

# PROBLEMAS DE APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL DE LÍNEA EN EL CONTEXTO DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

Dr. Sergio Flores García<sup>1</sup> y M.C. Maria Dolores González Quezada<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (seflores@uacj.mx). <sup>2</sup> Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez (mariagon@nmsu.edu)

## Resumen

De acuerdo a investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la integral de línea en los cursos introductorios de matemáticas y física en universidades de México y de Estados Unidos, la mayoría de los estudiantes presentan dificultades de entendimiento de este concepto, sobre todo cuando este carece de contexto. Muchos de estos estudiantes no alcanzan un entendimiento significativo que les permita utilizar la integral de línea en para resolver problemas de contexto físico. Esta investigación muestra evidencia de los problemas de entendimiento conceptual que la mayoría de los alumnos presentan cuando pretenden entender el concepto de integral de línea en el contexto de la diferencia de potencial de campos eléctricos. Los resultados muestran que a pesar del énfasis conceptual en la instrucción, la mayoría de los estudiantes continúan presentando dificultades de entendimiento conceptual fundamental para aprender diversos tópicos de teoría electromagnética. Algunos estudiantes no entienden la integral de línea como una suma de productos punto. Además, algunos de ellos tienen severas dificultades para contestar preguntas conceptuales en las cuales se demanda un proceso intelectual en varias etapas.

## I. Introducción.

En México, la investigación en matemática y física educativa se ha orientado hacia el desarrollo curricular, análisis epistemológico, observación clínica, investigación sobre nuevos métodos de enseñanza y uso de tecnología y observación en el aula (Hitt).

En la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ) se han creado líneas de investigación fructíferas para la obtención de tesis de grado y nuevas propuestas didácticas en diferentes contextos como son la geometría, el cálculo diferencial e integral, cálculo vectorial y otras áreas del conocimiento como la física y la electrónica. La presente investigación se desarrolla en el contexto de la teoría electromagnética, haciendo uso de los sistemas colaborativos de aprendizaje y apoyada por el uso de nueva tecnología que permite la interacción y visualización del objeto matemático conocido como *integral de línea*.

## II. Investigación y propuesta didáctica relacionada.

S. Kanim en colaboración con otros autores, desarrolla investigación cuyo principal

objetivo es conocer las dificultades que estudiantes del nivel superior presentan en el uso de vectores en el contexto de electricidad y magnetismo. Estos investigadores han detectado una variedad de serias dificultades que los estudiantes muestran en los aspectos gráfico y algebraico del concepto de vectores. La conclusión en base a sus resultados es que se necesita una instrucción adicional para desarrollar un aprendizaje significativo. Kanim señala que “el primer paso necesario hacia nuestra meta de mejorar el desempeño de nuestros estudiantes en problemas tipo, es mejorar nuestro entendimiento de las dificultades conceptuales de los estudiantes y desarrollar currículo para mejorar el entendimiento de los conceptos básicos”. Kanim ha encontrado que se requieren ideas matemáticas adicionales para resolver muchos problemas de electrostática, incluyendo trigonometría, resolución de vectores y reconocimiento de simetrías.

Sergio Terrazas diseñó un sitio en Internet denominado *Matemáticas en movimiento*. En éste, Terrazas elaboró un tipo de cuadernos de trabajo que contienen temas de cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo vectorial. Dentro de la sección correspondiente a cálculo vectorial, se encuentra el tema Integral de

línea, el cual abordó con definiciones de una curva alisada en el espacio  $xy$ , dividió la curva en sub-arcos de longitud  $\Delta s_k$  y llamó  $\Delta x_k$  y  $\Delta y_k$  a las proyecciones sobre los ejes  $x$  y  $y$  y respectivamente, y aprovechando la capacidad

del programa *Mathemática* aumentó progresivamente el número de sub-arcos a 4, 16, 64, 256, hasta llegar a 1024. Dos gráficas correspondientes a dos de estas particiones se muestran en la figura 1.

Shigeru Tsuyuky ha desarrollado una serie de aplicaciones Java con animación interactiva para estudiantes de secundaria y preparatoria. Tsuyuky argumenta que las figuras y los diagramas son una poderosa ayuda para entender el significado de los objetos matemáticos y que la animación habilita a los estudiantes y maestros de matemáticas para que creen sus propias imágenes en sus mentes. Si los estudiantes tienen éxito al internalizar las imágenes de los conceptos, adquirirían la habilidad de operar en sus mentes y serán capaces de predecir los resultados. Los estudiantes necesitan tocar, operar, manipular y jugar con los objetos, lo que hace necesario que se agregue interactividad a la animación. En la figura 2 se encuentra la aplicación referente al producto punto en la que interpreta el producto punto como un área.

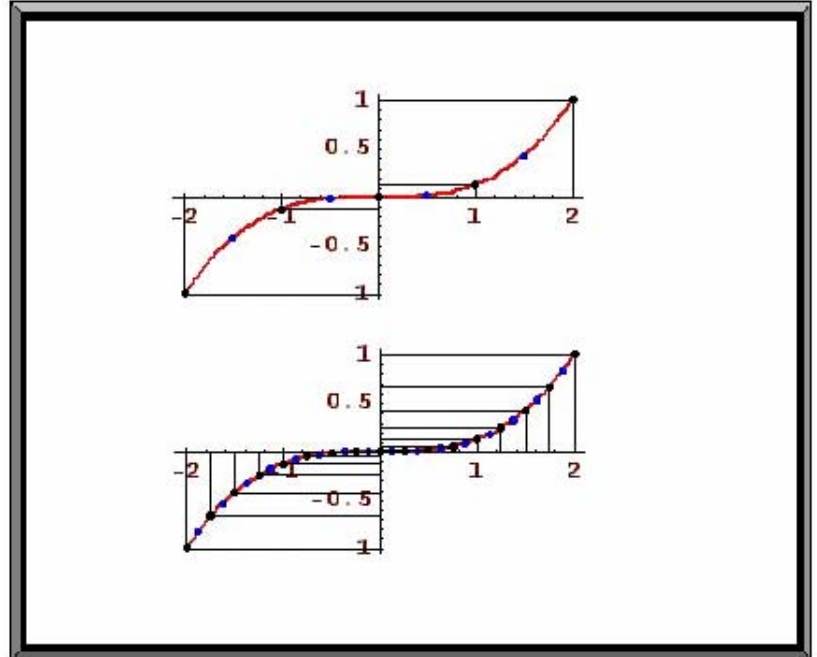


Figura 1. Una curva, dividida en 8 y 64 sub-arcos

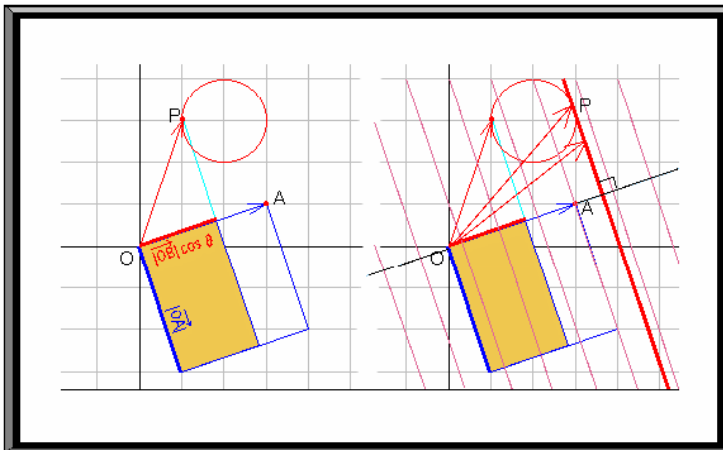


Figura 2a. Interpretación del producto punto como área.

### III. Contexto de investigación (Descripción de la población)

Esta investigación se llevó a cabo con alumnos del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez de la carrera de mecatrónica adscritos a la materia de electricidad y magnetismo.

El reto consiste en trabajar con alumnos cuyo historial epistemológico es del corte tradicional, intentar un cambio en la instrucción,

observar los efectos que éste produce en la forma en que ellos acceden al concepto de integral de línea, como suma de productos punto en el contexto de potencial eléctrico y observar si después de esta instrucción son capaces de aplicarlo en otros contextos.

### IV. Motivación y justificación.

Con el objetivo de diagnosticar el nivel de entendimiento de este problema, se aplicaron dos exámenes, el primero de ellos se aplicó en marzo del 2004 a 36 estudiantes del curso de

Física III del área de ingeniería, en el que se formularon preguntas acerca del *trabajo* desarrollado por una fuerza, el concepto de *producto punto* en forma gráfica y analítica, y el concepto de *trabajo* como una *integral de línea*.

El segundo examen se diseñó en base a los resultados obtenidos en el primero y se aplicó en octubre del 2004 a 55 estudiantes del curso de electricidad y magnetismo pertenecientes a la carrera de mecatrónica, ambos grupos

pertenecientes a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, siendo los contenidos de estos cursos (Física III y Electricidad y Magnetismo) los mismos.

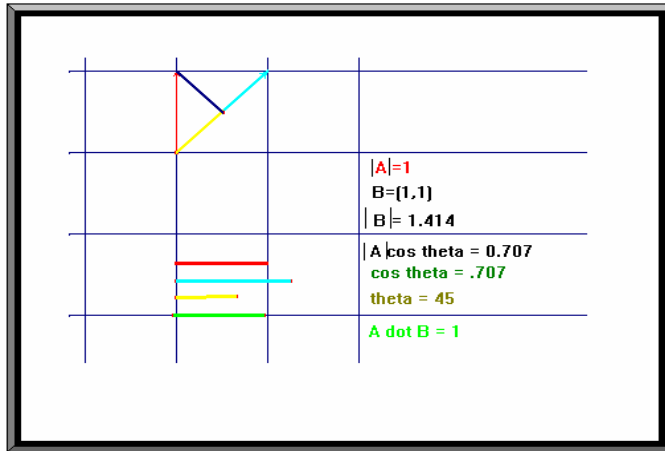


Figura 2b. Interpretación geométrica del producto punto utilizando una línea recta

El objetivo del segundo examen de diagnóstico fue investigar los conocimientos del alumno acerca de proyecciones y trabajo para utilizarlos como base para el desarrollo de los conceptos de producto punto e integral de línea.

Al solicitar al alumno que dibujara la proyección perpendicular de un vector sobre una línea punteada, casi la mitad del grupo centró su atención en la palabra perpendicular, dibujando una línea perpendicular en diversas partes de la gráfica. En la figura 3 se pueden observar dos ejemplos de estas respuestas

Figura 3.- Dos estudiantes trazan una recta perpendicular como respuesta a la pregunta 1

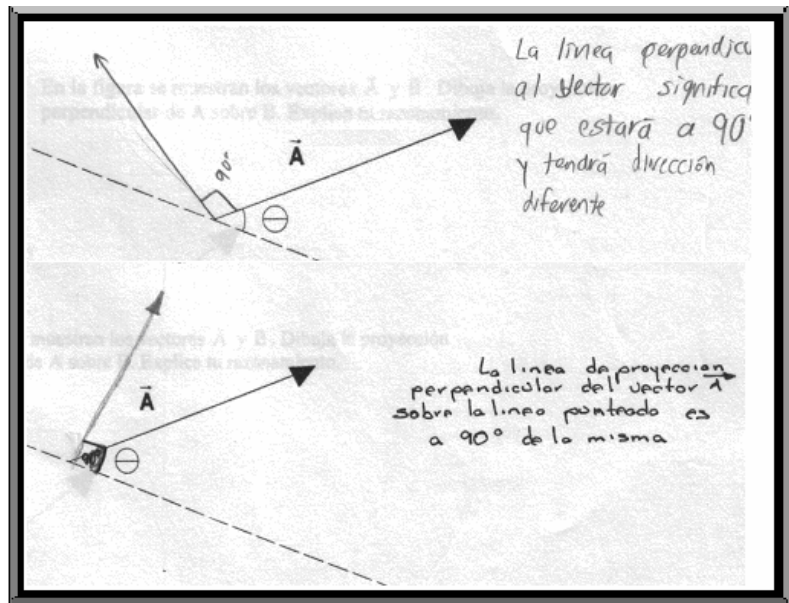
Con el objeto de determinar la comprensión del concepto de trabajo, el cual sirve de fundamento para el concepto de producto punto, se elaboraron las últimas tres preguntas del examen de diagnóstico. La pregunta 7 se puede observar en la figura 4, en la que el alumno debe determinar, en base a sus conocimientos previos, si el trabajo desarrollado por la gravedad es *positivo*, *negativo* o *cero*. Lo último para que sea capaz, al utilizar la relación entre el concepto de trabajo y producto punto, de identificar la dirección en la que se desarrolla el trabajo y enseguida aplicarlo en otro contexto, por ejemplo, la magnitud y signo del trabajo que efectúa un campo eléctrico cuando una partícula se desplaza de un punto a otro. En esta ocasión, la diversidad de los razonamientos proporcionó una excelente oportunidad de conocer lo que los alumnos creen que es el trabajo y para saber si su razonamiento fue correcto o erróneo. Los datos mostraron que más del 60% contestó acertadamente que el trabajo es positivo en estas condiciones. Algunos de sus razonamientos son los siguientes:

“Positivo, porque ejercerá una fuerza”

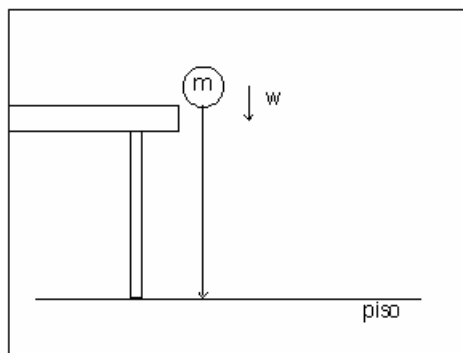
“Porque la partícula va cayendo en la misma dirección que la gravedad”

“Porque la fuerza y la distancia tienen la misma dirección”

“La gravedad es positiva en caída libre”



7.- Un objeto de masa  $m$  se deja caer desde una altura  $h$ . El trabajo que desarrolla el peso es:



- a) positivo
- b) negativo
- c) cero

\* Explica tu razonamiento

El resto del grupo contestó que el trabajo es negativo, argumentando lo siguiente:

“Al dejarlo caer su aceleración aumenta por tanto es negativa”

“Porque cuando el objeto esta cayendo va en dirección negativa por lo tanto es negativa”

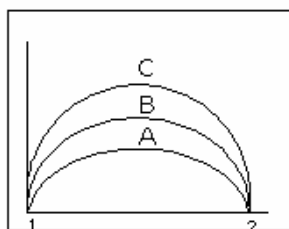
“Porque la gravedad es negativa y va cayendo, si fuera subiendo seria positiva”

Figura 4. Pregunta 7 del examen de diagnóstico

Estas justificaciones muestran que la mayoría de estos estudiantes no tienen un entendimiento formal de la razón por la que el trabajo que desarrolla el peso de un objeto cuando cae, es positivo. Únicamente uno de ellos utiliza la relación entre la dirección del movimiento y la dirección de peso del objeto, sin embargo, muestra un entendimiento erróneo de lo que es la distancia con respecto al desplazamiento.

La pregunta 9 está de nuevo relacionada con el trabajo, en esta ocasión, la finalidad es identificar si el alumno tiene noción del concepto de independencia de la trayectoria a través de campos conservativos, para lo que se dibujan 3 trayectorias diferentes, A, B y C que inician en el punto 1 y terminan en el punto 2, como se ilustra en la figura 5. La respuesta correcta es que en las tres trayectorias se desarrolla el mismo trabajo. Los datos mostraron que menos de la cuarta parte del grupo contestó correctamente. Sin embargo, más de la mitad respondió que el trabajo realizado en la trayectoria A es menor que en la trayectoria B y esta a su vez, menor que en C.

9.- Ordena de mayor a menor el trabajo desarrollado por el peso en toda la trayectoria:



- a)  $A > B > C$
- b)  $A < B < C$
- c)  $A = B = C$
- d) No existe suficiente información

\*Explica brevemente tu trabajo.

Figura 5. Pregunta 9 del examen de diagnóstico

Algunos argumentos que utilizaron son los siguientes:

“Se necesita mayor ángulo para lanzar a C por lo tanto con mayor ángulo para una misma distancia se necesita mayor trabajo (para un mismo peso)”

“La distancia de las tres trayectorias es la misma pero la trayectoria C tiene una mayor altura que B y C. Por tanto

*para lograr esa altura tuvo que ser lanzada con mayor fuerza”.*

*“El trabajo es mayor si se lleva a mayor distancia”*

El panorama general que nos presentan los resultados de este diagnóstico es que los estudiantes no tienen claros los conceptos de proyección, producto punto e integral de línea, o definitivamente presentan un desconocimiento total de los temas, no obstante que la mayoría de ellos cursaron las materias Física I, Matemáticas I y Matemáticas II, cuyos programas incluyen estos temas. En cuanto al concepto de trabajo, se observa un mayor dominio del tema, aunque los razonamientos que presentan son confusos y algunas veces hasta contradictorios.

Estos resultados proporcionan una buena justificación para el inicio de una investigación. ¿Será posible determinar completamente las dimensiones epistemológicas y cognitiva que nos permitan conocer a profundidad las implicaciones de tipo instruccional del aprendizaje de la integral de línea?

## V. Planteamiento del problema

Las conclusiones a partir de los resultados obtenidos en los exámenes de diagnóstico establecen que la mayoría de estos estudiantes no poseen los conocimientos previos necesarios como son los conceptos de proyección, producto punto y trabajo. Existen *malos entendimientos* o desconocimiento total acerca de la integral de línea, por lo que es necesario determinar:

*¿Qué implicaciones de tipo cognitivo e instruccional producen el uso del producto punto e integral de línea para el aprendizaje del concepto de diferencia de potencial en el contexto de la teoría electromagnética bajo una propuesta didáctica fundamentada en las teorías del constructivismo, la enseñanza problémica y las técnicas del aprendizaje colaborativo?*

Los objetivos que permiten desarrollar la presente investigación son:

1.- Implementación de una modificación en la instrucción para el desarrollo conceptual de integral de línea como herramienta para el entendimiento del concepto de diferencia de potencial.

2.- Uso y manejo de la integral de línea como el límite de una suma de productos punto entre el vector campo eléctrico y el vector desplazamiento.

3.- Detectar, caracterizar y analizar las dificultades de orden cognitivo de los estudiantes durante el aprendizaje de la integral de línea y el producto punto.

## VI. Método de investigación

Después de aplicar los exámenes de diagnóstico y analizarlos para detectar el tipo y el grado del problema al que nos enfrentamos, se procedió a la elaboración de tres tutoriales (cuadernos de trabajo). Los dos primeros, titulados *Proyecciones* el primero y *Producto punto* el segundo, con el objetivo de proveer al estudiante de los conocimientos previos, que, como pudimos observar durante el análisis de los exámenes de diagnóstico, no poseen o son insuficientes. Y el tercero, *Integral de línea*, en el que se conjuntan los conceptos de los tutoriales previos y se intenta arribar al concepto de integral de línea, utilizando la suma de productos punto y ubicándolos en el contexto de potencial eléctrico.

Los tutoriales, llamados así por su estructura, consisten en guiar al estudiante, por medio de preguntas, a que elaboren conclusiones en base a conocimientos previos y a las observaciones que pueden hacer al utilizar los trabajos que en el programa Cabrí se realizaron con este fin. Al elaborar estos trabajos se trata de apoyar a la práctica tradicional de enseñanza, permitiendo al alumno interactuar con el programa, hacer conjeturas y comprobarlas o descartarlas en su caso. Con base en esto, podemos sugerir que el uso de Cabrí permite la visualización de los objetos, dando una representación geométrica a los conceptos matemáticos; permite también cambiar parámetros y observar los efectos que estos cambios ejercen sobre otros parámetros.

Una de las finalidades al utilizar Cabrí es observar el efecto que tiene el uso de nueva tecnología en el aprendizaje de estos conceptos en particular, ya que según Collete Laborde “el uso coordinado de diversas herramientas contribuye a la construcción de relaciones entre piezas independientes de conocimiento y puede construir una base para una estructuración coherente”. Esta herramienta también proporciona un acercamiento lúdico que atrae al estudiante hacia el contenido, así como observar

si se obtiene una mejor motivación y respuesta al tener acceso a un tipo diferente de instrucción.

Es necesario obtener una medida de la efectividad de las actividades desarrolladas, y para este efecto, se diseñaron tres preguntas mediante las que se intenta conocer el nivel de entendimiento del concepto de integral de línea, requiriendo la aplicación de esta herramienta en la resolución de problemas relacionados con potencial eléctrico.

## VII. Análisis y discusión de resultados.

La experiencia en el campo de investigación de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos físicos en contexto, sugiere un análisis y discusión de los resultados recolectados durante el proceso de implementación de la metodología propuesta. Este tipo de análisis nos puede conducir a un conocimiento más profundo y serio de la problemática del aprendizaje de la integral de línea en el contexto de la teoría electromagnética.

### Tutorial 1. Proyecciones

Las observaciones de la mayoría del grupo concernientes a la pregunta 1 del Tutorial 1, en la que pueden cambiar la dirección y la magnitud del vector  $\vec{A}$  en el archivo *proyecciones*, estuvieron relacionadas con la relación entre el ángulo y la proyección, algunos de ellos mencionaron que la magnitud de la proyección es cero cuando el ángulo es de  $90^\circ$ . Algunos alumnos indicaron las condiciones necesarias para que la proyección sea *positiva*,

*negativa* o *cero*. También notaron la formación de un triángulo rectángulo.

Al preguntar: ¿Qué pasa si el vector  $\vec{A}$  es menor que el vector  $\vec{B}$ ? cuando se muestra la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$ , un porcentaje mayor al 50% respondió en forma acertada que la proyección no depende de la magnitud del vector  $\vec{A}$  y además que ésta es mayor que el vector  $\vec{A}$ . Una parte del grupo (25%) mencionó la magnitud de la perpendicular, dando indicios de la persistencia de la creencia que la línea perpendicular es la proyección que mostraron en los exámenes de diagnóstico.

### Tutorial 2: Producto punto

Las primeras cuatro instrucciones de la parte I que constituyeron indicaciones referentes al uso de éste para medir el vector  $\vec{A}$  y el ángulo entre los dos vectores localizados en el archivo *pry 3* en Cabrí y el cálculo de la magnitud de la proyección fueron efectuadas con facilidad. Los valores calculados se “arrastraron” de la herramienta calculadora del programa hacia la pantalla, con el fin de observar su comportamiento al mover el punto 1. El objetivo planteado fue que identificara la relación existente entre el ángulo y los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , para lo cual se preguntó:

- ¿Cuándo los valores son *positivos*, *negativos* o *cero*?

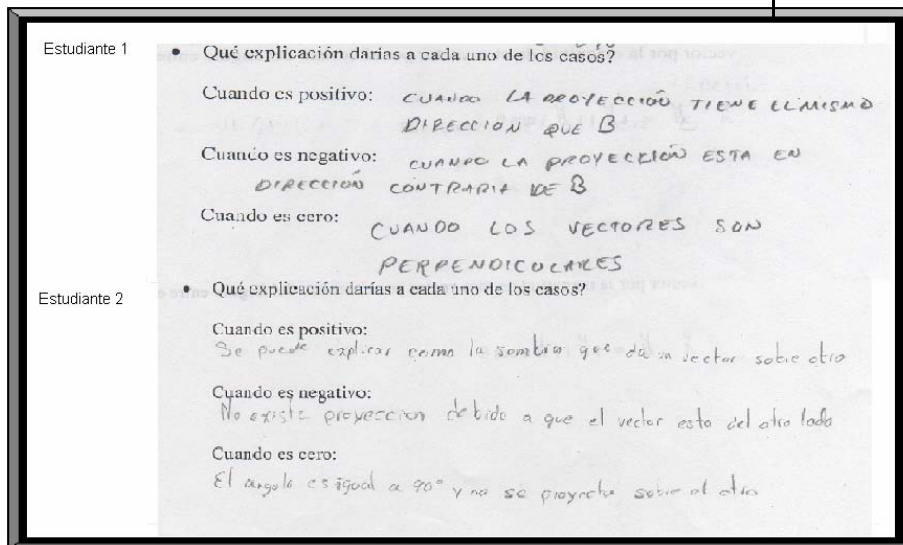


Figura 6. Dos estudiantes tratan de explicar porqué es la proyección positiva, negativa o cero

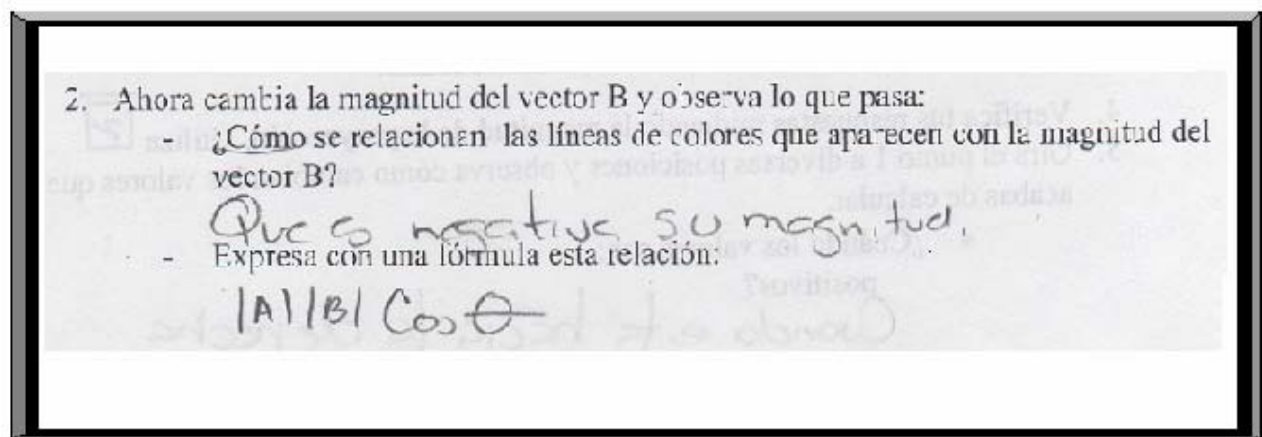
En esta ocasión, el 100% del grupo contestó acertadamente. Al cuestionar sobre la razón en cada uno de los casos, se pretendía que el alumno indicara los valores de la función coseno en cada uno de ellos. Esta respuesta se obtuvo de la tercera parte del grupo, otra tercera repitió su respuesta a la pregunta anterior y la tercera parte restante dio diversas explicaciones concernientes a la proyección. Algunas de estas respuestas se muestran en la Figura 6.

El primer estudiante relacionó la proyección con la dirección del vector  $\vec{B}$ , lo cual es correcto aunque no sea lo que se esperaba. Parece que esta respuesta es producto de estos mismos tutoriales, en los que frecuentemente estamos utilizando proyecciones. El estudiante 2 también proporciona respuestas inesperadas, como la analogía entre sombra y proyección, que es usada frecuentemente.

En la parte II, el estudiante puede cambiar la magnitud del vector  $\vec{A}$ , haciendo uso de las herramientas propias del Cabri, las cuales se explican en el tutorial. También puede cambiar la magnitud del vector  $\vec{B}$ , moviendo un punto rojo que se encuentra sobre una línea a la derecha de los dos vectores. La pretensión en este caso es que, aprovechando la visualización que el programa Cabri permite, el estudiante vea la relación entre la magnitud del vector  $\vec{B}$  y el número de proyecciones que aparecen enseguida al ir pasando el punto por los números 1, 2 y 3. Al inicio, aparece la proyección, que hasta el momento hemos estado trabajando, al pasar por

el número 2, que significa que ahora el vector  $\vec{B}$  mide 2 unidades, aparece otro segmento de la misma magnitud enseguida de la proyección. Cuando el punto pasa por el número 3, el vector  $\vec{B}$  mide tres unidades y otra línea se agrega a las dos anteriores. Al pedir al alumno que observe lo que pasa cuando cambia la magnitud del vector  $\vec{A}$ , se desea que observe que cambia la magnitud de la proyección en el número. De esta segunda parte del tutorial no se obtiene respuesta, ya que no se pide en forma explícita. Al pedirle en la pregunta 2 que cambie la magnitud del vector  $\vec{B}$ , haciendo pasar el punto por los números dos y tres, se le cuestiona sobre la relación entre las líneas de colores y la magnitud del vector  $\vec{B}$ , y que escriba la fórmula que represente esta relación. Se obtuvo un 75% de respuestas correctas en cuanto a la fórmula, aunque en más del 50% de éstas, no expresa en forma correcta dicha relación. Una de estas respuestas se observa en la figura 7.

Figura 7. Un estudiante escribe la expresión correcta para el producto punto, pero la relación que expresa es incorrecta.



En esa ocasión se hizo latente la dificultad que tienen los estudiantes cuando intentan el cambio de una representación verbal a una escrita, descrita por Cohen y Kanim. En la figura 8 se presentan dos ejemplos.

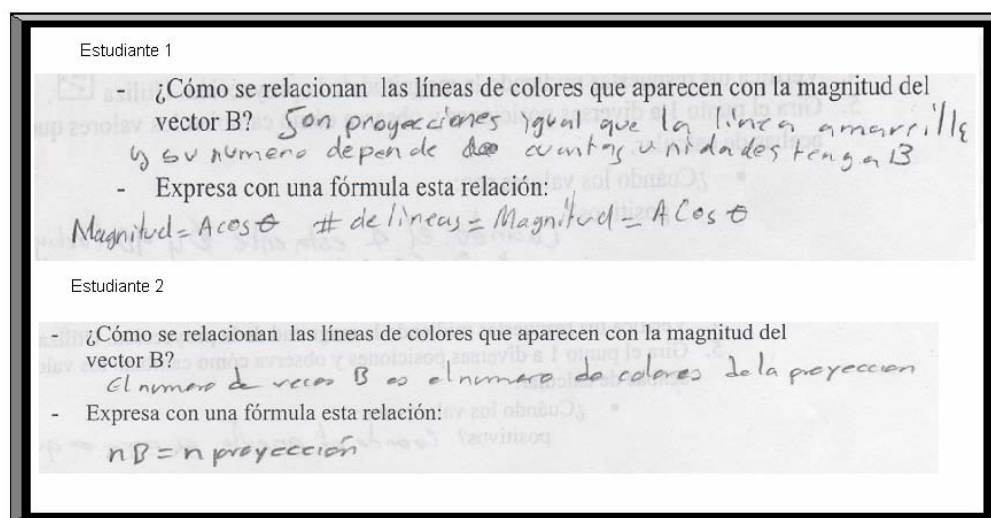


Figura 8. Respuestas de dos estudiantes en las que se manifiestan dificultades para expresar en forma escrita sus observaciones.

### Tutorial 3: Integral de línea

Hasta este instante, parece ser que los alumnos ya están más relacionados con las instrucciones propias del Cabri y también con el estilo de trabajo de los tutoriales. Este tutorial demanda más trabajo que los anteriores, ya que tienen que efectuar bastantes mediciones y cálculos, y llenar las tablas correspondientes. En las secciones I y II, se presentan los programas *A trayectoria 1-6* y *B trayectoria 1-6 proy* en Cabri, en los cuales se encuentran representados una carga puntual, y una trayectoria en donde viaja una partícula del punto A al punto B dividida en 6 segmentos  $\Delta \vec{l}$ . El segundo de ellos muestra las proyecciones de los vectores campo sobre cada uno de los vectores desplazamiento  $\Delta \vec{l}$ .

Los resultados obtenidos al sumar los datos en ambas tablas conducen al mismo resultado, siendo el objetivo que lleguen a la conclusión:

$$E(\Delta l)(\cos \theta) = (\text{Magnitud de la proy.})(\Delta l)$$

En las secciones III, IV y V de este tutorial se incrementa el número de segmentos a 9 y 12 segmentos. Los programas correspondientes en Cabri son *C trayectoria 1-9*, *D trayectoria 1-proy* y *E trayectoria 1-12*. En el programa *trayectoria 1-24*, la trayectoria se encuentra dividida en 24 segmentos y se presentan los cálculos efectuados allí mismo, como otro punto de comparación.

### Evaluación

Casi la tercera parte del grupo utilizó la suma de productos punto para obtener la diferencia de potencial requerido por la pregunta 1, aunque algunos multiplicaron el resultado obtenido por 5, ya que se sugirió utilizaran 5 segmentos. Otra tercera parte eligió el uso de la integración directa, ya que la trayectoria es recta y la magnitud del campo es constante, ésta es una buena opción. Menos de la décima parte optó por calcular el potencial en ambos puntos y luego restar, mientras que, casi la cuarta parte del grupo tomó los datos proporcionados, los acomodó en una u otra forma para efectuar operaciones con éstos. Los tres primeros procedimientos se consideran acertados, aunque se presentaron errores en la manipulación numérica. Varios alumnos dibujaron los vectores campo eléctrico  $\vec{E}$  en cada uno de los segmentos, formando un ángulo de  $90^\circ$  con la trayectoria.

En la figura 9 se encuentran, del lado izquierdo, la imagen utilizada, en donde los vectores campo son radiales, puesto que son generados por una carga puntual Q. Y en el lado derecho, el trabajo efectuado por un alumno con el error mencionado.

El 13% de las respuestas correctas fueron acompañadas por un razonamiento incorrecto, tomando la longitud de las trayectorias como la causa para que la diferencia de potencial de ambas trayectorias fuera la misma. Un estudiante dice:

Figura 9. Comparación entre la figura en el programa A trayectoria 1 en Cabri y el trabajo que realizó un estudiante

“La diferencia de potencial en el punto A y el B es igual,

ya que la curva de ambas tienen la misma longitud”

El resto del grupo respondió que la diferencia de potencial de una trayectoria es mayor o menor que la otra, en ambos casos, los alumnos compararon las longitudes de estas trayectorias. Este tipo de error se presenta continuamente, parece que confunden los términos desplazamiento y distancia, tomándolos como equivalentes. En figura 10, un estudiante dibuja las líneas de campo eléctrico en una dirección parecida a la que se presentó en los tutoriales, aunque en su razonamiento expone que el campo es uniforme hacia la derecha y trata de utilizar la herramienta recién adquirida, la suma de productos punto.

La variedad de respuestas a la pregunta 3 es amplia. Casi las tres cuartas partes del grupo dieron una respuesta relacionada con la longitud de los segmentos que se mostraron, prevaleciendo el error de interpretación en que incurrieron al responder a la pregunta 2. Cerca del 5% argumentó correctamente que las trayectorias están ubicadas en una línea equipotencial. Ni un solo estudiante utilizó como razonamiento la independencia de la trayectoria y sólo 10% utilizó la suma de productos punto o integral de línea como herramienta para resolver este problema.

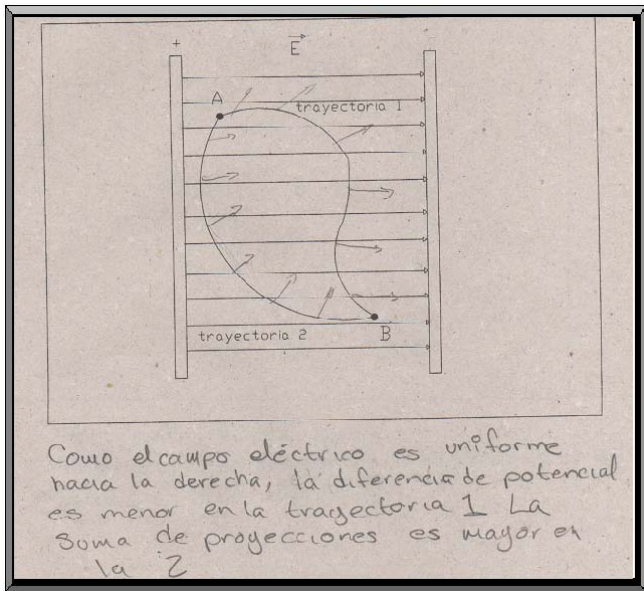
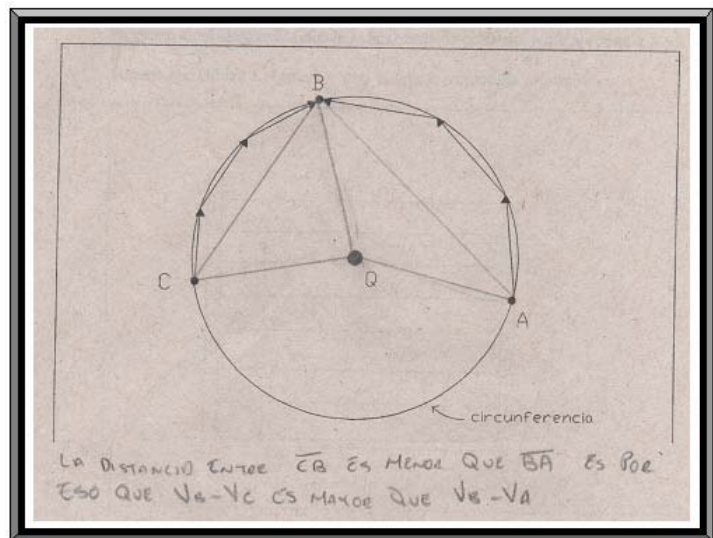


Figura 10a. Un estudiante intenta utilizar la suma de productos punto para resolver este problema.

Figura 10b. Un estudiante determina que la diferencia de potencial es mayor en la trayectoria BC.



## VIII. Conclusiones

En los tutoriales se promovió el uso del razonamiento inductivo al guiar al alumno paso a paso para descubrir el concepto de integral de línea por medio de la interacción con el programa Cabri en el contexto de la teoría electromagnética. Fue hasta el final del proceso de implementación de los tres tutoriales cuando el alumno institucionaliza el concepto de integral de línea como una suma de productos punto.

El contexto juega un papel importante en la resolución de problemas, ya que el estudiante desarrolla intuiciones de conocimiento físico y la forma de aprender la física. Estas intuiciones, o conocimiento informal, se relacionan con las ideas que los estudiantes tienen acerca del uso de conceptos en el mundo real. Muchas veces este conocimiento informal de los estudiantes les impide entender el concepto físico-formal, como pudimos observar en algunos de los resultados tanto en el examen de diagnóstico como en el examen de evaluación. Por ejemplo, en el examen de diagnóstico, cuando se pregunta sobre el trabajo desarrollado por el peso a través de tres

trayectorias distintas, algunos estudiantes creen que el ángulo, la altura o el desplazamiento son elementos claves para justificar su respuesta. Otro estudiante muestra otra creencia de este tipo al contestar: “Entre mas grande sea la trayectoria mas es la diferencia de potencial” cuando se le pide comparar la diferencia de potencial de dos trayectorias ubicadas sobre una circunferencia.

Cuando un estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples, se puede pensar que es el resultado de un mal aprendizaje. Un aspecto relacionado con los errores sistemáticos de los estudiantes se ubica en la suposición de que el estudiante aprenderá eficientemente lo que el profesor le presente o enseñe, lo cual se puso de manifiesto en los resultados obtenidos en la pregunta 1 del examen de evaluación, en los que, pese a la instrucción especial de que fueron objeto estos estudiantes, no hubo respuestas correctas, sólo aproximaciones, por lo que el análisis se tuvo que centrar en el procedimiento que eligieron para resolver, observando que sólo la tercera parte del grupo utilizó la suma de productos punto para resolver este problema.

## Referencias

Hitt Fernando, 2002, *Antología de Lecturas en Matemática Educativa*, Matemática educativa: Investigación y desarrollo, México, Prentice Hall.

Kanim Stephen, 1998, *Tesis para la obtención del grado de Doctorado en Física*. Universidad Estatal de Nuevo Mexico.

Kanim Stephen, Cohen S., 2005, *Factors influencing the álgebra “reversal error”*, American Journal of Physics, Universidad Estatal de Nuevo México, Estados Unidos.

Terrazas Sergio, 1996, *Matemáticas en movimiento*, México, [http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas\\_en\\_movimiento/mathematica.html](http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html), 2005

Tsuyuky S., 1998, *Grasp Meanings with Interactive Java Animation Applets on www*. International education software. Asian technology conference in mathematics, <http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/ATCMP033/paper.pdf>, 2005.