (60\eta^2 + 140\eta + 56)\beta^3 + \\ &\quad (8\eta^3 + 66\eta^2 + 84\eta + 28)\beta^2 + \\ &\quad (12\eta^3 + 32\eta^2 + 28\eta + 8)\eta + (\eta + 1)^4 \\ \Psi_3 &= \beta^3 + (3\eta + 3)\beta^2 + (5\eta + 3)\beta + (\eta + 1)^2 \\ \Psi_4 &= 2\beta^4 + 6\beta^3 + (4\eta + 7)\beta^2 + (6\eta + 4)\beta + (\eta + 1)^2 \end{aligned}$$

La ecuación (11) permite determinar el factor de amortiguamiento óptimo mediante el cual la FRF de la estructura primaria permanece prácticamente plana en el intervalo de frecuencias $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$, logrando un mejor balance dinámico de la respuesta estructural de la masa M_s bajo condiciones resonantes. Para ilustrar gráficamente este comportamiento dinámico, en la Figura 3 se representa la FRF considerando los valores $\beta = 0.1$ y $\eta = -0.5$, obteniéndose un valor de $\zeta_{1,\text{ópt}} = 0.3203$, tal como se aprecia en la curva verde de perfil aplana-

do. Por otra parte, la incorporación del elemento NS afecta la estabilidad global del sistema, lo que restringe su utilización a un intervalo específico de valores del parámetro η . Con el fin de determinar dicho intervalo, es necesario realizar un análisis de estabilidad mediante el criterio de Routh-Hurwitz, el cual se desarrolla en la siguiente subsección.

2.3. ESTABILIDAD DE ROUTH-HURWITZ

Con el fin de determinar el límite admisible de la variable adimensional de rigidez negativa, η , que garantice la estabilidad del sistema acoplado mostrado en la [Figura 2](#) dentro de un intervalo permisible de valores, es necesario recurrir al criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz [33]. Este criterio establece que un sistema dinámico es asintóticamente estable cuando todos los polos de su función de transferencia se encuentran ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. En consecuencia, el polinomio característico adimensional asociado a la FRF de la estructura primaria debe expresarse en términos de la variable λ , tal como se presenta en la siguiente ecuación:

$$Q(\lambda) = \epsilon_0 \lambda^4 + \epsilon_1 \lambda^3 + \epsilon_2 \lambda^2 + \epsilon_3 \lambda + \epsilon_4 \quad (12)$$

De acuerdo con este criterio, los coeficientes ϵ_i de la ecuación (12), para $i = 0 \dots 4$, deben ser estrictamente positivos. Esto implica que,

$$\underbrace{1}_{\epsilon_0} > 0; \underbrace{2q\zeta_1(1+\beta)}_{\epsilon_1} > 0; \underbrace{(\eta+\beta+1)q^2+1}_{\epsilon_2} > 0; \quad (13)$$

$$\underbrace{2q\zeta_1(\beta\eta q^2+1)}_{\epsilon_3} > 0; \underbrace{q^2(\beta\eta q^2+\eta+1)}_{\epsilon_4} > 0$$

Asimismo, además de las condiciones de la ecuación (13), es necesario que los siguientes determinantes sean estrictamente positivos:

$$\Xi_1 = \epsilon_1 > 0; \Xi_2 = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_3 \\ \epsilon_0 & \epsilon_2 \end{vmatrix} > 0; \Xi_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_3 & 0 \\ \epsilon_0 & \epsilon_2 & \epsilon_4 \\ 0 & \epsilon_1 & \epsilon_3 \end{vmatrix} > 0; \quad (14)$$

$$\Xi_4 = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_3 & 0 & 0 \\ \epsilon_0 & \epsilon_2 & \epsilon_4 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & \epsilon_3 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & \epsilon_2 & \epsilon_4 \end{vmatrix} > 0$$

Al sustituir los coeficientes ϵ_i en la ecuación, se obtienen las desigualdades siguientes:

$$\begin{cases} 2q\zeta_1(1+\beta) > 0 \\ (\beta^2 + 2\beta + \eta + 1)q^2 + \beta > 0 \\ 4\beta\zeta_1^2 q^2 (\eta q^2 - 1)^2 > 0 \\ 4\beta\zeta_1^2 q^2 (\beta\eta q^2 + \eta + 1)(\eta q^2 - 1)^2 > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Además, al sustituir la variable q por $q_{\text{opt}}(\beta, \eta)$, dada por la primera ecuación de (8), en las desigualdades definidas en el conjunto (15), se obtienen las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} 2\zeta_1(1+\beta)q_{\text{opt}} > 0 \\ 2\zeta_1(\eta^2 + (-\beta^3 + \beta^2 + 4\beta + 2)\eta + 2\beta^3 + 5\beta^2 + 4\beta + 1)q_{\text{opt}} > 0 \\ 64\beta^3\zeta_1^2(1+\beta)q_{\text{opt}}^2 > 0 \\ -256\beta^4\zeta_1^2(1+\beta)^7\eta^2q_{\text{opt}}^4 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

Nótese que la segunda desigualdad del conjunto (16) conduce a raíces complejas conjugadas para valores positivos de β , lo que carece de significado físico en el diseño del elemento NS. Asimismo, en la cuarta desigualdad del mismo conjunto se observa que $\eta > 0$; sin embargo, el elemento NS no puede asumir valores positivos. Por otra parte, se observa que las variables q_{opt} y ζ_1 están presentes en todas las desigualdades del conjunto (16). No obstante, es sabido que ζ_1 depende estrictamente de los valores que puede adoptar q_{opt} , tal como se establece en la ecuación (10). Por consiguiente, para satisfacer simultáneamente todas las desigualdades, es necesario que $q_{\text{opt}} > 0$, lo que implica que su discriminante sea mayor que cero. Esta condición permite determinar explícitamente el intervalo de valores permisibles para la relación de rigidez negativa, el cual se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$\eta_{\text{permisible}} = (1+\beta)(-(1+2\beta) + 2\sqrt{\beta^2 + \beta}) < \eta \leq 0 \quad (17)$$

A partir de la ecuación (17), es posible verificar la estabilidad global del sistema mediante el análisis de la evolución de los polos asociados a la ecuación (12). Para ello, se consideran dos escenarios: a) la relación de masas β varía en el intervalo $\beta \in (0, 1]$ mientras el valor permisible de $\eta_{\text{permisible}}$ permanece constante, y b) la relación de masas se fija en $\beta = 0.1$ mientras la variable η varía dentro de su intervalo permisible. La evolución de los polos correspondiente a ambos casos se presenta en la [Figura 4](#).

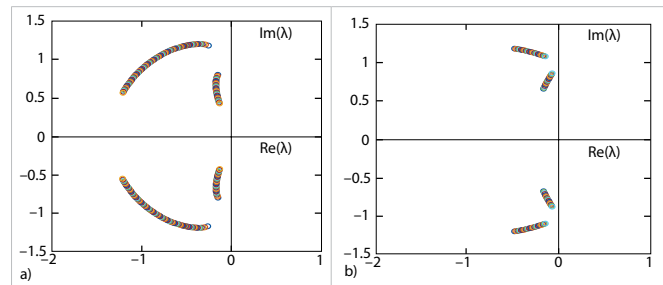


Figura 4. Evolución de los polos complejos conjugados en el semiplano izquierdo de la función de transferencia de la estructura primaria acoplada al NS-DVA: a) para el dominio $\beta \in (0, 1]$ y fijando el valor de $\eta_{\text{permisible}}$ y b) para el valor fijo de $\beta = 0.1$ y variando a $\eta \in (\eta_{\text{permisible}}, 0]$.

La Figura 4 muestra que, al variar tanto la relación de masas β como la relación de rigidez negativa η , los polos complejos conjugados del sistema permanecen ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo, lo que confirma la estabilidad global del sistema. En consecuencia, la desigualdad dada por la ecuación (17) permite diseñar un NS-DVA dentro de un intervalo permisible de valores de rigidez negativa. En la siguiente subsección, dicho intervalo permisible se utilizará para evaluar rigurosamente el desempeño del NS-DVA bajo la norma $\mathcal{H}_\infty$.

2.4. OPTIMIZACIÓN $\mathcal{H}_\infty$

Cuando el sistema está sometido a una excitación armónica, como ocurre en el caso de la fuerza inercial generada por el desbalance rotatorio, la reducción de la energía de vibración en las condiciones de operación más críticas puede abordarse mediante la optimización $\mathcal{H}_\infty$. Dicha energía se concentra principalmente en las regiones resonantes de la respuesta dinámica, particularmente en la respuesta estructural de la masa primaria, la cual exhibe dos amplitudes máximas asociadas a los picos resonantes de la FRF. En este contexto, la formulación matemática orientada a minimizar estos picos resonantes puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \min_{q, \zeta_1} (\max_{\Omega} (|H(\Omega)|_M)) = \max_{\Omega} (|H(\beta, q, \eta, \zeta_1, \Omega)|_M) \\ \text{sujeto a: } \frac{\partial |H(\Omega)|_M^2}{\partial \Omega^2} = 0 \\ (1 + \beta)(-(1 + 2\beta) + 2\sqrt{\beta^2 + \beta}) < \eta \leq 0 \\ \{q, \zeta_1\} \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Cabe señalar que el problema de optimización multi-variable no lineal definido por la ecuación (18) puede resolverse mediante técnicas numéricas convencionales, como en [34]. Sin embargo, con el fin de obtener una mayor precisión en la minimización de las amplitudes resonantes del sistema, en este trabajo se adoptó la metodología propuesta por Asami *et al.* [5], [35]. Como la FRF de la estructura primaria presenta dos picos resonantes, esta puede expresarse como una ecuación algebraica de cuarto orden en términos de Ω^2 , una vez que la magnitud $|H(\Omega)|_M^2$ se sustituye por la función auxiliar $h^2 = 1/(1 - r^2)$, donde r representa la variable de inclusión que cambia la convexidad de $|H(\Omega)|_M^2$. Definiendo las frecuencias resonantes cuadráticas del sistema como Ω_a^2 y Ω_b^2 , el polinomio característico asociado puede escribirse como $f_n(\beta, q, \eta, \zeta_1, r, \Omega) = (\Omega - \Omega_a)^2(\Omega - \Omega_b)^2$.

Posteriormente, la variable Ω puede eliminarse mediante la aplicación del teorema de Vieta, obteniéndose un sistema sobredeterminado de dos ecuaciones no lineales en función de los parámetros de diseño $\{q, \zeta_1\}$ y de la variable r . No obstante, este sistema proporciona únicamente una condición necesaria para lograr el equilibrio dinámico entre los dos picos resonantes de la FRF. Para completar las condiciones de optimalidad, se emplea la matriz jacobiana asociada a la variación infinitesimal de la variable r con respecto a los parámetros de diseño $\{q, \zeta_1\}$.

En este contexto, el criterio de optimalidad se satisface cuando cualquier determinante menor de orden 2×2 de dicha matriz se anula. La evaluación de este determinante genera una ecuación constitutiva adicional que, junto con las ecuaciones obtenidas mediante el teorema de Vieta, permite resolver completamente el problema de optimización. En consecuencia, la función objetivo definida por la ecuación (18) puede minimizarse de manera precisa en los dos picos resonantes mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} f_1(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = Y_1(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) \sqrt{Y_4(\beta, q, \eta, r)} - Y_3(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = 0 \\ f_2(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = \frac{1}{4} Y_1^2(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) - Y_2(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) + 2\sqrt{Y_4(\beta, q, \eta, r)} = 0 \\ f_3(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(q, \zeta_1)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \beta \in \mathbb{R}^+ \\ \forall \eta \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad (19)$$

donde

$$Y_1(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = (-2 + ((4\zeta_1^2 - 2\eta - 2)r^2 + (4\beta^2 + 8\beta)\zeta_1^2 - 2\beta)q^2)r^{-2}$$

$$Y_2(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = (1 + ((-8\eta\zeta_1^2 + 1)\beta^2 + (-8\eta\zeta_1^2 + 4\eta + 2)\beta + r^2(\eta + 1)^2)q^4 + (-8\beta\zeta_1^2 - 8\zeta_1^2 + 2\beta + 4\eta + 4)q^2)r^{-2}$$

$$Y_3(\beta, q, \eta, \zeta_1, r) = ((2(-\beta\eta q^4 - (\eta + 1)q^2))((\eta + \beta + 1)q^2 + 1) + 4\zeta_1^2(\beta\eta q^2 + 1)^2 q^2)r^{-2}$$

$$Y_4(\beta, q, \eta, r) = (q^4(\beta\eta q^2 + \eta + 1)^2)r^{-2}$$

A continuación, el sistema de ecuaciones no lineales definido por la ecuación (19) puede resolverse mediante el método de Newton-Raphson, utilizando como puntos iniciales de convergencia las soluciones analíticas dadas por las ecuaciones (8) y (11). Una vez obtenidos los parámetros óptimos del NS-DVA bajo el criterio $\mathcal{H}_\infty$, es necesario realizar una comparación numérica con los resultados obtenidos mediante FPT, con el fin de evaluar las diferencias en el desempeño de ambas metodologías de diseño. Para garantizar una comparación

equitativa, se consideran los parámetros $\beta = 0.1$ y $\eta = -0.5$, obteniendo los parámetros óptimos $q_{\text{ópt}} = 1.4349$ y $\zeta_{1,\text{ópt}} = 0.2836$. Las FRF optimizadas correspondientes a ambos criterios se presentan en la [Figura 5](#).

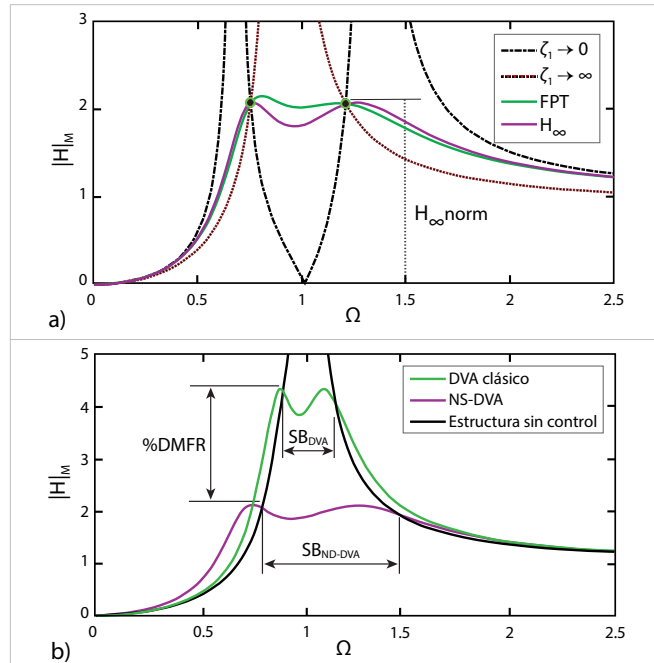


Figura 5. FRF óptimas obtenidas mediante la optimización $\mathcal{H}_{\infty}$: a) FPT vs. la optimización $\mathcal{H}_{\infty}$ y b) capacidad de reducción de los picos resonantes (%DMFR) y de ampliación del ancho de banda de supresión de frecuencias (%SB) del NS-DVA en comparación con el DVA clásico.

Nótese que, en la [Figura 5 a](#)), los picos resonantes de la FRF correspondientes a la curva sólida de color magenta, denotada por la magnitud $\mathcal{H}_{\infty}$ norm, se ubican prácticamente sobre los puntos fijos representados por los círculos verdes. Este resultado demuestra que la optimización bajo la norma $\mathcal{H}_{\infty}$ produce una respuesta dinámica prácticamente equivalente a la obtenida mediante la FPT. En consecuencia, los parámetros de diseño del NS-DVA pueden determinarse con elevada precisión a partir de las expresiones analíticas derivadas mediante la FPT.

Por otra parte, la [Figura 5 b](#)) compara el desempeño dinámico del NS-DVA con el de un DVA convencional. Los resultados muestran que la incorporación del elemento de rigidez negativa permite reducir el DMF en aproximadamente un 52 % con respecto al DVA clásico, evidenciando una mejora significativa en la capacidad de supresión de vibraciones del NS-DVA. Adicionalmente, el ancho de banda de supresión de fre-

cuencias (SB) alcanzado por el NS-DVA es aproximadamente un 63 % mayor que el obtenido con el DVA clásico, lo que evidencia una mejora en el desempeño de supresión de vibraciones con respecto a una estructura sin control. Con el objetivo de observar tanto la variación del %DMFR como la del %SB cuando varía la relación de masas β , se resolvió el conjunto de ecuaciones no lineales (19), en el rango $\beta \in [0.01, 0.1]$. Los resultados se presentan en la [Tabla 1](#).

TABLA 1
PARÁMETROS ÓPTIMOS DEL NS-DVA OBTENIDOS MEDIANTE LA OPTIMIZACIÓN $\mathcal{H}_{\infty}$

β	$q_{\text{ópt}}$	$\eta_{\text{ópt}}$	$\zeta_{1,\text{ópt}}$	Γ_{min}	$\mathcal{H}_{\infty}$ norm	%DMFR ^a	%SB ^b
0.01	2.0705	-0.7445	0.1278	0.9554	3.3897	75.9449	77.7297
0.02	1.9021	-0.6925	0.1663	0.9361	2.8443	71.3532	73.9141
0.03	1.8042	-0.6567	0.1934	0.9214	2.5735	68.1442	71.6825
0.04	1.7357	-0.6291	0.2151	0.9087	2.3960	65.6344	70.1600
0.05	1.6826	-0.6064	0.2333	0.8973	2.2661	63.5347	68.7047
0.06	1.6399	-0.5873	0.2493	0.8866	2.1627	61.7474	67.1438
0.07	1.6038	-0.5707	0.2636	0.8765	2.0778	60.1712	66.7667
0.08	1.5728	-0.5561	0.2766	0.8668	2.0053	58.7683	66.5243
0.09	1.5456	-0.5431	0.2887	0.8572	1.9421	57.5054	65.9332
0.10	1.5212	-0.5313	0.2998	0.8479	1.8867	56.3423	65.3629

^a %DMFR representa el porcentaje de reducción de los picos resonantes de la FRF de la estructura primaria al emplear el NS-DVA, con respecto a los picos obtenidos mediante el DVA clásico.

^b %SB representa el porcentaje de mejora en el ancho de banda de supresión de frecuencias del NS-DVA en comparación con el DVA clásico.

En la [Tabla 1](#) se puede observar que, para el rango $\beta \in [0.01, 0.1]$, el rendimiento de control del NS-DVA es de forma descendente, desde 76 % hasta 56 %, revelando que la masa del DVA absorbe la mayor cantidad de energía de vibración proveniente de la fuerza inercial, que luego se disipa por el amortiguador de fluido viscoso del DVA. Similarmente, el porcentaje de mejora del ancho de banda de supresión de frecuencias (%SB) presenta una tendencia decreciente, con valores que varían aproximadamente entre 78 % y 65 %. Para el rango de relación de masas analizado, el NS-DVA proporciona un mayor ancho de banda de supresión de frecuencias que el DVA clásico y la estructura sin control.

2.5. EJEMPLO PRÁCTICO

Considere un motor de combustión interna de masa $M_s = 250$ kg, conectado a un generador eléctrico. El cigüeñal presenta un desbalance equivalente $m_u e = 0.5$ kg·m. La frecuencia natural del sistema es $\omega_s = 120$ rad/s y

el motor opera a una velocidad nominal de 1200 rpm. Diseñe un NS-DVA utilizando una relación de masas $\beta = 0.03$ y una relación de rigidez negativa $\eta = -0.6567$. Empleando los parámetros óptimos de la [Tabla 1](#), determine: a) los parámetros físicos del NS-DVA, b) obtenga la respuesta vibratoria del motor en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo y c) evalúe el desempeño del NS-DVA respecto a un DVA convencional, determinando el porcentaje de reducción del DMF.

La obtención de los parámetros físicos del NS-DVA se realiza a partir de las definiciones de las variables adimensionales establecidas en la ecuación (2). En consecuencia, las expresiones para la masa, las rigideces y el coeficiente de amortiguamiento del dispositivo están dadas por la ecuación (20):

$$\begin{cases} m_1 = \beta M_s = (0.03)(250) = 7.5 \text{ kg} \\ k_1 = \beta q^2 M_s \omega_s^2 = (0.03)(1.8042)^2(250)(120)^2 = 3.5155(10^5) \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ k_{NS} = \beta \eta q^2 M_s \omega_s^2 = (0.03)(-0.6567)(1.8042)^2(250)(120)^2 = -2.3086(10^5) \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ c_1 = 2q\beta\zeta_1 M_s \omega_s = 2(1.8042)(0.03)(0.1934)(250)(120) = 628 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}} \end{cases} \quad (20)$$

La simulación numérica en los dominios del tiempo y de la frecuencia se realiza en el entorno MATLAB/Simulink, utilizando los parámetros de diseño del NS-DVA obtenidos mediante la ecuación (20). Para la integración numérica de las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden. La excitación armónica del sistema corresponde a la velocidad nominal de operación del motor, igual a 1200 rpm (125 rad/s). Los resultados obtenidos se presentan en la [Figura 6](#).

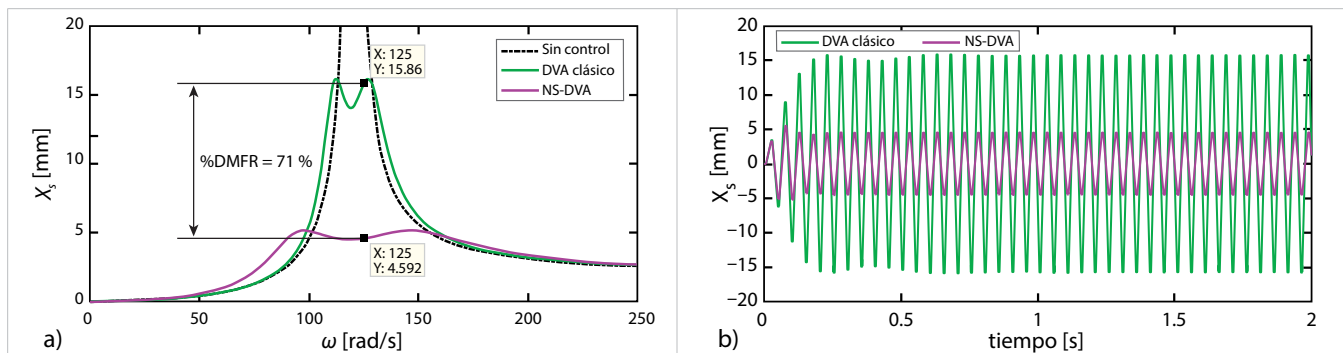


Figura 6. Respuesta dinámica del motor equipado con un NS-DVA: a) FRF de la masa del motor mostrando el %DMFR específicamente a la frecuencia de excitación $\omega=125$ rad/s y b) respuesta temporal del desplazamiento de la masa del motor.

Como se observa en la [Figura 6 a\)](#), el NS-DVA presenta un desempeño de control significativamente superior al de un DVA convencional, alcanzando una reducción del DMF del 71 % cuando el motor opera a su velocidad nominal. Este resultado evidencia la capacidad del elemento de rigidez negativa para incrementar la eficiencia en la supresión de vibraciones bajo condiciones resonantes. Por otra parte, la respuesta temporal mostrada en la [Figura 6 b\)](#) indica que, una vez que el motor alcanza el régimen permanente de operación (velocidad constante), la amplitud de vibración converge al mismo valor predicho por la FRF presentada en la [Figura 6 a\)](#). Esta concordancia confirma la consistencia entre las respuestas obtenidas en los dominios de la frecuencia y del tiempo.

En una aplicación de aislamiento de vibraciones para un motor de combustión interna, el NS-DVA puede implementarse mediante una masa auxiliar conectada a la base aislada a través de un conjunto de elementos mecánicos

que incorpore un elemento de rigidez negativa. Dicho elemento puede realizarse, entre otras alternativas, mediante un mecanismo mecánico precargado, resortes oblicuos, un dispositivo magnético pasivo o un metamaterial mecánico, como los mostrados en la [Figura 1](#). El elemento NS puede combinarse con un elemento de rigidez positiva convencional para obtener la característica de rigidez efectiva requerida por el DVA. De esta manera, el dispositivo puede integrarse directamente en la base de aislamiento del motor, aprovechando el movimiento relativo entre el motor y su soporte para generar la acción dinámica de la masa auxiliar y reducir las vibraciones transmitidas a la estructura de soporte.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La incorporación de un elemento de rigidez negativa para mejorar el desempeño de control de vibraciones de un DVA convencional requiere realizar un análisis de estabilidad dinámica, debido a que dicho elemento

introduce valores negativos de rigidez que pueden comprometer la estabilidad del sistema. En este contexto, la determinación adecuada del intervalo permisible de la relación de rigidez negativa, $\eta_{\text{permisible}}$, no solo garantiza el diseño de un NS-DVA estable, sino que también permite incrementar significativamente la capacidad

de mitigación de vibraciones con respecto a un DVA convencional. Los valores de $\eta_{\text{permisible}}$ que aseguran la estabilidad global del sistema de dinámicas acopladas se determinan mediante la ecuación (17), cuya representación gráfica se muestra en la [Figura 7](#).

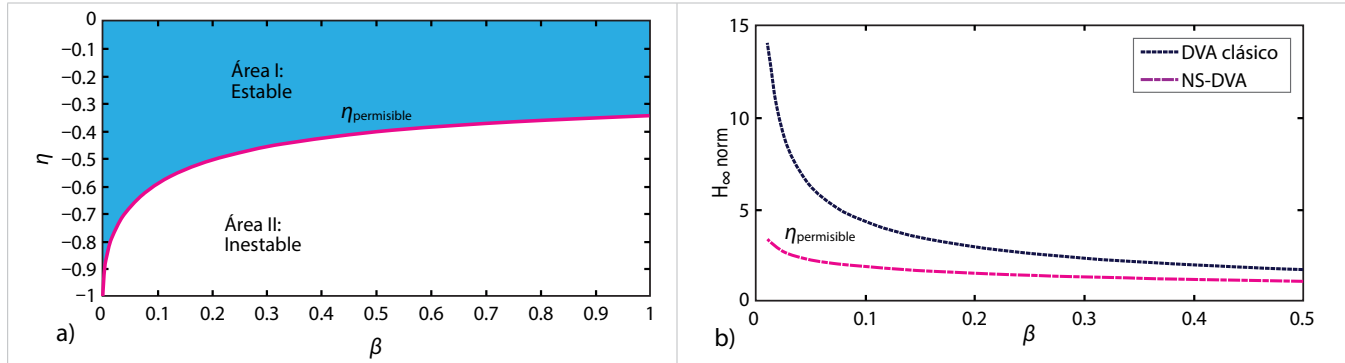


Figura 7. Rendimiento del NS-DVA comparado con el DVA clásico basado en los valores permisibles del elemento de rigidez negativa: a) región de estabilidad del sistema y b) rendimiento del NS-DVA acotado por la variable $\eta_{\text{permisible}}$.

La curva de color magenta mostrada en la [Figura 7 a\)](#) define la frontera del intervalo permisible de la relación de rigidez negativa, η , para la cual el NS-DVA alcanza el máximo desempeño de control sin perder la estabilidad dinámica. En consecuencia, el diseño del dispositivo debe considerar un margen de seguridad respecto a esta frontera, especialmente cuando se toman en cuenta las incertidumbres y los desajustes paramétricos asociados a las propiedades mecánicas de sus componentes.

Desde esta perspectiva, los valores de η ubicados en el Área I proporcionan una mayor robustez frente a variaciones paramétricas, mientras que aquellos próximos a la frontera de estabilidad incrementan el riesgo de que el sistema opere en la región de inestabilidad (Área II). Por ello, resulta conveniente introducir un factor de seguridad en la ecuación (17), mediante la incorporación de la variable ε , con el propósito de garantizar que el diseño del NS-DVA permanezca suficientemente alejado del límite de estabilidad. La formulación de esta modificación se presenta a continuación.

$$\eta_{\text{permisible}} = \varepsilon(1 + \beta)(-1 + 2\beta) + 2\sqrt{\beta^2 + \beta} < \eta \leq 0; \forall \varepsilon \in [0, 1) \quad (21)$$

En la ecuación (21), el parámetro ε define el margen de seguridad respecto al límite de estabilidad del sistema. En particular, cuando ε adopta valores cercanos a la unidad, el NS-DVA opera próximo a la frontera de estabilidad, alcanzando el máximo desempeño de control, aunque con una menor robustez frente a incertidum-

bres y desajustes paramétricos. Por el contrario, valores menores de ε incrementan el margen de estabilidad del dispositivo, mejorando su confiabilidad operativa a costa de una ligera reducción en su desempeño de control.

La [Figura 7 b\)](#) muestra la reducción de los picos resonantes de la FRF para $\varepsilon = 0.9$ y diferentes relaciones de masas β . Los resultados evidencian que el NS-DVA proporciona una mayor capacidad de mitigación de vibraciones para relaciones de masas inferiores a 0.2. Esta tendencia también se observa en la [Tabla 1](#), donde el porcentaje de reducción del DMF disminuye conforme aumenta la relación de masas, indicando que la incorporación del elemento de rigidez negativa resulta particularmente ventajosa cuando el absorbedor dispone de una masa reducida.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló una metodología analítica para el diseño cuasióptimo de un NS-DVA destinado a la mitigación de vibraciones producidas por fuerzas inerciales de desbalance en sistemas mecánicos de un grado de libertad. La metodología integra la FPT, basada en los enfoques de Den Hartog y Steen Krenk, con un análisis de estabilidad mediante el criterio de Routh-Hurwitz y una evaluación del desempeño dinámico bajo la norma H_{∞} . A partir de los resultados obtenidos, se establecen las siguientes conclusiones:

1. Se desarrolló una metodología analítica que permite determinar los parámetros cuasióptimos del NS-DVA mediante expresiones cerradas, evitando el uso exclusivo de procedimientos iterativos de optimización numérica.
2. El análisis de estabilidad permitió obtener el intervalo permisible de la relación de rigidez negativa mediante el criterio de Routh-Hurwitz. Asimismo, la incorporación del parámetro ε proporciona un margen de seguridad que mejora la robustez del diseño frente a incertidumbres paramétricas.
3. La validación mediante la norma $\mathcal{H}_\infty$ mostró que la FPT proporciona resultados prácticamente equivalentes a los obtenidos por optimización numérica, confirmando la precisión de las soluciones analíticas propuestas.
4. Los resultados numéricos revelaron que, para el caso de estudio del motor de combustión interna, el NS-DVA reduce el DMF en aproximadamente un 71 % respecto al DVA convencional, manteniendo la estabilidad del sistema dentro del intervalo permisible de la relación de rigidez negativa.
5. El análisis paramétrico reveló que el NS-DVA resulta especialmente atractivo para aplicaciones donde existen restricciones de masa y espacio, como maquinaria rotativa, motores de combustión interna, generadores eléctricos y sistemas electromecánicos de alta velocidad.

En conjunto, los resultados demuestran que la metodología propuesta constituye una herramienta de diseño eficiente, precisa y robusta para NS-DVA. Además de proporcionar soluciones analíticas para el cálculo de los parámetros óptimos, permite establecer límites explícitos de estabilidad y definir márgenes de seguridad para el diseño, contribuyendo al desarrollo de estrategias de control pasivo de vibraciones de alto desempeño.

REFERENCIAS

- [1] L. A. Baltazar-Tadeo et al., "Online algebraic identification-based trial-weight-free modal balancing of asymmetric rotor-bearing systems", *Mech Syst Signal Process*, vol. 260, art. 114962, 2026, doi: [10.1016/J.YMSSP.2026.114962](https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2026.114962).
- [2] J. G. Mendoza-Larios et al., "An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients", *Mathematics*, vol. 9, n.º 21, pp. 1-21, 2021, doi: [10.3390/math9212747](https://doi.org/10.3390/math9212747).
- [3] S. Elias y V. Matsagar, "Research developments in vibration control of structures using passive tuned mass dampers", *Annu Rev Control*, vol. 44, pp. 129-156, 2017, doi: [j.arcontrol.2017.09.015](https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2017.09.015).
- [4] N. R. Fisco y H. Adeli, "Smart structures: Part I—Active and semi-active control", *Scientia Iranica*, vol. 18, n.º 3, 2011, pp. 275-284, doi: [10.1016/j.scient.2011.05.034](https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.034).
- [5] T. Asami, "Exact Algebraic Solution of an Optimal Double-Mass Dynamic Vibration Absorber Attached to a Damped Primary System", *J. Vib. Acoust.*, vol. 141, n.º 5, p. 051013, 2019, doi: [10.1115/1.4043815](https://doi.org/10.1115/1.4043815).
- [6] O. Nishihara y T. Asami, "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)", *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, n.º 4, pp. 576-582, 2002; doi: [10.1115/1.1500335](https://doi.org/10.1115/1.1500335).
- [7] J. Ormondroyd y J. P. Den Hartog, "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber", *Trans. ASME*, vol. 49-50, n.º 2, p. 021007, 2023, doi: [10.1115/1.4058553](https://doi.org/10.1115/1.4058553).
- [8] T. Asami, "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel", *J. Vib. Acoust.*, vol. 139, n.º 1, p. 011015, 2016, doi: [10.1115/1.4034776](https://doi.org/10.1115/1.4034776).
- [9] T. Asami, Y. Mizukawa y T. Ise, "Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function", *J Vib Acoust.*, vol. 140, n.º 6, p. 061012, 2018, doi: [10.1115/1.4040229](https://doi.org/10.1115/1.4040229).
- [10] T. Asami y O. Nishihara, "Analytical and Experimental Evaluation of an Air Damped Dynamic Vibration Absorber: Design Optimizations of the Three-Element Type Model", *J Vib Acoust.*, vol. 121, n.º 3, pp. 334-342, 1999, doi: [10.1115/1.2893985](https://doi.org/10.1115/1.2893985).
- [11] D. J. Wagg, "A review of the mechanical inerter: historical context, physical realisations and nonlinear applications", *Nonlinear Dyn*, vol. 104, pp. 13-34, 2021, doi: [10.1007/s11071-021-06303-8](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06303-8).

- [12] R. Ma, K. Bi y H. Hao, "Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review", *Eng Struct*, vol. 243, art. 112655, 2021, doi: [10.1016/j.engstruct.2021.112655](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112655).
- [13] M. C. Smith, "The Inerter: A Retrospective", *Annu Rev Control Robot Auton Syst*, vol. 3, pp. 361-391, 2020, doi: [10.1146/annurev-control-053018-023917](https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023917).
- [14] A. de Souza Pippi, S. M. Avila y G. Doz, "A review on the use of the inerter device in the structural coupling technique for adjacent building vibration control", *Structures*, vol. 42, pp. 480-501, 2022, doi: [10.1016/j.istruc.2022.06.029](https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.06.029).
- [15] L. Marian y A. Giaralis, "Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems", *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 38, pp. 156-164, 2014, doi: [10.1016/j.probengmech.2014.03.007](https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2014.03.007).
- [16] E. Barredo, C. Mazón-Valadez, J. G. Mendoza-Larios e I. A. Maldonado-Bravo, "Rotational inertia-based tuned-mass-damper for controlling force transmission", *DYNA*, vol. 90, n.º 225, pp. 131-139, 2023, doi: [10.15446/dyna.v90n225.104707](https://doi.org/10.15446/dyna.v90n225.104707).
- [17] H. Zhu, Q. Chen, M. Liu y X. Huang, "Negative-stiffness DVAs for free-free force transmission control", *Int J Mech Sci*, vol. 319, p. 111571, 2026, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2026.111571](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2026.111571).
- [18] D. T. R. Pasala, A. A. Sarlis, S. Nagarajaiah, A. M. Reinhorn, M. C. Constantinou y D. P. Taylor, "Adaptive Negative Stiffness: New Structural Modification Approach for Seismic Protection", *J. Struct. Eng.*, vol. 139, n.º 7, pp. 1112-1123, 2013, doi: [10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0000615](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0000615).
- [19] A. A. Sarlis, D. T. R. Pasala, M. C. Constantinou, A. M. Reinhorn, S. Nagarajaiah, y D. P. Taylor, "Negative Stiffness Device for Seismic Protection of Structures", *J. Struct. Eng.*, vol. 139, n.º 7, pp. 1124-1133, 2013, doi: [10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0000616](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0000616).
- [20] J. Zhou, Q. Xiao, D. Xu, H. Ouyang y Y. Li "A novel quasi-zero-stiffness strut and its applications in six-degree-of-freedom vibration isolation platform", *J Sound Vib*, vol. 394, pp. 59-74, abr. 2017, doi: [10.1016/j.jsv.2017.01.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.01.021).
- [21] H. Wang, H. Gao, J. Li, Z. Wang, Y. Ni y R. Liang, "Optimum design and performance evaluation of the tuned inerter-negative-stiffness damper for seismic protection of single-degree-of-freedom structures", *Int J Mech Sci*, vol. 212, p. 106805, 2021, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2021.106805](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106805).
- [22] S. Chen et al., "A novel composite negative stiffness structure for recoverable trapping energy", *Compos Part A Appl Sci Manuf*, vol. 129, art. 105697, 2020, doi: [10.1016/J.COMPOSITESA.2019.105697](https://doi.org/10.1016/J.COMPOSITESA.2019.105697).
- [23] E. Barredo, G. López, J. Mayén y A. A. Flores-Hernández, "Innovative negative-stiffness inerter-based mechanical networks", *Int J Mech Sci*, vol. 205, p. 106597, 2021, doi: [10.1016/J.IJMECSCI.2021.106597](https://doi.org/10.1016/J.IJMECSCI.2021.106597).
- [24] H. Li, K. Bi, Q. Han y R. Ma, "A state-of-the-art review on negative stiffness-based structural vibration control", *Eng Struct*, vol. 323, parte A, p. 119247, 2025, doi: [10.1016/j.engstruct.2024.119247](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.119247).
- [25] X. Hu, Z. Zhao, E. Barredo, K. Dai, Y. Tang y N. Hong, "Nonlinear Viscous Damping-Based Negative Stiffness Isolation System for Over-Track Complex Structures", *J. Earthq. Eng.*, vol. 28, n.º 11, pp. 3146-3174, 2024, doi: [10.1080/13632469.2024.2328643](https://doi.org/10.1080/13632469.2024.2328643).
- [26] X. Shi y S. Zhu, "Simulation and optimization of magnetic negative stiffness dampers", *Sens Actuators A Phys*, vol. 259, pp. 14-33, 2017, doi: [10.1016/J.SNA.2017.03.026](https://doi.org/10.1016/J.SNA.2017.03.026).
- [27] Y. Shen, H. Peng, X. Li y S. Yang, "Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness", *Mech Syst Signal Process*, vol. 85, 193-203, 2017, doi: [10.1016/j.ymssp.2016.08.018](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.08.018).
- [28] N. Su, J. Bian, S. Peng, Z. Chen y Y. Xia, "Balancing static and dynamic performances of TMD with negative stiffness", *Int J Mech Sci*, vol. 243, art. 108068, 2023, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2022.108068](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.108068).
- [29] M. Baduidana y A. Kenfack-Jiotsa, "Optimal grounded inerter-based dynamic vibration absorber for controlling inertial force-induced vibrations in rotating machines", *J. Struct. Integr. Maint.*, vol. 9, n.º 1, pp. 1-16, 2024, doi: [10.1080/24705314.2024.2315373](https://doi.org/10.1080/24705314.2024.2315373).
- [30] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani, "A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One

Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing”, *J Vib Acoust*, vol. 137, n.º 3, pp. 1-6, 2015, doi: [10.1115/1.4029576](https://doi.org/10.1115/1.4029576).

- [31] A. J. Sheth y U. A. Patel, “Determination of Exact Optimal Tuning of Dynamic Vibration Absorbers to Control Vibration Due to Rotating Mass Unbalance”, en *Recent Advances in Manufacturing, Automation, Design and Energy Technologies*, S. K. Natarajan, R. Prakash y K. Sankaranarayanan, eds. Singapur: Springer, 2022, pp. 553-560, doi: [10.1007/978-981-16-4222-7_62](https://doi.org/10.1007/978-981-16-4222-7_62).

- [32] S. Krenk, “Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper”, *J. Appl. Mech.*, vol. 72, n.º 6, pp. 936-942, 2005, doi: [10.1115/1.2062867](https://doi.org/10.1115/1.2062867).

- [33] H. Xiuchang, S. Zhiwei y H. Hongxing, “Optimal parameters for dynamic vibration absorber with negative stiffness in controlling force transmission to a rigid

foundation”, *Int J Mech Sci*, vol. 152, pp. 88-98, 2019, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2018.12.033](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.033).

- [34] Y. Hu y M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *Int J Mech Sci*, vol. 99, pp. 297-307, 2015, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003).

- [35] E. Barredo, Z. Zhao, C. Mazón-Valadez, J. G. Mendoza e I. A. Maldonado, “A grounded inerter-based oscillating TMD for suppressing harmonic and random vibrations”, *Int J Mech Sci*, vol. 254, art. 108438, 2023, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2023.108438](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108438).

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo de investigación fue parcialmente financiado por la Universidad Politécnica de Tapachula (UPTAP).