

# Identificadores algebraicos para un sistema de suspensión pasivo basado en inersor

## *Algebraic identifiers for an inerter-based passive suspension system*

Edrei Yael Santos García<sup>1</sup> ✉ , Eduardo Barredo Hernández<sup>2,3</sup> , José Gabriel Mendoza Larios<sup>1</sup> ,  
Jesús Francisco Canseco Díaz<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

<sup>2</sup>Universidad Politécnica de Tapachula, Tapachula, Chiapas, México

<sup>3</sup>Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Cuernavaca, Morelos, México

### RESUMEN

En este trabajo se enfoca en el análisis y la formulación de identificadores para las propiedades físicas de una suspensión de un cuarto de vehículo, como la masa suspendida, rigidez de los resortes, el amortiguamiento y la inercia, utilizando una red mecánica basada en inersor. La metodología empleada para obtener estos identificadores se conoce como identificación algebraica. Para desarrollar los estimadores algebraicos, se utilizó el modelo matemático de una suspensión pasiva implementando la red mecánica C4 (TID), considerando los efectos de inercia traslacional. Los identificadores algebraicos propuestos permiten calcular los valores de los parámetros físicos del sistema en dos situaciones distintas: bajo una fuerza armónica constante y con una señal aleatoria que simula la dinámica de un camino. El análisis numérico de los identificadores muestra que es viable obtener los valores de los parámetros de masa, amortiguamiento, rigidez e inercia de la suspensión pasiva en un intervalo de tiempo muy corto, no superior a 2 segundos.

**PALABRAS CLAVE:** dispositivo inersor; identificación algebraica; parámetros físicos; suspensión pasiva.

### ABSTRACT

In this work, the focus is on the analysis and formulation of identifiers for the physical properties of a quarter-vehicle suspension, such as suspended mass, spring stiffness, damping, and inertia, using a mechanical network based on an inerter. The methodology employed to obtain these identifiers is known as algebraic identification. To develop the algebraic estimators, the mathematical model of a passive suspension was utilized by implementing the C4 mechanical network (TID), considering the effects of translational inertia. The proposed algebraic identifiers allow for the calculation of the physical parameter values of the system in two distinct situations: under a constant harmonic force and with a random signal that simulates road dynamics. The numerical analysis of the identifiers shows that it is feasible to obtain the values of mass, damping, stiffness, and inertia parameters of the passive suspension within a very short time interval, not exceeding 2 seconds.

**KEYWORDS:** inerter device; algebraic identification; physical parameters; passive suspension.

#### Correspondencia:

**DESTINATARIO:** Edrei Yael Santos García

**INSTITUCIÓN:** Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM)

**DIRECCIÓN:** Av. Dr. Modesto Seara Vázquez núm. 1, Acatlima, C. P. 69004, Huajuapán de León, Oaxaca, México

**CORREO ELECTRÓNICO:** [sede31yael@gmail.com](mailto:sede31yael@gmail.com)

**Fecha de recepción:** 11 de octubre de 2024. **Fecha de aceptación:** 28 de marzo de 2025. **Fecha de publicación:** 9 de abril de 2025.



## I. INTRODUCCIÓN

Algunos de los objetivos principales de una suspensión en un automóvil son garantizar una adecuada maniobrabilidad del vehículo al mantener la posición correcta de los neumáticos; reducir las fuerzas de aceleración, frenado y giro; brindar confort a los pasajeros y estabilizar el vehículo [1]. En el mercado automotriz existe una gran variedad de suspensiones, sin embargo, la más destacada es la pasiva, que integra elementos mecánicos que almacenan y disipan energía. Por ende, este sistema tiende ser más simple y económico tanto en diseño como en construcción [2]. Por lo general, una suspensión debe cumplir con dos objetivos importantes: proporcionar elasticidad y amortiguación. La elasticidad permite absorber las irregularidades del camino, mientras que la amortiguación reduce y controla las oscilaciones provocadas por las variaciones de carga [2], [3].

Es bien sabido que estos objetivos se pueden lograr al emplear elementos resistivos y amortiguadores viscosos, sin embargo, al integrar un inersor al arreglo mecánico de la suspensión permite mejorar la respuesta vibratoria del sistema al modificar la distribución de fuerzas [4]. El inersor es un dispositivo mecánico que no solo almacena energía vibratoria, sino que también genera un efecto de rigidez negativa, el cual puede asistir al movimiento de una estructura. Es importante mencionar que este efecto dinámico se activa y varía en función del cambio de la frecuencia de excitación. Desde su invención, se han realizado múltiples investigaciones y se ha experimentado en varias aplicaciones en sistemas mecánicos y especialmente en aplicaciones automotrices, como en suspensiones del automóvil y sistemas de dirección para motocicletas [5], [6].

Ahora bien, por ser dispositivos mecánicos estos tienden a desgastarse debido a las irregularidades del camino y, por ello, es necesario su remplazo o mantenimiento. Cuando estos dispositivos se desgastan, sus parámetros físicos cambian, como el coeficiente amortiguamiento cuando el amortiguador se deteriora, al igual que el coeficiente de rigidez del resorte y la inercia del inersor. Al cambiar los valores de estos dispositivos se pierde la sintonización del sistema y por lo tanto su eficiencia. Lamentablemente, no hay una forma directa de medir estos parámetros, solo de someter a la suspensión a ciertas pruebas de laboratorio en donde se realizan mediciones y cálculos, para obtener dichos valores. En la actualidad, existen metodologías capaces de identi-

car estos parámetros [7], [8], sin embargo, por naturaleza los sistemas tienden a complicarse y por ende su cálculo. No obstante, existe una técnica novedosa denominada identificación algebraica [9], la cual determina los parámetros físicos de un sistema utilizando el modelo matemático. Asimismo, con esta metodología es posible operar en el dominio de la frecuencia utilizando cálculo operacional para sistemas lineales, así como en el dominio del tiempo para sistemas tanto lineales como no lineales [10], [11], [12].

Los estimadores se llevan a cabo en línea y en tiempo continuo. Una de las características de la identificación algebraica es que ofrece relaciones de identificación que son completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema. Además, este método tiene excelentes propiedades de robustez frente a diversas perturbaciones, como incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas y ruido [13], [14], [15]. En la literatura se observó que esta técnica ha sido utilizada para definir los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva [16] y estimar el deterioro del coeficiente de amortiguamiento de una suspensión semiactiva [17]. Adicionalmente, también se ha aplicado para determinar parámetros en sistemas rotodinámicos [18], [19], [20].

Por lo tanto, en este documento de investigación se muestra el desarrollo de estimadores paramétricos cuyo objetivo es determinar los valores de los parámetros de amortiguamiento, rigidez, inercia y masa suspendida de una suspensión de un cuarto de automóvil, implementando una red mecánica denominada en la literatura como TID (Tuned-Inerter-Damper). Esta red mecánica consiste en una combinación en paralelo de un resorte y un amortiguador, los cuales están conectados en serie a un inersor.

## II. METODOLOGÍA

Esta investigación se llevó a cabo siguiendo cada fase de la metodología que se muestra a continuación:

- 1) Revisión de la literatura sobre la técnica de identificación algebraica en sistemas.
- 2) Definición del problema y la realización del modelo matemático de la suspensión de un cuarto de vehículo implementando la red mecánica TID.

- 3) Desarrollo de los identificadores aplicando la metodología de identificación algebraica en el dominio de la frecuencia, puesto que el sistema es lineal. Cabe señalar que los identificadores se desarrollaron para condiciones de excitación armónica y aleatoria.
- 4) Simulación numérica de los modelos matemáticos basados en identificadores algebraicos.
- 5) Análisis de los resultados obtenidos y conclusiones.

#### MODELADO MATEMÁTICO DE UNA SUSPENSIÓN DE UN CUARTO DE VEHÍCULO

En la [Figura 1](#) se representa un diagrama del modelo de una suspensión de un cuarto de vehículo implementado el TID. Este arreglo ha demostrado ser más eficiente en mitigar vibraciones en una suspensión en comparación de otras redes [21]. Al agregar esta red mecánica a la suspensión se incrementa el número de coordenadas generalizadas, al igual que los grados de libertad. En este caso, el sistema tiene tres grados de libertad.

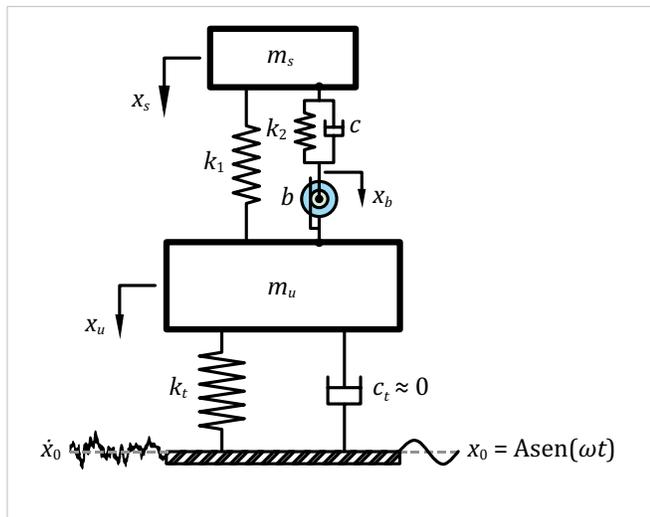


Figura 1. Esquemático de una suspensión de un cuarto de automóvil implementando el TID.

El modelo matemático de la suspensión de tres grados de libertad que se observa en la [Figura 1](#), se puede obtener aplicando el formulismo de Euler-Lagrange [22], donde se definen las coordenadas y fuerzas generalizadas. Asimismo, se determina la energía disipativa y el Lagrangiano (a partir de la energía cinética y potencial). Posteriormente, se calculan las derivadas parciales respecto al tiempo y se obtienen las ecuaciones de segundo

orden que rigen el comportamiento dinámico del sistema:

$$m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t(x_u - x_0) + k_1(x_u - x_s) = 0 \quad (1)$$

$$m_s \ddot{x}_s + c(\dot{x}_s - \dot{x}_b) + k_1(x_s - x_u) + k_2(x_s - x_b) = 0 \quad (2)$$

$$b(\ddot{x}_b - \ddot{x}_u) + c(\dot{x}_b - \dot{x}_s) + k_2(x_b - x_s) = 0 \quad (3)$$

donde los parámetros de masa suspendida y no suspendida, amortiguamiento, rigidez de los tres resortes e inercia del sistema están representados por  $m_s$ ,  $m_u$ ,  $c$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_t$  y  $b$ , respectivamente. Además, las tres coordenadas generalizadas están representadas por  $x_u$ ,  $x_s$ ,  $x_b$  y  $x_0$  es el movimiento del terreno al que se somete la suspensión. En la ecuación (1) implícitamente se encuentra la perturbación  $x_0$  que se somete en la base de la [Figura 1](#), al tener el producto de  $k_t x_0$  se tiene la fuerza de excitación  $F_0$  en la base de la suspensión.

#### ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS FÍSICOS

Para la aplicación de la técnica de identificación algebraica se requiere del modelo matemático del sistema y enseguida se desarrollan los estimadores algebraicos correspondientes. Como se comentó anteriormente, esta metodología se puede aplicar de dos maneras: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Como el modelado de la suspensión es lineal, se opta en desarrollar la identificación de parámetros en el dominio de la frecuencia.

##### A. Desarrollo de los identificadores para los parámetros físicos $b$ y $k_1$

Se pretende identificar los parámetros del coeficiente de rigidez del resorte  $k_1$  y la inercia del inersor  $b$ . Para iniciar, se toma la ecuación (1), se despeja  $F_0$ , y se tiene la ecuación diferencial:

$$m_u \ddot{x}_u + b(\ddot{x}_u - \ddot{x}_b) + k_t x_u + k_1(x_u - x_s) = F_0 \quad (3)$$

Después, a la ecuación (3) se le aplica la transformada de Laplace y de esta manera se encuentra ahora en el dominio de la frecuencia:

$$m_u \{s^2 X_u(s) - s x_u(0) - \dot{x}_u(0)\} + b \{s^2 (X_u(s) - X_b(s)) - s(x_u(0) - x_b(0)) - (\dot{x}_u(0) - \dot{x}_b(0))\} + k_t X_u(s) + k_1 \{X_u(s) - X_s(s)\} = F_0(s) \quad (4)$$

Luego, la ecuación (4) se deriva dos veces respecto a  $s$ , lo que conduce a la eliminación de las condiciones iniciales del sistema, obteniendo la siguiente ecuación:

$$m_u \left\{ 2X_u(s) + 4s \frac{d}{ds} X_u(s) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + b \left\{ 2(X_u(s) - X_b(s)) + 4s \frac{d}{ds} (X_u(s) - X_b(s)) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_b(s)) \right\} + k_t \left\{ \frac{d}{ds} X_u(s) \right\} + k_1 \left\{ \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_s(s)) \right\} = \frac{d^2}{ds^2} F_0(s) \quad (5)$$

Posteriormente, se multiplican ambos lados de la ecuación (5) por  $s^{-2}$ , lo cual lleva a una expresión libre de derivadas en el dominio del tiempo,

$$m_u \left\{ 2s^{-2} X_u(s) + 4s^{-1} \frac{d}{ds} X_u(s) + \frac{d^2}{ds^2} X_u(s) \right\} + b \left\{ 2s^{-2} (X_u(s) - x_b(s)) + 4s^{-1} \frac{d}{ds} (X_u(s) - X_b(s)) + \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_b(s)) \right\} + k_t \left\{ s^{-2} \frac{d}{ds} X_u(s) \right\} + k_1 \left\{ s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} (X_u(s) - X_s(s)) \right\} = s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} F_0(s) \quad (6)$$

Se observa que la ecuación (6) está en el dominio de la frecuencia, por lo que se necesita pasarla al dominio del tiempo. Para realizar esto se utilizan las inversas de la transformada de Laplace de las reglas de la derivada y del cociente:

$$m_u \left\{ 2 \int^{(2)} x_u(t) - 4 \int t x_u(t) + t^2 x_u(t) \right\} + b \left\{ 2 \int^{(2)} (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t (x_u(t) - x_b(t)) + t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + k_t \left\{ \int^{(2)} t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^{(2)} t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^{(2)} t^2 F_0(t) \quad (7)$$

Dado que los parámetros  $b$  y  $k_1$  son desconocidos, es necesario identificarlos. Como solo se tiene una ecuación, se requiere una adicional con la finalidad de tener un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, por este motivo se integra la ecuación (7) y ahora se obtiene la ecuación (8):

$$m_u \left\{ 2 \int^{(3)} x_u(t) - 4 \int^{(2)} t x_u(t) + \int t^2 x_u(t) \right\} + b \left\{ 2 \int^{(3)} (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int^{(2)} t (x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2 (x_u(t) - x_b(t)) \right\} + k_t \left\{ \int^{(3)} t^2 x_u(t) \right\} + k_1 \left\{ \int^{(3)} t^2 (x_u(t) - x_s(t)) \right\} = \int^{(3)} t^2 F_0(t) \quad (8)$$

Ya con las ecuaciones (7) y (8) se tiene un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$ , que conduce a un sistema de ecuaciones simultáneo de la forma siguiente:

$$P(t)\Theta = Q(t) \quad (9)$$

donde  $\Theta = \{b, k_1\}^T$  es el vector de parámetros que se van a identificar y  $P(t)$ ,  $Q(t)$  son matrices de tamaño  $2 \times 2$  y  $2 \times 1$ , respectivamente, las cuales están dadas por:

$$P(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

siendo:

$$a_{11}(t) = 2 \int^{(2)} (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t (x_u(t) - x_b(t)) + t^2 (x_u(t) - x_b(t))$$

$$a_{21}(t) = 2 \int^{(3)} (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int^{(2)} t (x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2 (x_u(t) - x_b(t))$$

$$a_{12}(t) = \int^{(2)} t^2 (x_s(t) - x_u(t))$$

$$a_{22}(t) = \int^{(3)} t^2 (x_u(t) - x_s(t))$$

$$b_1 = \int^{(2)} t^2 F_0(t) - m_u \left\{ 2 \int^{(2)} x_u(t) - 4 \int t x_u(t) + t^2 x_u(t) \right\} - k_t \left\{ \int t^2 x_u(t) \right\}$$

$$b_2 = \int^{(3)} t^2 F_0 - m_u \left\{ 2 \int^{(3)} x_u(t) - 4 \int^{(2)} t x_u(t) + \int t^2 x_u(t) \right\} - k_t \left\{ \int^{(3)} t^2 x_u(t) \right\}$$

De la solución de la expresión (9) se obtienen los identificadores de los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ k_1 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

### B. Desarrollo de los identificadores para los parámetros físicos $k_2$ y $m_s$

De la misma forma, se estiman los parámetros de la masa suspendida  $m_s$ , que representa la cuarta parte de la masa del chasis del automóvil y el coeficiente de rigidez  $k_2$  del resorte de la suspensión. Se toma la ecuación (2), se hace el mismo tratamiento matemático de la ecuación (1) y, posteriormente, se tiene la siguiente ecuación en el dominio del tiempo:

$$m_s \left\{ 2 \int^{(2)} x_s(t) - 4 \int t x_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} + c \left\{ -2 \int^{(2)} t(x_s(t) - x_b(t)) + \int t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} + k_1 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} = 0 \quad (10)$$

Ahora bien, como se identificará  $m_s$  y  $k_2$  de la ecuación (10), se despejan estos parámetros y, en consecuencia, los coeficientes  $c$  y  $k_1$  se consideran como datos de entrada y todo esto conduce a la siguiente ecuación:

$$m_s \left\{ 2 \int^{(2)} x_s(t) - 4 \int t x_s(t) + t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} = c \left\{ 2 \int^{(2)} t(x_s(t) - x_b(t)) - \int t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} \quad (11)$$

$$m_s \left\{ 2 \int^{(3)} x_s(t) - 4 \int^{(2)} t x_s(t) + \int t^2 x_s(t) \right\} + k_2 \left\{ \int^{(3)} t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} = c \left\{ 2 \int^{(3)} t(x_s(t) - x_b(t)) - \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^{(3)} t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\} \quad (12)$$

Luego se integra una vez la ecuación (11), para poder formar un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$  con dos incógnitas. Así pues, las ecuaciones (11) y (12) dan como resultado un sistema de ecuaciones de la forma (9), las cuales se muestran a continuación:

$$P(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

siendo

$$c_{11}(t) = 2 \int^{(2)} x_s(t) - 4 \int t x_s(t) + t^2 x_s(t)$$

$$c_{21}(t) = 2 \int^{(3)} x_s(t) - 4 \int^{(2)} t x_s(t) + \int t^2(x_s(t))$$

$$c_{12}(t) = \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_b(t))$$

$$c_{22}(t) = \int^{(3)} t^2(x_u(t) - x_b(t))$$

$$d_1 = c \left\{ 2 \int^{(2)} t(x_s(t) - x_b(t)) - \int t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\}$$

$$d_2 = c \left\{ 2 \int^{(3)} t(x_s(t) - x_b(t)) - \int^{(2)} t^2(x_s(t) - x_b(t)) \right\} - k_1 \left\{ \int^{(3)} t^2(x_s(t) - x_u(t)) \right\}$$

Al solucionar el sistema se obtienen los parámetros desconocidos:

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{\Delta_1(t)}{\det[P(t)]} \\ k_2 &= \frac{\Delta_2(t)}{\det[P(t)]} \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$$

### C. Identificador del amortiguamiento $c$

Por último, para identificar el parámetro  $c$  se sigue el mismo procedimiento mostrado anteriormente y considerando la ecuación (3) se tiene la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

$$b \left\{ 2 \int^{(2)} (x_u(t) - x_b(t)) - 4 \int t(x_u(t) - x_b(t)) + \int t^2(x_u(t) - x_b(t)) \right\} + c \left\{ -2 \int^{(2)} t(x_b(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} + k_2 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\} = 0 \quad (13)$$

Como anteriormente, ya se estimaron los parámetros tanto  $b$  y  $k_2$ , se toman como datos de entrada y por lo tanto el único parámetro desconocido es  $c$ . Entonces, se despeja la variable desconocida de la ecuación (13) y se tiene la siguiente expresión:

$$c = \frac{n(t)}{d(t)} \quad (14)$$

donde

$$n(t) = b \left\{ -2 \int^{(2)} (x_u(t) - x_b(t)) + 4 \int t(x_u(t) - x_b(t)) - \int t^2(x_u(t) - x_b(t)) \right\} - k_2 \left\{ \int^{(2)} t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\}$$

$$d(t) = \left\{ -2 \int^{(2)} t(x_b(t) - x_s(t)) + \int t^2(x_b(t) - x_s(t)) \right\}$$

Este parámetro es válido siempre y cuando  $d(t) \neq 0$  y es identificable cuando se cumpla la condición de:

$$c = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [t_0, t_0 + \epsilon) \\ \frac{n(t)}{d(t)} & t > t_0 + \epsilon \end{cases}$$

Es importante mencionar que tanto  $P(t)$  como  $Q(t)$  dependen solamente de la respuesta vibratoria del sistema. Además,  $\Theta$  se puede identificar algebraicamente si se cumple que  $\det[P(t)] \neq 0$  [9]. En la literatura, se ha verificado que esta condición se mantiene en al menos

un pequeño intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ , tal que  $\epsilon > 0$  y suficientemente pequeño.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el siguiente apartado se muestran las simulaciones correspondientes para los estimadores de los parámetros físicos de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil implementando el TID (Figura 1). Cabe mencionar que se realizaron dos simulaciones distintas en Matlab/Simulink: en la primera se consideró una fuerza de excitación armónica y en la segunda se le aplicó una señal aleatoria. Para ambos casos, los valores físicos empleados se muestran en la Tabla 1. Además, Runge-Kutta es el método numérico empleado para resolver las ecuaciones del sistema.

TABLA 1  
PARÁMETROS FÍSICOS DE LA SUSPENSIÓN IMPLEMENTANDO EL TID [22]

PARÁMETRO	VALOR
$b$	217 kg
$k_1$	22000 N/m
$k_2$	10000 N/m
$c$	1067 N·s/m
$k_t$	190000 N/m
$m_s$	320 kg
$m_u$	45 kg

#### SIMULACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES DE LA SUSPENSIÓN SOMETIDA A UNA FUERZA ARMÓNICA

Para la simulación de los identificadores de los parámetros físicos  $m_s$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente, se consideró como dato de entrada una señal armónica de la forma siguiente:

$$x_0 = 0.2\text{sen}(10t) \quad (15)$$

donde  $x_0$  es el desplazamiento alcanzado en la base del sistema, con una amplitud de  $\pm 0.2$  m y una frecuencia de 10 rad/s, el cual representa un camino con irregularidades de amplitud constante de forma sinusoidal, proporcionando una excitación ideal para analizar el comportamiento de los identificadores y su capacidad de estimación en condiciones controladas. En la Figura 2 se muestra la señal armónica de vibración dada por la ecuación (15).

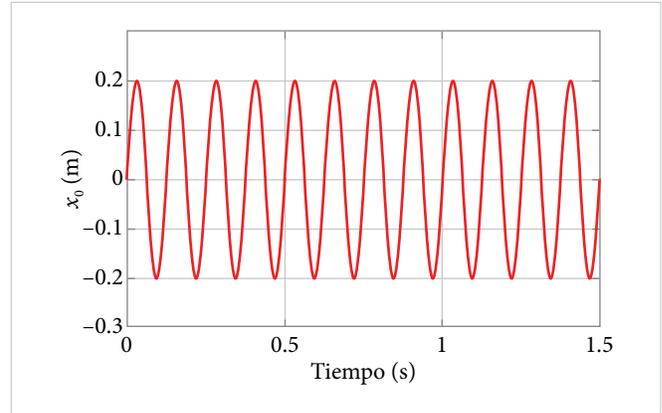


Figura 2. Respuesta vibratoria del sistema de una señal de entrada tipo armónica.

En las Figuras 3 a 7 se proporciona una representación clara de cómo el identificador ajusta los parámetros a lo largo del tiempo, mostrando la eficacia y precisión de la técnica implementada.

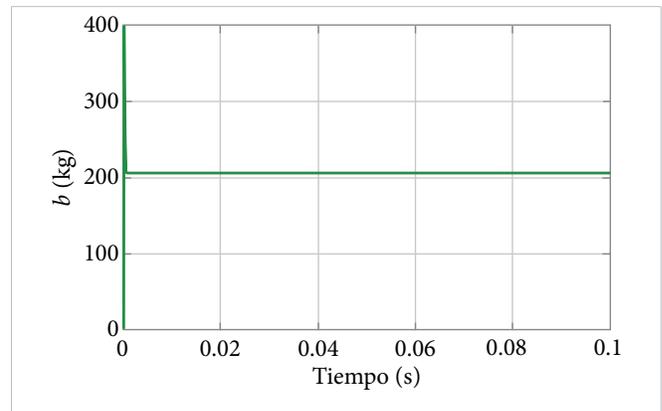


Figura 3. Identificación de la inercia  $b$  del inersor de la suspensión bajo excitación de tipo armónica.

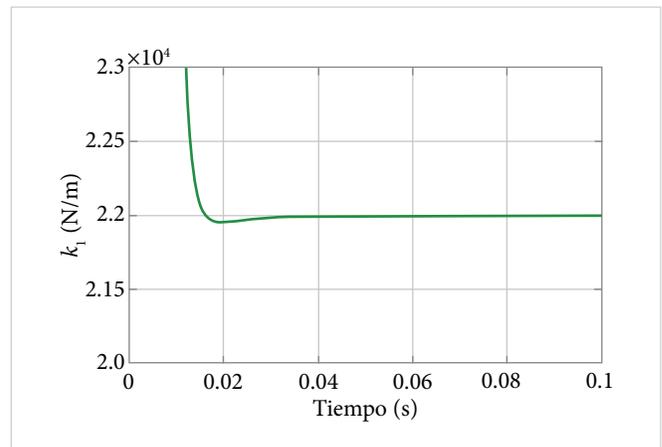


Figura 4. Identificación del coeficiente de rigidez del resorte  $k_1$  de la suspensión bajo excitación de tipo armónica.

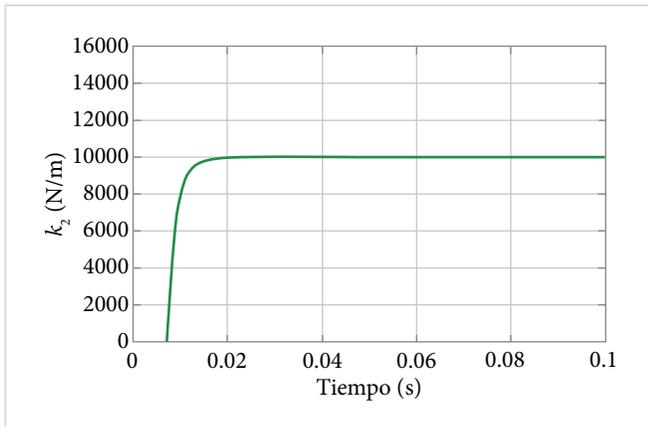


Figura 5. Identificación del coeficiente de rigidez del resorte  $k_2$  de la suspensión bajo excitación de tipo armónica.

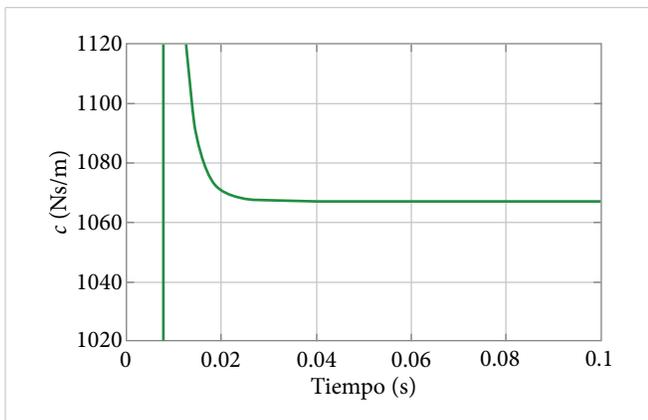


Figura 6. Identificación del coeficiente de amortiguamiento  $c$  de la suspensión bajo excitación de tipo armónica.

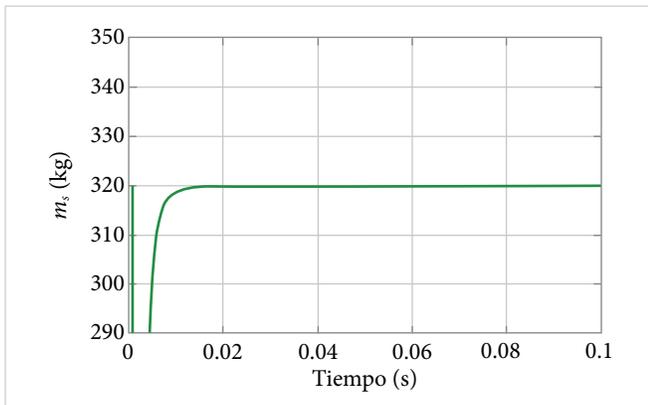


Figura 7. Identificación de la masa suspendida  $m_s$  de un cuarto de vehículo de la suspensión bajo excitación de tipo armónica.

En estas gráficas se observa el valor identificado para cada parámetro, permitiendo constatar la evolución y la convergencia de los valores estimados hacia los valores reales. Además, se puede distinguir posibles fluctuaciones y la estabilidad del proceso de identificación, lo cual

es importante para validar la robustez de la metodología empleada. Estas observaciones son necesarias para evaluar el rendimiento de los modelos de los identificadores y su aplicabilidad en casos reales, donde la precisión y la rapidez de identificación son importantes para el correcto funcionamiento del sistema.

Del análisis de las gráficas mostradas en las Figuras de la 3 a la 7 se muestra que los identificadores obtenidos convergen rápidamente a los parámetros físicos, en tiempos muy pequeños. Esta rápida convergencia indica la eficacia de la técnica de identificación y, con ello, se demuestra la capacidad de estimar los parámetros de la suspensión de un cuarto de automóvil sometida bajo una fuerza de excitación de tipo armónica.

#### SIMULACIÓN DE LOS IDENTIFICADORES DE LA SUSPENSIÓN SOMETIDA A UNA EXCITACIÓN DE TIPO ALEATORIA

En esta sección se reseñan pruebas de robustez de los estimadores desarrollados por medio de la técnica de identificación algebraica y para ello se le aplica una señal de entrada aleatoria a la suspensión, que simula un perfil irregular de carretera o camino. En la [Tabla 2](#) se muestran los niveles de rugosidad utilizados para generar las excitaciones estocásticas de la superficie de la carretera [23]. Estas evaluaciones son importantes, puesto que se puede observar la capacidad de los estimadores desarrollados para trabajar ante variaciones inesperadas y oscilaciones en las condiciones de entrada del modelo de la suspensión. De esta manera, es posible asegurar que los identificadores obtenidos funcionan ante situaciones de operación realista.

TABLA 2  
RUGOSIDAD DE LA CARRETERA NORMA ISO 8608 [22]

GRADO DEL PERFIL DE LA CARRETERA	$G_x(\eta_0)(10^{-6}) \text{ m}^3, \eta_0 = 0.1 \text{ [m}^{-1}\text{]}$ MEDIA GEOMÉTRICA
Clase A	16
Clase B	46
Clase C	256
Clase D	1024
Clase E	4096
Clase F	65536
Clase G	262144

Esta señal irregular de la carretera se genera a partir de una ecuación diferencial estocástica:

$$\dot{x}_0 = -2\pi f_0 x_0(t) + 2\pi\eta W(t)\sqrt{G_x(\eta_0)}V(t) \quad (16)$$

donde  $f_0 = 0.0628$  Hz es la frecuencia de corte,  $\eta = 0.1$  [m<sup>-1</sup>] refleja la frecuencia espacial,  $G_x(\eta_0)$  corresponde al coeficiente de rugosidad de la carretera,  $W(t)$  se trata de un proceso estocástico estacionario (ruido blanco gaussiano),  $V(t)$  es la velocidad de desplazamiento simulado y  $x_0$  es el perfil irregular de la superficie de la carretera [24], [25].

Los perfiles artificiales son generados a partir de la ecuación diferencial (16). Para la simulación se considera el perfil de clase C para la señal aleatoria. En la Figura 8 se muestra que los desplazamientos  $x_0$  varían aproximadamente entre un rango  $\pm 0.4$  m, lo que implica oscilaciones en la base del sistema. Este comportamiento es propio de un camino de rugosidad moderada, correspondiente a un perfil de clase C, que permite simular de manera más cercana el comportamiento del movimiento de un vehículo y obtener un desempeño de los identificadores en situaciones más realistas.

En la Figura 8 se observa la señal de clase C a una velocidad de 20 km/h.

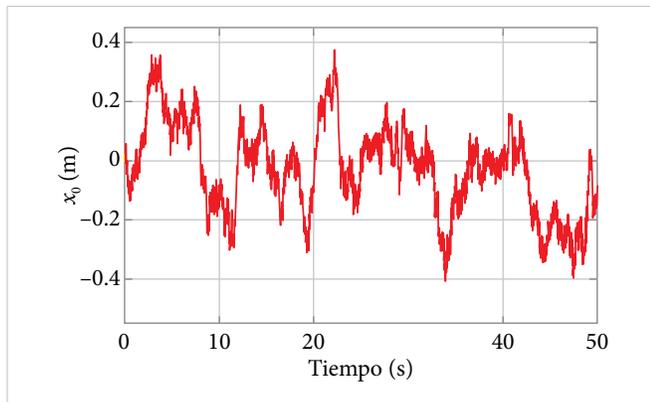


Figura 8. Perfil artificial de la carretera de clase C.

En las Figuras 9 a 13 se puede observar el comportamiento de los estimadores desarrollados ante una señal aleatoria.

Las líneas punteadas indican los valores reales de los parámetros, mientras que las líneas continuas muestran los resultados estimados que se desarrollaron. Los estimadores han demostrado una buena capacidad para mantener la precisión en poco tiempo a no más de 0.02 segundos.

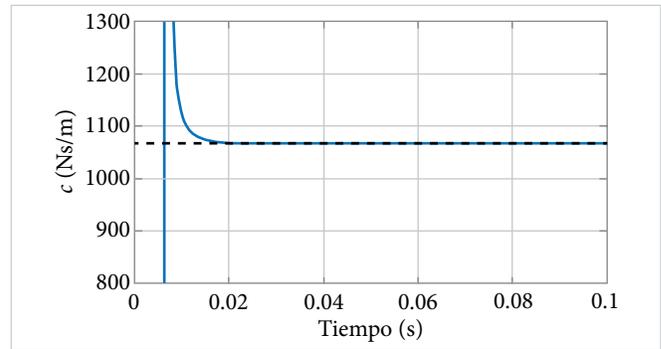


Figura 9. Respuesta del identificador del coeficiente de amortiguamiento  $c$  bajo excitación aleatoria.

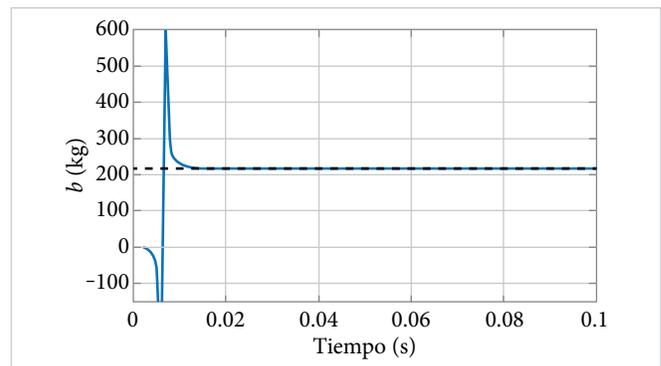


Figura 10. Respuesta del identificador de inercia  $b$  del inersor bajo excitación aleatoria.

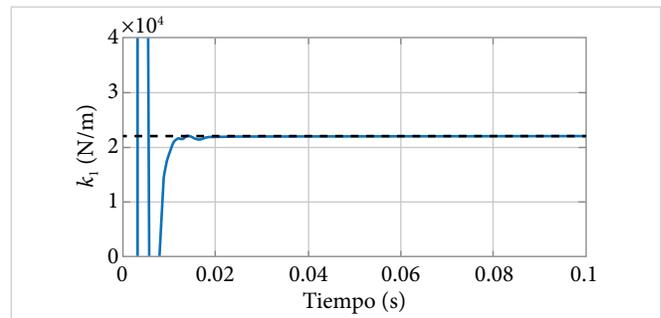


Figura 11. Respuesta del identificador del coeficiente de rigidez del resorte  $k_1$  bajo excitación aleatoria.

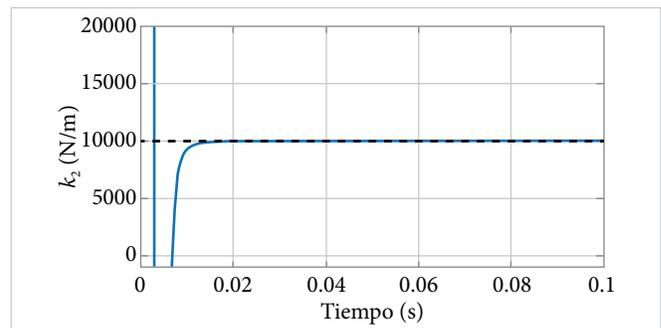


Figura 12. Respuesta del identificador del coeficiente de rigidez del resorte  $k_2$  bajo excitación aleatoria.

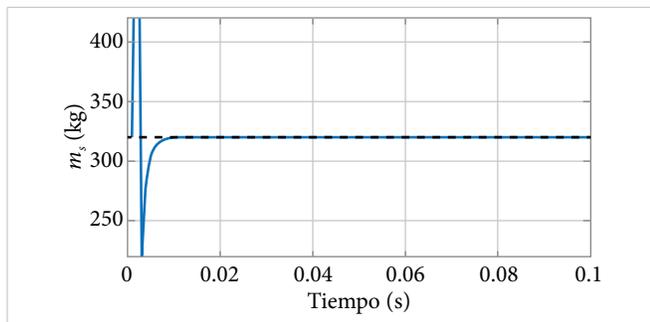


Figura 13. Respuesta del identificador de la masa suspendida  $m_s$  bajo excitación aleatoria.

En las Figuras 9 a 13 se puede observar el comportamiento de los estimadores desarrollados bajo excitación de tipo aleatoria. Las líneas punteadas indican los valores reales de los parámetros, mientras que las líneas continuas muestran los resultados estimados que se desarrollaron. Los estimadores han demostrado una buena capacidad para mantener la precisión en poco tiempo a no más de 0.02 segundos.

#### IV. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta el diseño de los identificadores de los parámetros físicos de una suspensión de un cuarto de automóvil, implementando una red mecánica TID. Para determinar los parámetros se empleó la técnica de identificación algebraica, utilizando el modelo matemático de la suspensión pasiva que se muestra en la Figura 1. Con lo anterior, se lograron obtener los parámetros físicos de la masa suspendida, inercia del inersor, coeficiente de rigidez de los resortes que integran a la configuración de la suspensión pasiva y el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador viscoso. Además, como los identificadores algebraicos solo dependen de la respuesta vibratoria del sistema, se implementaron dos fuentes de excitación diferentes: una armónica y otra aleatoria.

La implementación de la metodología de identificación algebraica demostró ser sencilla tanto en el modelado matemático como en la simulación, en comparación con otras técnicas de identificación reportadas en la literatura.

En las simulaciones realizadas, se observó que, al implementar la señal armónica, los estimadores convergen a los valores físicos en un tiempo menor de 0.02 segundos, con excepción del parámetro del amortiguador, ya que se identifica completamente en un tiempo de 0.3

segundos aproximadamente. En las gráficas, se observa como los estimadores se estabilizan alrededor de los valores reales, lo que es importante ya que refleja la estabilidad de los identificadores.

Por otro lado, en las pruebas realizadas con una señal de entrada aleatoria, utilizada para simular la dinámica de la carretera, los identificadores se obtuvieron completamente en un tiempo de 0.02 segundos. Es importante mencionar que, con base en los resultados obtenidos al aplicar una excitación de tipo aleatoria, los identificadores convergen a sus valores físicos reales. Por lo tanto, se corrobora su correcto funcionamiento y se demuestra que pueden adaptarse a cualquier condición del camino que se encuentre dentro de la norma ISO 8608.

Estos resultados confirman que los estimadores obtenidos mediante técnica de identificación algebraica presentan buenas características de robustez frente a dinámicas no modeladas, incertidumbre en los parámetros y la presencia de ruido. La estabilización de los estimadores hacia los valores físicos reales se logra en tiempos muy cortos, no superiores a 0.02 segundos, lo que sigue siendo más rápido en comparación con otras técnicas de identificación reportadas en la literatura. Esto no solo resalta la eficacia de esta metodología para su aplicación en situaciones reales, sino que también permite una sintonización correcta del sistema, contribuyendo al mantenimiento de un rendimiento óptimo de la suspensión pasiva de un vehículo.

#### REFERENCIAS

- [1] L. Cheung, W. O. Wong y L. Cheng, "Optimization of a hybrid vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation", *JSV*, vol. 332, n.º 3, pp. 494-509, 2013, doi: [10.1016/j.jsv.2012.09.014](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.014).
- [2] F. Scheibe y M. C Smith, "Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions", *Veh. Syst. Dyn.*, vol. 47, n.º 10, pp. 1229-1252, 2009, doi: [10.1080/00423110802588323](https://doi.org/10.1080/00423110802588323).
- [3] Y. Hu, M. Z. Q. Chen y Z. Shu, "Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements", *JSV*, vol. 333, n.º 8, pp. 2212-2225, 2014, doi: [10.1016/j.jsv.2013.12.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.016).
- [4] M. C. Smith, "Synthesis of mechanical networks: the inerter", en *IEEE Transactions on Automatic Control*,

- vol. 47, n.º 10, pp. 1648-1662, oct. 2002, doi: [10.1109/TAC.2002.803532](https://doi.org/10.1109/TAC.2002.803532).
- [5] M. Z. Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, F.-c. Wang y M. C. Smith, "The missing mechanical circuit element", en *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 9, n.º 1, pp. 10-26, First Quarter 2009, doi: [10.1109/MCAS.2008.931738](https://doi.org/10.1109/MCAS.2008.931738).
- [6] S. Evangelou, D. J. N. Limebeer, R. S. Sharp and M. C. Smith, "Steering compensation for high-performance motorcycles", *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No. 04CH37601)*, Nassau, Bahamas, 2004, pp. 749-754, vol. 1, doi: [10.1109/CDC.2004.1428746](https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1428746).
- [7] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [8] S. Sagara, Z. Y. Zhao, "Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems", *Automatica*, vol. 26, n.º 1, pp. 63-74, en., 1990, doi: [10.1016/0005-1098\(90\)90158-E](https://doi.org/10.1016/0005-1098(90)90158-E).
- [9] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, "An algebraic framework for linear identification", *ESAIM: COCV*, vol. 9, pp. 151-168, feb., 2003, doi: [10.1051/cocv:2003008](https://doi.org/10.1051/cocv:2003008).
- [10] L. A. Baltazar-Tadeo, J. Colín-Ocampo, A. Abúndez-Pliego, J. G. Mendoza-Larios, E. Martínez-Rayón, A. García-Villalobos, "Balancing of Asymmetric Rotor-Bearing Systems Using Modal Masses Array Calculated by Algebraic Identification of Modal Unbalance", *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 12, pp. 4765-4788, sept., 2023, doi: [10.1007/s42417-023-01151-9](https://doi.org/10.1007/s42417-023-01151-9).
- [11] J. G. Mendoza-Larios et al., "An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients", *Mathematics*, vol. 9, n.º 21, pp. 27-47, oct, 2021, doi: [10.3390/math9212747](https://doi.org/10.3390/math9212747).
- [12] L. A. Baltazar-Tadeo et al., "An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks", *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 11, n.º 2, pp. 619-645, jul., 2022, doi: [10.1007/s42417-022-00598-6](https://doi.org/10.1007/s42417-022-00598-6).
- [13] H. Sira-Ramirez y M. Fliess, "On discrete-time uncertain visual based control of planar manipulators: an online algebraic identification approach", *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*, Las Vegas, NV, EUA, 2002, pp. 4509-4514, vol. 4, doi: [10.1109/CDC.2002.1185084](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185084).
- [14] S. Fuchshumer, "Algebraic linear identification, modeling, and applications of flatness-based control", disertación doctoral, Johannes Kepler Universität Linz, Linz, 2005.
- [15] M. Fliess, S. Fuchshumer, K. Schlacher y H. Sira-Ramirez, "Discrete-time linear parametric identification: An algebraic approach", presentado en *2èmes Journées Identification et Modélisation Expérimentale-JIME'2006*, 2006.
- [16] E. Chávez, R. Castillo y J. M. Pablo, "Identificación algebraica en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil", Repositorio Nacional CONACYT, 2017.
- [17] D. Hernandez-Alcantara, R. Morales-Menendez, L. Amezcua-Brooks, O. Sename y L. Dugard, "Fault estimation methods for semi-active suspension systems", *2015 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, Ixtapa, México, 2015, pp. 1-5, doi: [10.1109/ROPEC.2015.7395138](https://doi.org/10.1109/ROPEC.2015.7395138).
- [18] J. Colín-Ocampo, J. G. Mendoza-Larios, A. Blanco-Ortega, A. Abúndez-Pliego, E. S. Gutiérrez-Wing, "Determinación del Desbalance en Sistemas Rotor-cojinete a velocidad constante: Método de Identificación Algebraica", *Ingenier. mecáni. tecnolog. desarroll.*, vol. 5, n.º 4, pp. 385-394, 2016.
- [19] J. G. Mendoza-Larios, J. Colín-Ocampo, A. Blanco-Ortega, A. Abúndez-Pliego, E. S. Gutiérrez-Wing, "Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico", *Rev. Iberoam. Autom. Inform. Ind.*, vol. 13, n.º 3, pp. 281-292, 2016, doi: [10.1016/j.riai.2016.03.004](https://doi.org/10.1016/j.riai.2016.03.004).
- [20] S. J. Landa-Damas et al., "A simplified Model for the On-Line Identification of Bearing Direct-Dynamic Parameters Based on Algebraic Identification (AI)", *Mathematics*, vol. 11, n.º 14 pp. 01-26, jul., 2023, doi: [10.3390/math11143131](https://doi.org/10.3390/math11143131).
- [21] E. Barredo, J. G. Mendoza, L. A. Baltazar, y S. J. Landa, "Identificación algebraica de los parámetros físicos de

un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad”, *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 21, n.º 1, pp. 4-12, feb. 2024, doi: [10.20983/culcyt.2024.1.2.1](https://doi.org/10.20983/culcyt.2024.1.2.1).

- [22] G. E. Zheng, W. Weirui, L. I. Guangping y R. Daogong. “Design, parameter optimisation, and performance analysis of active tuned inerter damper (TID) suspension for vehicle”, *JSV*, vol. 525, n.º 116750, 2022, doi: [10.1016/j.jsv.2022.116750](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116750).
- [23] F. A. E. Pirani, “Mathematical methods of classical mechanics (graduate texts in mathematics, 60)”, *Bulletin of The London Mathematical Society*, vol. 14, pp. 65-66, 1982.
- [24] B. Huang, C.-Y. Hsieh, F. Golnaraghi y M. Moallem, “Development and optimization of an energy-regenerative suspension system under stochastic road excitation”, *JSV*, vol. 357, pp. 16-34, nov. 2015.
- [25] E. Barredo. (2020). “Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica”, tesis de doctorado, TecNM/CENIDET, Cuernavaca, Morelos, México, 2020.