

Control pasivo de vibraciones para estructuras mecánicas amortiguadas bajo excitación armónica de aceleración en la base

Passive vibration control for damped mechanical structures under base acceleration harmonic excitation

José Gabriel Mendoza Larios¹✉, Eduardo Barredo Hernández¹, Irving Abdiel Maldonado Bravo², Cuauhtémoc Mazón-Valadez²

¹ Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM) | Huajuapán de León, Oaxaca, México

² Tecnológico Nacional de México | Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) | Cuernavaca, Morelos, México

RESUMEN

Este trabajo se preocupa con la solución del problema de optimización \mathcal{H}_∞ para estructuras mecánicas amortiguadas de un grado de libertad (SDOF) acopladas al Absorbedor Dinámico de Vibraciones (DVA) clásico, bajo el efecto de movimientos armónicos del suelo. Con el objetivo de obtener primeramente fórmulas simples de diseño, se toma en cuenta la función de respuesta en frecuencia (FRF) de la estructura primaria no amortiguada como la función objetivo a ser minimizada en las frecuencias invariantes de control cuadradas. Para abordar esto, se aplica la técnica de los puntos fijos (FPT) basada en el enfoque de Krenk, y luego se producen soluciones cuasi-óptimas. Inspirado en la metodología de Nishihara, se calculó la medida de rendimiento de control \mathcal{H}_∞ resolviendo numéricamente un conjunto de ecuaciones no lineales, y tomando en cuenta las soluciones de forma cerrada producidas por la FPT como puntos de inicio para las iteraciones. Se observó que los puntos de resonancia de la estructura primaria amortiguada disminuyen cuando aumenta el amortiguamiento estructural. Independientemente del amortiguamiento estructural agregado al sistema mecánico, la metodología de optimización utilizada proporciona un buen compromiso para reducir con precisión los puntos de resonancia de la FRF.

PALABRAS CLAVE: técnica de los puntos fijos; puntos fijos; criterio \mathcal{H}_∞ ; DVA; excitación de aceleración armónica en la base.

ABSTRACT

This work is concerned with the \mathcal{H}_∞ optimization problem's solution for single-degree-of-freedom (SDOF) damped mechanical structures coupled to the classic Dynamic Vibration Absorber (DVA) under the effect of harmonic ground motions, which provides an analytical and numerical design framework. In order to firstly obtain simple design formulas, the undamped primary structure's frequency response function (FRF) is taken into consideration as the objective function to be minimized at its square control invariant frequencies. To address this, the fixed-points technique (FPT) based on Krenk's approach is applied, and then short quasi-optimal solutions are yielded. Inspired by the Nishihara' methodology, the \mathcal{H}_∞ control performance measure was computed by numerically solving a set of non-linear equations and taking into account the closed-form solutions rendered by the FPT as starting points for iterations. It was observed that the damped primary structure's resonant points decreases when the structural damping increases. No matter the structural damping added to mechanical system, the used optimization methodology provides a good compromise to accurately reducing the FRF's resonant points.

KEYWORDS: fixed-points technique; fixed-points; \mathcal{H}_∞ criteria; DVA; base acceleration harmonic excitation.

Correspondencia:

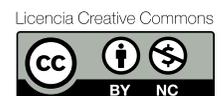
DESTINATARIO: José Gabriel Mendoza Larios.

INSTITUCIÓN: Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

DIRECCIÓN: Carretera a Acatlima km 2.5, C. P. 69000, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

CORREO ELECTRÓNICO: jgml@mixteco.utm.mx

Fecha de recepción: 25 de abril de 2023. **Fecha de aceptación:** 16 de octubre de 2023. **Fecha de publicación:** 31 de octubre de 2023.



I. INTRODUCCIÓN

Existen diferentes fuentes de excitación que causan una actividad vibratoria en máquinas y estructuras, la cual, en condiciones de bajo o nulo amortiguamiento, puede alcanzar niveles críticos que pueden comprometer la integridad estructural de los sistemas mecánicos. Por esta razón, se han implementado diferentes dispositivos y/o estrategias para controlar la vibración de los sistemas mecánicos y llevarlos a un estado de operación seguro. Dentro de los dispositivos implementados se encuentra el absorbedor dinámico de vibración (DVA, por sus siglas en inglés).

El DVA, es un dispositivo mecánico que tiene la capacidad de generar un equilibrio dinámico de fuerzas cuando se acopla a una máquina o estructura mecánica (llamada estructura primaria), lo que produce una disminución en su amplitud de vibración. Es por esta razón que el DVA se ha utilizado para el control de vibraciones en edificios, puentes, tuberías y cables [1], entre otras aplicaciones.

El primer DVA sin amortiguamiento estaba constituido por una masa y un resorte [2]. Este dispositivo tiene la capacidad de eliminar completamente la vibración de la estructura primaria cuando esta opera a su frecuencia natural. Sin embargo, el rango de frecuencias de excitación que puede filtrar es muy reducido [3]. Posteriormente, a este DVA se le añadió un amortiguador. Para el diseño óptimo de este nuevo dispositivo, se desarrollaron soluciones analíticas utilizando la teoría de los puntos fijos (FPT, por sus siglas en inglés) [4]. La adición del amortiguamiento al DVA provocó un incremento del ancho de banda de frecuencias de operación que puede filtrar el dispositivo.

Después, fue desarrollada una teoría de ajuste de frecuencias con la finalidad de calcular el factor de amortiguamiento óptimo que aplanara la función de respuesta en frecuencia (FRE, por sus siglas en inglés) de la estructura primaria, en el rango de frecuencias en las que puede operar el DVA [5]. Por otra parte, se planteó soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA al minimizar los índices de rendimiento H_∞ y H_2 , considerando a la estructura primaria como amortiguada y no amortiguada [6], [7], [8]. Adicionalmente, se propuso la solución analítica del diseño óptimo del DVA al considerar como fuente de excitación una masa desbalanceada [9].

En este trabajo, se estudió la mitigación de forma pasiva de las vibraciones de una estructura mecánica, generadas por una excitación de aceleración armónica en la base, mediante la puesta en funcionamiento de un DVA.

Como resultado de la implementación de la FPT y la teoría de Krenk, fue posible desarrollar ecuaciones de forma cerrada simplificadas para el cálculo de los parámetros de diseño del DVA optimizados. También, mediante la utilización del método de Nishihara y en conjunto con el teorema de Vieta, se logró la optimización del índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ , a partir del cual se extrajeron los parámetros de diseño óptimos del DVA de forma numérica, considerando a la estructura primaria como amortiguada y no amortiguada.

II. METODOLOGÍA

El desarrollo de esta investigación comenzó con la revisión del estado del arte sobre los absorbedores dinámicos de vibración. Posteriormente, se definió el problema de estudio, el cual consiste en el control pasivo de la vibración de una estructura con y sin amortiguamiento de un grado de libertad mediante la implementación de un DVA, al considerar como fuente de excitación un movimiento de aceleración armónica en la base de la estructura. Después, se obtuvo la FRF de la estructura mecánica con el absorbedor y se calcularon los parámetros optimizados para el diseño del DVA, mediante la aplicación de la FPT y la norma \mathcal{H}_∞ . Por último, se presentan y discuten los resultados obtenidos y las conclusiones de la investigación.

A continuación, se proporciona la metodología utilizada para la obtención del modelo matemático y la función de respuesta en frecuencia de la estructura mecánica con el DVA bajo excitación de aceleración armónica en la base.

MODELADO MATEMÁTICO

El sistema que se analiza en esta investigación se muestra en la Figura 1, el cual está compuesto por una estructura primaria de un grado de libertad y una estructura secundaria correspondiente al absorbedor dinámico de vibración. El DVA se compone por una masa y una combinación en paralelo de resorte y amortiguador viscoso, que se conectan entre las masas de las estructuras: primaria y secundaria. Además, se considera que la es-

estructura primaria se excita mediante aceleración armónica en su base.

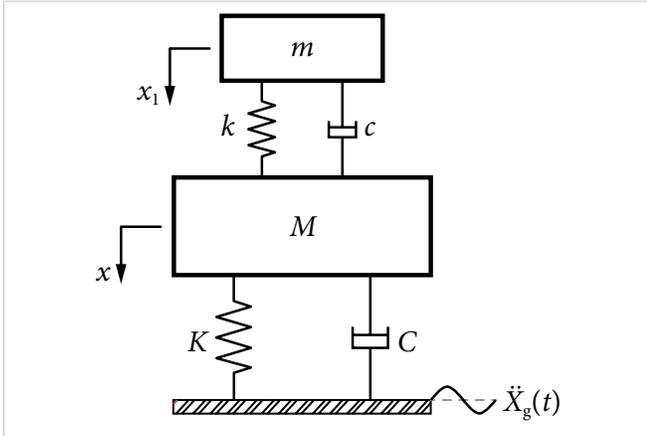


Figura 1. Sistema con DVA bajo excitación de aceleración armónica en la base.

Mediante la implementación del formulismo Euler-Lagrange para sistemas no conservativos es fácil obtener el modelo matemático del sistema que se muestra en la Figura 1, el cual se puede expresar como sigue:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C+c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Ma_g \\ -ma_g \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde los parámetros de la estructura primaria M , C y K representan su masa, su amortiguamiento y su rigidez, respectivamente; m , c y k constituyen la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema secundario, que es el absorbedor de vibraciones, y $\ddot{X}_g(t)$ es la excitación de aceleración en la base, la cual se define a partir de $\ddot{X}_g(t) = a_g e^{i\omega t}$. Por otro lado, a_g representa la amplitud de la excitación de aceleración armónica en la base, y ω es la frecuencia de la excitación en el sistema.

Después de la transformación de Fourier, la FRF adimensional del sistema dinámico especificado a partir de la Ecuación (1) y considerando $C \cong 0$, se define como sigue:

$$|H(\mu, q, \zeta_2, \Omega)| = \frac{X\omega^2}{a_g} = \left[\frac{A(\mu, q, \Omega) + B(q, \zeta_2, \Omega)}{C(\mu, q, \Omega) + D(\mu, q, \zeta_2, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

con

$$A = [(\mu + 1)q^2 - \Omega^2]^2$$

$$B = [2q\zeta_2\Omega(\mu + 1)]^2$$

$$C = \{[1 + (\mu + 1)q^2]\Omega^2 - q^2 - \Omega^4\}^2$$

$$D = [2q\zeta_2\Omega(\mu + 1)\Omega^2 - 1]^2$$

donde μ , q , ζ_2 y Ω son parámetros adimensionales y representan, respectivamente, la relación de masas, la relación de frecuencias naturales no amortiguadas, el factor de amortiguamiento y la relación de frecuencia forzada. Adicionalmente, los parámetros anteriores se definen a partir de $\mu = \frac{m}{M}$, $q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\zeta_1 = \frac{C}{2M\omega_1}$, $\zeta_2 = \frac{c}{2m\omega_2}$, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ y $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Además, estos parámetros adimensionales se pueden desarrollar y/o corroborar a partir de un análisis dimensional mediante el teorema Π de Buckingham [10] y, también, el diseño óptimo del DVA con excitación en la base quedará especificado a partir de los valores de estos parámetros.

A continuación, se implementó la FPT teniendo en mente el desarrollo de expresiones analíticas simplificadas para el cálculo de los parámetros óptimos del sistema de la Figura 1, dado el caso de excitación de aceleración en la base de tipo armónica.

APLICACIÓN DE LA FPT

Esta técnica consiste en la sintonización de los parámetros físicos del sistema mediante un proceso de calibración de frecuencias que da origen a los denominados puntos fijos o puntos invariantes. Además, estos puntos fijos son independientes del amortiguamiento del sistema. A partir de esta observación, se produce la siguiente condición de optimalidad:

$$\lim_{\zeta_2 \rightarrow 0} |H(\mu, q, \zeta_2, \Omega)| = \lim_{\zeta_2 \rightarrow \infty} |H(\mu, q, \zeta_2, \Omega)| \quad (3)$$

Si además de las condiciones de optimalidad dadas por la Ecuación (3) se considera la expresión $(\lim_{\zeta_2 \rightarrow \infty} |H(\mu, q, \zeta_2, \Omega)|)^2$, la aplicación de la técnica de los puntos fijos conduce a un sistema ecuaciones bicuadráticas para el caso de excitación estudiado, cuyas soluciones son dos raíces reales que representan las frecuencias invariantes del dispositivo DVA, y se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\Omega^2 + a(\mu, q)\Omega + b(\mu, q) = 0$$

$$\Omega^2 + \tilde{a}(\mu, q, |H|)\Omega + \tilde{b}(\mu, q, |H|) = 0 \quad (4)$$

con

$$a(\mu, q) = -\frac{2(\mu + 1)^2 q^2 + \mu + 2}{(\mu + 2)}$$

$$b(\mu, q) = q^2$$

$$\tilde{a}(\mu, q, |H|) = -\frac{2}{(\mu + 1)}$$

$$\tilde{b}(\mu, q, |H|) = \frac{|H|^2 - (\mu + 1)^2}{|H|^2 (\mu + 1)^2}$$

Por lo tanto, la aplicación de la técnica de los puntos fijos es equivalente a resolver de forma analítica un conjunto de ecuaciones no lineales. Estas ecuaciones se pueden obtener a partir de la aplicación del teorema de Vieta al sistema de Ecuaciones (4), para el tipo de excitación considerada. Por lo tanto, para los polinomios mónicos representados en el sistema de Ecuaciones (4), la suma y producto de sus raíces reales, pueden especificarse como sigue:

$$\sum_{i=1}^2 \Omega_{i \zeta \rightarrow 0}^2 = \sum_{i=1}^2 \Omega_{i \zeta \rightarrow \infty}^2 \quad (5)$$

$$\prod_{i=1}^2 \Omega_{i \zeta \rightarrow 0}^2 = \prod_{i=1}^2 \Omega_{i \zeta \rightarrow \infty}^2 \quad (6)$$

Al seguir un procedimiento similar al presentado en [11] para la solución del conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales Ecuaciones (5) y (6), se obtuvieron los parámetros óptimos de diseño del DVA para el caso de excitación de aceleración en la base de tipo armónica. Los parámetros de diseño óptimos son:

$$q_{\text{opt}}(\mu) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2(2-\mu)}}{(\mu+1)} \quad (7)$$

$$|H(\mu)| = \frac{\sqrt{2}(\mu+1)}{\sqrt{\mu}} \quad (8)$$

La Ecuación (7) representa el parámetro óptimo de ajuste de frecuencias. Un absorbedor de vibración que cumpla con esta relación puede ser llamado correctamente absorbedor de vibración sintonizado. Por otra parte, la Ecuación (8) representa la magnitud calibrada de la estructura primaria correspondientes a los puntos fijos para la excitación de aceleración armónica en la base.

La Figura 2 contiene la gráfica de la FRF de la estructura principal correspondiente al sistema de la Figura 1. Esta

gráfica se realizó al considerar distintos valores del factor de amortiguamiento. En la figura se especifican dos puntos identificados como P_1 y P_2 , los cuales se conocen como puntos fijos o puntos invariantes, cuya independencia del amortiguamiento es su principal característica. Por otro lado, para cada punto invariante existe una frecuencia invariante correspondiente.

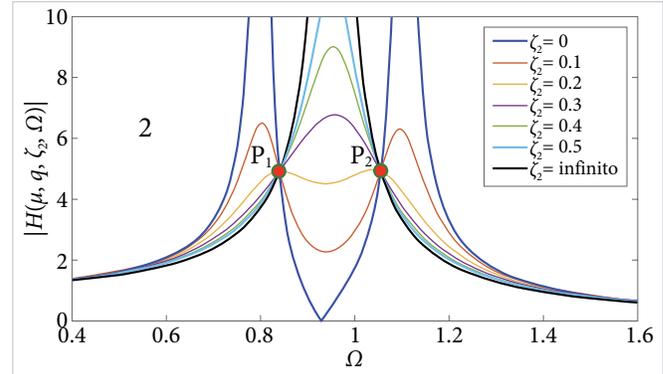


Figura 2. Gráfica de la función de respuesta en frecuencia de la estructura mecánica al considerar diversos valores del factor de amortiguamiento ζ_2 . Las gráficas se realizaron al considerar los parámetros $\mu = 0.1$ y $q_{\text{opt}} = 0.8861$.

Del análisis de la Figura 2 se puede concluir que, debe haber un valor del factor de amortiguamiento ζ_2 que aplane las FRF de la estructura primaria, en todo el rango de frecuencias entre los puntos fijos. De hecho, este factor de amortiguamiento es $\zeta_{2\text{opt}}$ y se puede calcular utilizando la teoría de ajuste de frecuencias de Krenk [5]. Por lo tanto, el factor de amortiguamiento óptimo para el caso de excitación de aceleración en la base, se expresa como sigue:

$$\zeta_{2\text{opt}}(\mu) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\mu(\mu-8)}{(\mu+1)(\mu-2)}} \quad (9)$$

La aplicación de la técnica de los puntos fijos produce como resultado una serie de ecuaciones simples de forma cerrada. Estas ecuaciones servirán para el diseño óptimo del DVA, para el control de la vibración generada por excitación de aceleración armónica en la base. Adicionalmente, en la siguiente subsección se calcula el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ para el diseño óptimo del DVA, considerando a la estructura primaria como amortiguada y no amortiguada.

ÍNDICE DE RENDIMIENTO \mathcal{H}_∞

El índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ , se enfoca en minimizar las amplitudes máximas de la vibración que se generan en

la estructura primaria, en las frecuencias de resonancia. Es común encontrar en la literatura que al índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ se le identifique como la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$ [12]. La minimización de esta norma produce la formulación de un problema de optimización no lineal en varias variables con restricciones de igualdad, tal como se expresa a continuación:

$$\begin{cases} \min_{P_{\text{opt}}} (\max(|H(\Omega)|)) = \max(|H(P_{\text{opt}}, \mu, \Omega)|) \\ \text{sujeto a} \\ \frac{\partial |H(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \\ P_{\text{opt}}(q, \zeta_1, \zeta_2) \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde $P_{\text{opt}}(q, \zeta_1, \zeta_2)$ es una función que contiene los parámetros de diseño del DVA que deben optimizarse. Con el objetivo de alcanzar una alta precisión en la solución del problema de optimización de la Ecuación (10), se implementó el método de Nishihara [13], que consiste en minimizar la FRF $|H(\Omega)|$ de la estructura principal mediante la función $h = 1/\sqrt{1-r^2}$. Por tanto, minimizar la variable r ocasiona la minimización de la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$. Por consiguiente, después de sustituir la magnitud $|H(\Omega)|$ por $h = 1/\sqrt{1-r^2}$ en la Ecuación (2), se generó una expresión matemática que asegura que las máximas amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia para el caso de excitación de aceleración armónica en la base sean iguales. Tal expresión se define como sigue:

$$\Omega^4 + c_1\Omega^3 + c_2\Omega^2 + c_3\Omega + c_4 = 0 \quad (11)$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= 2q^2(\mu + 1)[2(\mu + 1)\zeta_2^2 - 1] + 4\zeta_1(2\mu q\zeta_2 + \zeta_1) - 2 \\ c_2 &= q^2\{[q^2(\mu + 1)^2 + 2(\mu + 2)] - 8(\mu + 1 - 2\zeta_1^2)\zeta_2^2 \\ &\quad - 8\zeta_1^2\} + r^2 \\ c_3 &= 2q^2\{2[1 - (\mu + 1)^2(1 - r^2)]\zeta_2^2 + (\mu + 1)(1 - r^2 - q^2) \\ &\quad + 2q^2\zeta_1^2 - 1\} \\ c_4 &= q^4[1 - (\mu + 1)^2(1 - r^2)] \end{aligned}$$

Posteriormente, al utilizar el teorema de Vieta, la suma y el producto de las raíces reales de la Ecuación (11) genera un conjunto no lineal de ecuaciones simultáneas en función de los coeficientes $c_i(\mu, q, \zeta_1, \zeta_2, r)$ para $i = 1, \dots, 4$. Este conjunto de ecuaciones está en términos de los parámetros de diseño del DVA y de la variable r . Por tanto, para conseguir una solución óptima a la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$, es necesario agregar una ecuación de restric-

ción. Tal ecuación se produce al usar la matriz jacobiana de la variación r con respecto a las variables de diseño del absorbedor $J_r(q, \zeta_2) = \frac{\partial f_i(q, \zeta_2)}{\partial (q, \zeta_2)}$. En consecuencia, el criterio de optimalidad se satisface para el determinante de 2×2 de la matriz jacobiana igualado a cero. De esta manera, la optimización del índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ , utilizando el método de Nishihara, se obtiene mediante la solución del sistema no lineal representado por el sistema de Ecuaciones (12):

$$\begin{aligned} f_1(\mu, q, \zeta_1, \zeta_2, r) &= c_1\sqrt{c_4} - c_3 \\ f_2(\mu, q, \zeta_1, \zeta_2, r) &= \frac{1}{4}c_1^2 + 2\sqrt{c_4} - c_2 \\ f_3(\mu, q, \zeta_1, \zeta_2, r) &= \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(q, \zeta_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$\forall (\mu) \in \mathbb{R}^+$

Este conjunto de ecuaciones no lineales se puede resolver fácilmente de forma numérica haciendo uso del método de Newton-Raphson y tomando como datos de entrada las magnitudes de los valores de los parámetros óptimos que se obtuvieron a partir de la FPT. En la siguiente sección se presentan los resultados que se obtuvieron de la implementación de las dos técnicas de optimización: la FPT y el índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ , para la determinación de los parámetros de diseño óptimo del DVA.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Derivado de la aplicación de la FPT, se obtuvieron ecuaciones simplificadas de forma cerrada para el diseño óptimo del DVA para el control de vibración derivada de la excitación de aceleración armónica en la base. Estas ecuaciones favorecen el diseño del dispositivo DVA debido a su simpleza, ya que únicamente están en función del parámetro de la relación de masas μ .

Por otro lado, la Figura 3 contiene las gráficas de la función de respuesta en frecuencia óptima de la estructura primaria que se muestra en la Figura 1, considerando diferentes valores del parámetro de la relación de masas μ y considerando los parámetros óptimos q_{opt} y $\zeta_{2\text{opt}}$.

De la Figura 3 se puede apreciar que la magnitud optimizada de la FRF decrece con el incremento del valor de la relación de masas μ . También, es evidente cómo se aplanan las FRF en el rango de frecuencias de operación del DVA entre las frecuencias invariantes.

Adicionalmente, el incremento de la relación de masas μ tiene el efecto de incremento del ancho de banda de supresión de vibración del dispositivo.

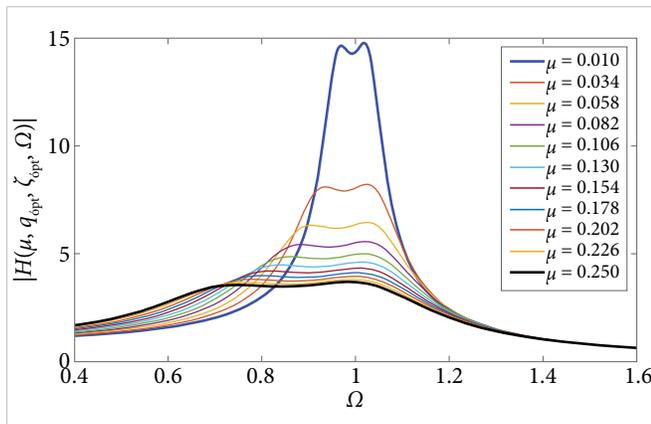


Figura 3. Gráficas de las FRF óptimas de la estructura primaria considerando diferentes valores del parámetro de la relación de masas μ .

Por su parte, los resultados numéricos de los valores de los parámetros óptimos para el diseño del DVA se proporcionan en la [Tabla 1](#). Estos valores se calcularon a partir del criterio \mathcal{H}_∞ considerando la estructura principal no amortiguada, para diferentes valores del parámetro de la relación de masas μ , considerando el intervalo $1\% \leq \mu \leq 25\%$ [14], [15].

TABLA 1
PARÁMETROS ÓPTIMOS DE DISEÑO DEL DVA, CRITERIO \mathcal{H}_∞
(ESTRUCTURA PRINCIPAL NO AMORTIGUADA)

μ	q_{opt}	$\zeta_{2\text{opt}}$	r_{min}	NORMA $\ H(\Omega)\ _\infty$
0.01	0.98762	0.06106	0.99755	14.28579
0.02	0.97548	0.08612	0.99519	10.20318
0.03	0.96356	0.10519	0.99291	8.41384
0.04	0.95187	0.12114	0.99072	7.35849
0.05	0.94039	0.13508	0.98861	6.64594
0.06	0.92912	0.14760	0.98658	6.12561
0.07	0.91806	0.15903	0.98463	5.72560
0.08	0.90719	0.16960	0.98275	5.40669
0.09	0.89652	0.17946	0.98093	5.14547
0.10	0.88604	0.18873	0.97919	4.92695
0.20	0.79043	0.26153	0.96487	3.80632
0.25	0.74811	0.28998	0.95948	3.54894

En la [Figura 4](#) se presenta una comparación de forma gráfica de las FRF de la estructura primaria, generadas a partir de los resultados que se obtuvieron de la técnica de los puntos fijos y criterio \mathcal{H}_∞ , al considerar un valor de $\mu = 0.1$.

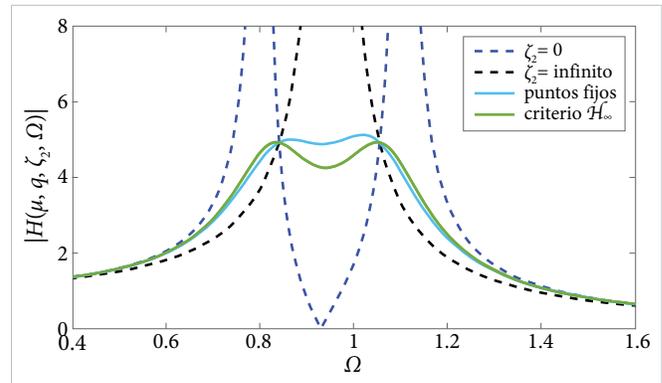


Figura 4. Comparación gráfica de las curvas FRF óptimas del sistema primario con DVA, obtenidas mediante la FPT y el criterio \mathcal{H}_∞ .

Los resultados presentados en la [Figura 4](#) muestran que, la FPT y el criterio \mathcal{H}_∞ , proporcionan resultados semejantes. Asimismo, aunque aparentemente la técnica de los puntos fijos proporciona un camino menos complicado para obtener el diseño óptimo del DVA, el criterio \mathcal{H}_∞ constituye una metodología robusta y precisa para el cálculo de los valores de diseño óptimo del DVA [16].

Asimismo, la [Tabla 2](#) contiene los resultados del índice de rendimiento \mathcal{H}_∞ , considerando la estructura primaria amortiguada para el cálculo de los parámetros de diseño óptimo del DVA. Estos resultados demuestran que el amortiguamiento de la estructura primaria tiene un efecto de reducción de la relación de frecuencias naturales q_{opt} y la amplitud optimizada norma $\|H(\Omega)\|_\infty$. Sin embargo, el amortiguamiento óptimo $\zeta_{2\text{opt}}$ se ve ligeramente incrementado. Estos resultados se pueden observar gráficamente en la [Figura 5](#), considerando una relación de masas μ de 0.1.

TABLA 2
PARÁMETROS ÓPTIMOS DE DISEÑO DEL DVA, CRITERIO \mathcal{H}_∞
(ESTRUCTURA PRINCIPAL AMORTIGUADA)

μ	q_{opt}	ζ_1	$\zeta_{2\text{opt}}$	r_{min}	NORMA $\ H(\Omega)\ _\infty$
0.1	0.85159	0.05	0.19855	0.95976	3.56093
	0.81131	0.10	0.20892	0.93323	2.78344
	0.76526	0.15	0.22038	0.89949	2.28863
0.15	0.79692	0.05	0.23958	0.95039	3.21488
	0.75203	0.10	0.25161	0.92306	2.59969
	0.70153	0.15	0.26537	0.88932	2.18681
0.20	0.74771	0.05	0.27362	0.94317	3.00920
	0.69960	0.10	0.28737	0.91574	2.48891
	0.64597	0.15	0.30358	0.88259	2.12703
0.25	0.70288	0.05	0.30336	0.93753	2.87428
	0.65239	0.10	0.31896	0.91039	2.41693
	0.59640	0.15	0.33788	0.87814	2.09030

En la Figura 5 se puede corroborar de manera gráfica que el incremento en la magnitud del amortiguamiento de la estructura primaria, tiene el efecto de reducción en su amplitud de vibración optimizada.

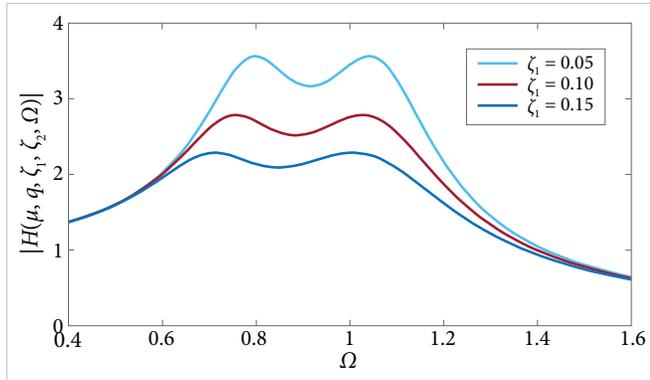


Figura 5. Comparación gráfica de las curvas FRF óptimas del sistema primario con DVA calculados a partir de la norma $\|H(\Omega)\|_\infty$, para diferentes valores de amortiguamiento de la estructura primaria.

IV. CONCLUSIONES

En esta investigación se propuso la solución del problema de control pasivo de vibraciones de una estructura mecánica de un grado de libertad, cuya excitación es un movimiento de aceleración armónica en la base. Para el control de la vibración, se consideró un absorbedor dinámico de vibración tradicional (DVA) conectado a la estructura primaria.

Con la finalidad de minimizar las máximas amplitudes de vibración de la estructura primaria, se implementaron dos esquemas diferentes para el diseño óptimo del DVA: FPT y el criterio \mathcal{H}_∞ . Derivado de la técnica de los puntos fijos y de la teoría de Krenk, se obtuvieron ecuaciones algebraicas simples para $q_{\text{opt}}(\mu)$ y $\zeta_{2\text{opt}}(\mu)$. Estas ecuaciones simplificadas son necesarias para el diseño óptimo del DVA, y fueron válidas para la relación de masas μ dentro el intervalo $1\% \leq \mu \leq 25\%$. Cabe mencionar que tales ecuaciones funcionan para valores superiores al valor máximo del intervalo anteriormente mencionado, sin embargo, utilizar valores de relación de masas $\mu > 25\%$ ya no es práctico debido a que se tendría que agregar una masa física del absorbedor demasiado grande en comparación con el sistema primario.

Por su parte, de la implementación del criterio \mathcal{H}_∞ utilizando el método de Nishihara se logró la minimización de las amplitudes máximas de vibración de la estructura primaria, mediante el cálculo numérico de

los parámetros óptimos de diseño del DVA. La norma $\|H(\Omega)\|_\infty$ se calculó para dos condiciones de operación de la estructura primaria: amortiguada y no amortiguada.

Con los resultados que se muestran en la Figura 4 se demuestra que los parámetros de diseño óptimos, calculados mediante el criterio \mathcal{H}_∞ para la estructura primaria no amortiguada, son similares a los calculados a partir de la técnica de los puntos fijos. Por otro lado, del cálculo del criterio \mathcal{H}_∞ para el diseño óptimo del DVA considerando a la estructura primaria con amortiguamiento, se concluye que el amortiguamiento de la estructura primaria tiene el efecto de reducción de su amplitud de vibración optimizada. Es decir, para una relación de masas μ especificada, el incremento en la magnitud del amortiguamiento de la estructura primaria ζ_1 , produce una reducción en su amplitud optimizada, tal como se muestra en la Figura 5.

REFERENCIAS

- [1] H. Benaroya, M. Nagurka y S. Han, *Mechanical Vibration Theory and Application*, 5.ª ed. EUA: Rutgers University Press, 2022.
- [2] H. Frahm, "Device for Damping Vibrations of Bodies", Patente US989958A, abr. 18, 1911.
- [3] A. A. Shabana, *Theory of Vibration. An Introduction*, 3.ª ed. EUA: Springer International Publishing AG, 2019.
- [4] J. Ormondroyd y J. P. Den Hartog, "The Theory of the Dynamic Vibration Absorber", *ASME Trans.*, vol. 50, no. 9, pp. 9-22, 1928.
- [5] S. Krenk, "Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper", *J. Appl. Mech.*, vol. 72, no. 6, pp. 936-942, may., 2005, doi: 10.1115/1.2062867.
- [6] T. Asami, O. Nishihara y A. M. Baz, "Analytical Solutions to H_∞ and H_2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems", *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 2, pp. 284-295, 2002, doi: 10.1115/1.1456458.
- [7] O. Nishihara y T. Asami, "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum

- Amplitude Magnification Factors)”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 4, pp. 576-582, oct. 2002, doi: [10.1115/1.1500335](https://doi.org/10.1115/1.1500335).
- [8] T. Asami y O. Nishihara, “Closed-form exact solution to H_∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems)”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 125, no. 3, pp. 398-405, jul. 2003, doi: [10.1115/1.1569514](https://doi.org/10.1115/1.1569514).
- [9] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani, “A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 137, no. 3, 034501, jun. 1, 2015, doi: [10.1115/1.4029576](https://doi.org/10.1115/1.4029576).
- [10] F. M. White y H. Xue, *Fluid Mechanics*, 9.^a ed. EUA: McGraw Hill, 2020.
- [11] J. G. Mendoza-Larios, E. Barredo-Hernández e I. A. Maldonado-Bravo, “Absorbedor dinámico de vibración no tradicional para controlar fuerza inercial”, *Cult. Científ. y Tecnol.*, vol. 19, no. 2, pp. 4-11, jun. 2022, doi: [10.20983/culcyt.2022.2.2.1](https://doi.org/10.20983/culcyt.2022.2.2.1).
- [12] Y. Hu y M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 99, pp. 297-307, ag. 2015, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003).
- [13] T. Asami, Y. Mizukawa y T. Ise, “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function”, *J. Vib. Acoust.*, vol. 140, no. 6, 061012, dic. 2018, doi: [10.1115/1.4040229](https://doi.org/10.1115/1.4040229).
- [14] D. J. Inman, *Engineering Vibration*, 5.^a ed. EUA: Pearson, 2022.
- [15] E. Barredo, J. G. Mendoza-Larios, J. Mayén, A. A. Flores-Hernández, J. Colín, y M. Arias-Montiel, “Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration”, *Eng. Struct.*, vol. 195, pp. 469-489, may. 2019, doi: [10.1016/j.engstruct.2019.05.105](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.105).
- [16] E. Barredo, Zhipeng Zhao, C. Mazón-Valadez, J. G. Mendoza-Larios, I. A. Maldonado, “A grounded inerter-based oscillating TMD for suppressing harmonic and random vibrations”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 254, pp. 1-32, may. 2023, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2023.108438](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108438).

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente por la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).