Una opción para la determinación de las fórmulas de diferenciación mediante álgebra lineal y hoja electrónica

Oscar Ruiz Chávez[1], Juan Luna González[1], José Valente Barrón López[1], María Concepción Salazar Álvarez[1], Jesús Estrada Cabral[1]

[1]Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Resumen

En los cursos de cálculo diferencial y física se estudian conceptos de manera inicial como: función, derivada de la función, velocidad y aceleración, representados sobre una curva plana; el tratamiento inicial incorpora fórmulas de diferenciación, éstas se presentan de una forma poco adecuada, haciendo que se vea limitada una parte de la formación de estos conceptos. El presente documento describe un algoritmo para la obtención de la fórmula de diferenciación de la función a través del uso de diferencias, aproximaciones y el planteamiento de un modelo matricial y su resolución por determinantes y la regla de Cramer. La comprobación del modelo matricial se realiza con un software de manejo de hoja electrónica, Microsoft Excel. Finalmente en el intento por caracterizar los fenómenos de movimiento parece conveniente iniciar con tablas de valores, por ejemplo, un objeto en caída libre donde medimos su altura en función del tiempo.

Palabras clave: Educación, diferenciación, Excel, técnicas.

Introducción

En el cálculo diferencial, las fórmulas de diferenciación están totalmente vinculadas a la pendiente de la recta tangente a una curva dada. Éstas han sido estudiadas en temas de matemáticas como la derivada y sus derivadas sucesivas. En particular estamos interesados en determinar las fórmulas de diferenciación y, para tal efecto, consideramos el uso de diferencias y sistemas de ecuaciones lineales además el uso de la hoja electrónica para resolver estos sistemas. Se señala que el modelo matricial propuesto para la determinación de fórmulas no se ubica en los libros de texto de matemáticas, por lo cual consideramos adecuado desarrollar una comprensión más significativa respecto al tratamiento y utilización de las fórmulas de diferenciación.

Asumimos que las fórmulas de diferenciación se aplican a funciones polinómicas.

Posteriormente presentamos el desarrollo propuesto para lograr el acceso al modelo matricial, además de la verificación del modelo mediante el uso de la hoja electrónica de Excel.

Desarrollo

El primer caso es la función $f(x) = x^2$, donde presentamos dos tipos de tablas de valores. La primera muestra el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente como

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$, empezando con $\Delta x = 0$ y obteniendo los siguientes valores dividiendo Δx por 10, ésto para diferentes valores de x. La segunda tabla presenta tres columnas, donde la segunda columna está formada por las pendientes de las rectas tangentes, obtenidas a través de aproximaciones de las pendientes de las rectas secantes, para luego calcular las diferencias obteniendo los valores de las siguientes tablas.

Tabla1: pendientes de rectas secantes

x	Δx	Aprox
0	1	-1
0	0.1	-0.1
0	0.01	-0.01
0	0.001	-0.001
0	0.0001	-0.0001
0	0.00001	-0.00001

x	Δx	Aprox
1	1	1
1	0.1	1.9
1	0.01	1.99
1	0.001	1.999
1	0.0001	1.9999
1	0.00001	1.99999

x	Δx	Aprox
2	1	3
2	0.1	3.9
2	0.01	3.99
2	0.001	3.999
2	0.0001	3.9999
2	0.00001	3.99999

x	Δx	Aprox
3	1	5
3	0.1	5.9
3	0.01	5.99
3	0.001	5.999
3	0.0001	5.9999
3	0.00001	5.99999

x	Δx	Aprox
4	1	7
4	0.1	7.9
4	0.01	7.99
4	0.001	7.999
4	0.0001	7.9999
4	0.00001	7.99999

x	Δx	Aprox
5	1	9
5	0.1	9.9
5	0.01	9.99
5	0.001	9.999
5	0.0001	9.9999
5	0.00001	9.99999

x	Δx	Aprox
6	1	11
6	0.1	11.9
6	0.01	11.99
6	0.001	11.999
6	0.0001	11.9999
6	0.00001	11.99999

x	Δx	Aprox
7	1	13
7	0.1	13.9
7	0.01	13.99
7	0.001	13.999
7	0.0001	13.9999
7	0.00001	13.99999

x	Δx	Aprox
8	1	15
8	0.1	15.9
8	0.01	15.99
8	0.001	15.999
8	0.0001	15.9999
8	0.00001	15.99999

Pendientes de rectas secantes a la curva f(x)=x^2

x	Mtg	dif 1
0	0	
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
6	12	2
7	14	2
8	16	2
	Pendientes	

Tabla 1

Puede observarse que las primeras diferencias son constantes y tienen un valor de 2, dada esta circunstancia, el conjunto de puntos de la forma (x, mtg(x)) puede ser representado por una expresión polinomial de primer grado (cuyo coeficiente de correlación es r = 1).

La expresión polinomial de primer grado puede escribirse como $m_{tg}(x) = ax + b$. Donde los coeficientes a y b los calculamos mediante un sistema de ecuaciones lineales

$$m_{tg}(1) = a + b = 2$$

$$m_{tg}(2) = 2a + b = 4$$

Resolviendo para a y b tenemos que $a = 2, b = 0$,

Tabla 2: Solución del sistema de ecuaciones lineales

Sistema		
x	ti	y
1	1	2
2	1	4

Determinantes		
D	D1	D2
-1	-2	0

Solución		
a	2	
b	0	

Obteniendo entonces la función $m_{tg}(x) = 2x$.

A continuación tomemos el caso para las pendientes de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3$

En las tablas siguientes se muestra el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente como $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$, empezando con $\Delta x = 1$ y obteniendo los siguientes valores dividiendo Δx por 10, para los diferentes valores de x.

Tabla 3: pendientes de rectas secantes

x	Δx	Aprox
0	1	1
0	0.1	0.01
0	0.01	0.0001
0	0.001	0.000001
0	0.0001	0.00000001
0	0.00001	1E-10

x	Δx	Aprox
1	1	1
1	0.1	2.71
1	0.01	2.9701
1	0.001	2.997001
1	0.0001	2.9997
1	0.00001	2.99997

x	Δx	Aprox
2	1	7
2	0.1	11.41
2	0.01	11.9401
2	0.001	11.994
2	0.0001	11.9994
2	0.00001	11.99994

x	Δx	Aprox
3	1	19
3	0.1	26.11
3	0.01	26.9101
3	0.001	26.991001
3	0.0001	26.9991
3	0.00001	26.99991

x	Δx	Aprox
4	1	37
4	0.1	46.81
4	0.01	47.8801
4	0.001	47.988
4	0.0001	47.9988
4	0.00001	47.99988

x	Δx	Aprox
5	1	61
5	0.1	73.51
5	0.01	74.8501
5	0.001	74.985
5	0.0001	74.9985
5	0.00001	74.99985

x	Δx	Aprox
6	1	91
6	0.1	106.21
6	0.01	107.8201
6	0.001	107.982001
6	0.0001	107.9982
6	0.00001	107.99982

x	Δx	Aprox
7	1	127
7	0.1	144.91
7	0.01	146.7901
7	0.001	146.979
7	0.0001	146.9979
7	0.00001	146.9998

x	Δx	Aprox
8	1	169
8	0.1	189.61
8	0.01	191.7601
8	0.001	191.976
8	0.0001	191.9976
8	0.00001	191.9998

Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x)=x^3$

x	Mtg	dif 1	dif 2
0	0		
1	3	3	
2	12	9	6
3	27	15	6
4	48	21	6
5	75	27	6
6	108	33	6
7	147	39	6
8	192	45	
	Pendientes		

Tabla 3

Donde obtenemos por aproximación los valores para la pendiente de la recta tangente a *f* en *x*: ($M_{tg}(x)$). También calculamos las primeras y segundas diferencias como se muestra en la tabla 3

Nuevamente observamos que las segundas diferencias son constantes al valor 6, donde el conjunto de puntos de la forma (x, mtg(x)) puede ser representado por una expresión polinomial de segundo grado (cuyo coeficiente de correlación es r = 1). La expresión polinomial de segundo grado puede escribirse como $m_{tg}(x) = ax^2 + bx + c$.

Los coeficientes a, b y c los calculamos mediante un sistema de ecuaciones lineales

$$m_{tg}(1) = a + b + c = 3$$

$$m_{tg}(2) = 4a + 2b + c = 12$$

$$m_{tg}(3) = 9a + 3b + c = 27$$

Resolviendo el sistema a través del uso del Excel para calcular las determinantes y mediante la regla de Cramer.

Tabla 4: solución del sistema de ecuaciones lineales

sistema

x^2	x	ti	y
1	1	1	3
4	2	1	12
9	3	1	27

determinantes

D	D1	D2	D3
-2	-6	0	0

solución

a	3
b	0
c	0

Tenemos que $a = 3, b = c = 0$, entonces obtenemos la función $m_{tg}(x) = 3x^2$

Por último, calculemos las pendientes de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^4$

En las tablas siguientes se muestra el uso de la hoja electrónica para aproximar la pendiente de la recta tangente.

La tabla 5 presenta cuatro columnas, donde la segunda columna está formada por las pendientes de las rectas tangentes, obtenidas a través de aproximaciones de las pendientes de las rectas secantes, para luego calcular las diferencias obteniendo los valores de la misma forma que en las anteriores tablas.

Tabla 5

x	Δx	Aprox
0	1	-1
0	0.1	-0.001
0	0.01	-0.000001
0	0.001	-1E-09
0	0.0001	-1E-12
0	0.00001	-1E-15

x	Δx	Aprox
1	1	1
1	0.1	3.439
1	0.01	3.940399
1	0.001	3.994004
1	0.0001	3.9994
1	0.00001	3.99994

x	Δx	Aprox
2	1	15
2	0.1	29.679
2	0.01	31.7608
2	0.001	31.97601
2	0.0001	31.9976
2	0.00001	31.99976

x	Δx	Aprox
3	1	65
3	0.1	102.719
3	0.01	107.461199
3	0.001	107.946012
3	0.0001	107.9946
3	0.00001	107.99946

x	Δx	Aprox
4	1	175
4	0.1	246.559
4	0.01	255.0416
4	0.001	255.904
4	0.0001	255.9904
4	0.00001	255.999

x	Δx	Aprox
5	1	369
5	0.1	485.199
5	0.01	498.502
5	0.001	499.85
5	0.0001	499.985
5	0.00001	499.9985

x	Δx	Aprox
6	1	671
6	0.1	842.639
6	0.01	861.842399
6	0.001	863.784024
6	0.0001	863.9784
6	0.00001	863.99784

x	Δx	Aprox
7	1	1105
7	0.1	1342.879
7	0.01	1369.063
7	0.001	1371.706
7	0.0001	1371.971
7	0.00001	1371.997

x	Δx	Aprox
8	1	1695
8	0.1	2009.919
8	0.01	2044.163
8	0.001	2047.616
8	0.0001	2047.962
8	0.00001	2047.996

Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x)=x^4$

x	Mtg	dif 1	dif 2	dif 3
0	0			
1	4	4		
2	32	28	24	
3	108	76	48	24
4	256	148	72	24
5	500	244	96	24
6	864	364	120	24
7	1372	508	144	24
8	2048	676	168	24
	Pendientes			

Tabla 5

Con los datos de la tabla observamos que las terceras diferncias son constantes lo cual nos indica un comportamiento cúbico de la función, ésto es: $m(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Utilizando determinantes y el método de la regla de Cramer obtenemos la función que describe las pendientes de las rectas tangentes a $f(x) = x^4$ como $m(x) = 4x^3$

Tabla 6

sistema

x^3	x^2	x	ti	y
1	1	1	1	4
8	4	2	1	32
27	9	3	1	108
64	16	4	1	256

determinantes

D	D1	D2	D3	D4
12	48	0	0	0

solución

a	4
b	0
c	0
a	0

Aplicando diferencias, cocientes de diferencias y álgebra lineal para modelar problemas de variación en funciones de una variable.

Presentamos a continuación una propuesta que intenta abordar de forma diferente a la enseñanza tradicional los conceptos de función, de cociente de diferencias y de la definición de la derivada; tratando de promover el uso del álgebra y de los medios electrónicos para modelar una expresión que explique un fenómeno a partir de una tabla de valores, es decir, el uso de interpretación de resultados y de manipulaciones numéricas apoyados con el uso de la tecnología, para buscar un punto de encuentro, entre los algorítmico y lo conceptual.

Un objeto cae desde una altura de 500 metros. Es claro que la altura *h* del objeto con respecto del suelo irá disminuyendo.

En la siguiente tabla la primera columna corresponde al tiempo (segundos) y la segunda columna proporciona la altura del objeto.

Ahora bien nos interesa deducir la fórmula que describa el movimiento de caída del objeto.

Tabla 7. Caída libre de un objeto, diferencias

t (segundos)	h (metros)	1^{eras} diferencias	2^{das} diferencias
0	500		
1	495.1	-4.9	
2	480.4	-14.7	-9.8
3	455.9		
4	421.6	-34.3	-9.8
5	377.5	-44.1	-9.8
6	323.6		
7	259.9	-63.7	
8	186.4	-73.5	
9	103.1		
10	10	-93.1	-9.8

- Utilice diferencias finitas para decidir qué tipo de comportamiento tiene.
- Complete los valores que faltan en la tabla.
- Utilice un sistema de ecuaciones para obtener la fórmula que describe este movimiento.

Solución

Es evidente que las segundas diferencias son constantes, luego el cambio de altura es un comportamiento cuadrático de la forma: $h = at^2 + bt + c$

$$at^2 + bt + c = y$$

si $\boxed{\begin{array}{l} t = 0 \longrightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 500 \\ t = 1 \longrightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 495.1 \\ t = 2 \longrightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 480.4 \end{array}}$

entonces $\boxed{\begin{array}{l} c = 500 \\ a + b + c = 495.1 \\ 4a + 2b + c = 480.4 \end{array}}$

de donde $\boxed{\begin{array}{l} a + b = -4.9 \\ 4a + 2b = -19.6 \end{array}}$ tenemos que $\boxed{\begin{array}{l} a = -4.9 \\ b = 0 \\ c = 500 \end{array}}$ o sea $h(t) = -4.9t^2 + 0t + 500$,

o bien $h(t) = 500 - 4.9t^2 = 500 - \frac{1}{2}gt^2$. Una expresión muy utilizada en la física.

Si a las primeras y segundas diferencias las dividimos por el paso Δt (En el siguiente ejemplo $\Delta t = 0.5$), obtenemos los valores de la velocidad media (primera razón de cambio) y la aceleración media del objeto (segunda razón de cambio) para cada intervalo.

$$v_m = \frac{h_{k+1} - h_k}{\Delta t} \quad \text{primera razón}$$

$$a_m = \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} \quad \text{segunda razón}$$

Donde notamos que la aceleración es constante y equivalente a $-9.8 m/s^2 = -g$

En este caso, el objeto se deja caer desde una altura de 100 metros:

Tabla 8. Caída libre de un objeto. Cocientes de diferencias

t (seg)	**h** altura (m)	1a. Razón de cambio	2a. Razón de cambio
0	100		
0.5	98.775	-2.45	
1	95.1	-7.35	-9.8
1.5	88.975	-12.25	-9.8
2	80.4	-17.15	-9.8
2.5	69.375	-22.05	-9.8
3	55.9	-26.95	-9.8
3.5	39.975	-31.85	-9.8
4	21.6	-36.75	-9.8
4.5	0.775	-41.65	-9.8

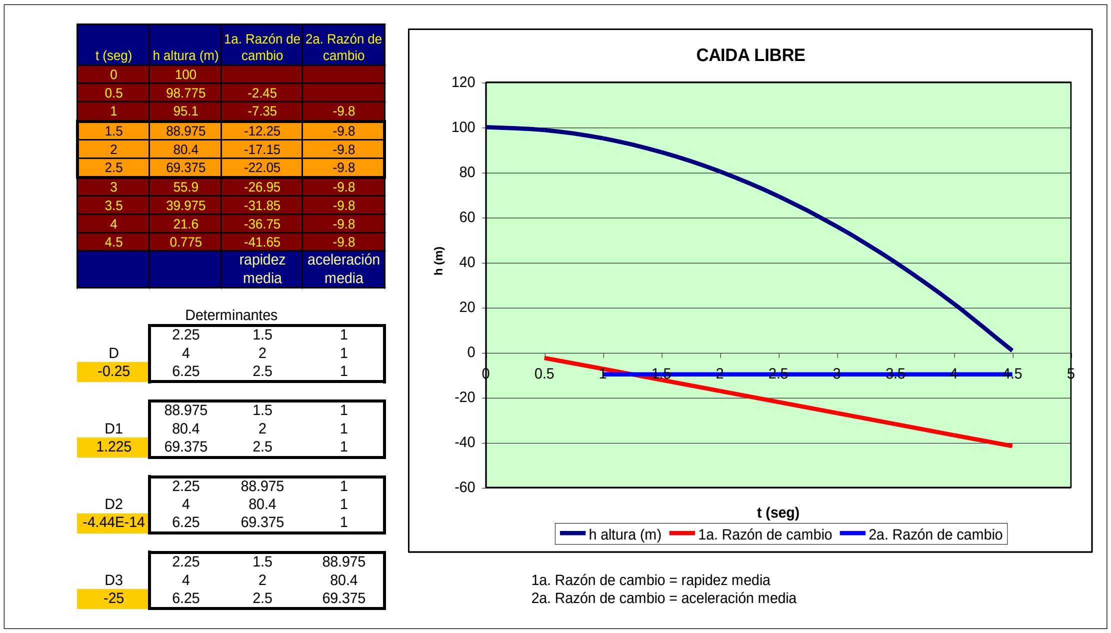

Figura 1. Hoja de Excel para realizar los cálculos

las segundas diferencias son constantes, luego el cambio de altura es un comportamiento cuadrático de la forma: $h = at^2 + bt + c$

$$at^2 + bt + c = y$$

si

$$t = 1.5 \longrightarrow a(1.5)^2 + b(1.5) + c = 88.975$$
$$t = 2.0 \longrightarrow a(2.0)^2 + b(2.0) + c = 80.4$$
$$t = 2.5 \longrightarrow a(2.5)^2 + b(2.5) + c = 69.375$$

entonces

$$a = \frac{D1}{D} = \frac{1.225}{-0.25} = -4.9$$
$$b = \frac{D2}{D} = \frac{0}{-0.25} = 0$$
$$c = \frac{D3}{D} = \frac{-25}{-0.25} = 100$$

la función que describe la altura del objeto es $h(t) = at^2 + bt + c = -4.9t^2 + 100$

Conclusiones

El presente trabajo es solo un ejemplo de cómo abordar un problema e ir más allá de lo planteado en los textos, en afán de desarrollar la curiosidad y las habilidades cognitivas del estudiante. También de cómo aprovechar la tecnología como una herramienta para la labor del docente. Es trabajo del profesor hacer las adaptaciones o mejoras a lo aquí expuesto, para desarrollar un diseño didáctico adecuado de éste o cualquier otro problema.

Referencias

Cantoral, R. y Farfán, R. 1998. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon 42: 353–369.

Muñoz, G. 2000. Elementos de Enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(2): 131-170.

Patricia Salinas… [et at.]. 2002 Elementos del Cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje. Trillas: ITESM

Maximiliano de las Fuentes Lara, Olga Gonzales Zavala, Carlos Valdez González. 2003. Una alternativa para la determinación de las fórmulas de suma. Revista Mosaicos Matemáticos No. 11. págs. 87-93.