Sobre la integral de línea en un álgebra de dimensión real 2 que no son los complejos

Elifalet López Gonzalez[1], Víctor M. Carrillo S.[1], Sergio Terrazas Porras[1]

Resumen: Consideramos un álgebra de Banach $\mathbf{A}$ conmutativa unitaria de dimensión real 2 que no son los números complejos. Usando un sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann asociadas a la derivada "natural" (N-derivada cuya definición se presenta en la sección 2) de $\mathbf{A}$ mostramos que una función N-derivable con dominio en $\mathbf{A}$ y valores en $\mathbf{A}$ tiene integral de línea que no dependa del camino, sólo de los puntos finales, como el teorema integral de Cauchy de variable compleja.

Introducción

A un campo vectorial se le llama conservativo o campo gradiente si existe una función con valores reales, la cual es llamada potencial, cuyo gradiente es ese campo vectorial. La integral de línea a lo largo de cualquier camino en un campo conservativo depende solamente de los puntos finales del camino. Por esto se dice que la integral es independiente de los caminos. Si se conoce la función potencial, la integral de línea se calcula evaluando a esta función en los puntos finales del camino, el potencial juega el papel de antiderivada. Por lo que esto se puede ver como una generalización del teorema fundamental del cálculo, el cual nos permite calcular integrales de una función cuando conocemos una de sus antiderivadas.

Consideramos un álgebra conmutativa unitaria $\mathbf{A}$ sobre el campo □, de dimensión 2 que no es el álgebra de los números complejos y para la cual se tiene, que para cada función $f : U \subset \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ que es "N-derivable" (ver definición en la sección 2) en un conjunto abierto simplemente conexo *U*, su integral de línea

$$\int_{\gamma} f(\xi)d\xi = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt$$

es independiente del camino, esto es, solo depende sobre γ(b) y γ(a), donde $f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)$ denota el producto de $f(\gamma(t))$ y $\gamma^{'}(t)\ (= d\gamma / dt)$ en el álgebra $\mathbf{A}$ y γ:[a,b]→ $\mathbf{A}$ es un camino rectificable (i.e. tiene longitud y es finita).

1. Algebras Conmutativas Unitarias.

A lo largo de este trabajo $\mathbf{A}$ denotará un *álgebra de conmutativa unitaria* sobre K, esto es, $\mathbf{A}$ será un espacio vectorial con una multiplicación conmutativa $(□) : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ (donde la imagen de (x,y) se escribe como xy) tal que la ley asociativa se

[1] Instituto de Ingeniería y Tecnología. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. elgonzal@uacj.mx

cumple: (xy)z = x(yz), y existe un elemento e $\in$ $\mathbf{A}$ llamado elemento unidad con las propiedades xe = ex = x , para todo x,y,z$\in$ $\mathbf{A}$. Un elemento a$\in$ $\mathbf{A}$ se le llama *regular* si existe un único elemento $a^{-1} \in \mathbf{A}$ llamado inverso de a tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, (ver [1]). En este trabajo G($\mathbf{A}$) denotará al grupo de los elementos regulares en $\mathbf{A}$. No es difícil mostrar que G($\mathbf{A}$) es un subconjunto abierto de $\mathbf{A}$. Si y$\in$G($\mathbf{A}$) el cociente x/y significará xy^{-1}.

Ejemplo 1.1. Sea $\mathbf{A}$ el álgebra en $\mathbb{R}^2$ obtenida del producto

$$(x,y)(u,v) = \left(2xu + \frac{1}{2}(xv + yu - yv), 2yv + \frac{1}{2}(xv + yu - xu)\right).$$

Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Si denotamos por * al producto dado obtenemos

*	e_1	e_2
e_1	$\frac{1}{2}(3e_1 - e_2)$	e
e_2	e	$\frac{1}{2}(3e_2 - e_1)$

que son las reglas para multiplicar los elementos de la base, donde $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ es la identidad para el producto.

2. La Derivada Newtoniana Generalizada

Sea $\mathbf{A}$ el álgebra del ejemplo 1.1 y $F : U \to \mathbf{A}$ una función definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbf{A}$. Si x_0 es un punto en $\mathbf{A}$ para el cual el límite

$$\lim_{h \to 0, h \in G(\mathbf{A})} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \tag{1}$$

para todo $h \in G(\mathbf{A})$ existe, diremos que f es **N-derivable en** x_0, y lo llamaremos **derivada Newtoniana** de F en x_0. Denotaremos a este por $F_N'(x_0)$, esto es,

$$F_N'(x_0) = \lim_{h \to 0, h \in G(\mathbf{A})} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Nos vamos a referir a este concepto como la **derivada Newtoniana**. Los límites dados en esta definición están asociados a alguna norma sobre $\mathbf{A}$, por ejemplo la norma Euclidiana de $\mathbf{R}^2$.

3. Las Ecuaciones De Cauchy-Riemann Para La Derivada Newtoniana

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de dimensión finita, tomamos una base β de $\mathbf{A}$ que consiste de elementos regulares

$$\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}.$$

Cada función $f : U \to \mathbf{A}$ definida en un subconjunto abierto U Ì $\mathbf{A}$ puede ser escrita como

$$F = (F_1, F_2, \cdots, F_n),$$

donde

$$F_k : U \to K$$

es la componente de la función asociada con la base γ para k=1,2,..,m, por eso

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x) v_k .$$

De las correspondientes definiciones, si F es derivable en un conjunto abierto U, entonces la derivada de Gâteaux $dF(x_0, v)$ de F en x_0 en la dirección v va a existir para cada v $\in$ C(X) y $dF(x_0, v) = F_X(x_0) v$, entonces, para v,w $\in$ G(**A**) tendremos

$$dF(x_0, v) v^{-1} = dF_X(x_0, w) w^{-1}$$

esto es,

$$dF(x_0, v) w = dF_X(x_0, w) v ,$$

por lo tanto calculando la N-derivada en las direcciones v_i y v_j tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial v_i} v_k v_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial v_j} v_k v_i , \text{ para } i, j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial F_k}{\partial v_i} \text{ para } i, k = 1, \ldots, n$$

son las derivadas parciales reales usuales. Entonces como v_i es regular tenemos que

$$\{v_1 v_i^{-1}, v_2 v_i^{-1}, \cdots, v_n v_i^{-1}\}$$

es una base de **A** para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Llamamos al conjunto de todas las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas por las identidades (2) **ecuaciones de Cauchy-Riemann** para F, (ver[2]).

Ejemplo 3.1. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ como el álgebra dada en el ejemplo 1.1 . Sea $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función N-derivable, entonces

$$f(x, y) = \left(f_1(x, y), f_2(x, y) \right),$$

donde

$$f_1, f_2 : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

De (2) obtenemos la igualdad

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} e_1 e_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} e_2 e_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y} e_1 e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} e_2 e_1 ,$$

equivalentemente

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{1}{2}(e_1+e_2)+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{1}{2}(3e_2-e_1)=\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{1}{2}(3e_1-e_2)+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{1}{2}(e_1+e_2),$$

de la cual nosotros tenemos las correspondientes ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial x}=3\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+3\frac{\partial f_2}{\partial x}=-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

En el caso complejo, si $f:\Omega\subset\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ es una función holomorfa en la región Ω entonces

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

para cada ciclo γ que es homologo a cero en Ω, (ver[2]). En el siguiente teorema obtendremos un resultado similar.

Teorema 3.1. Sea **A** el álgebra de Banach de dimensión 2 dada en el ejemplo (1.1) y $f:\Omega\subset\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ una función N-derivable en la región simplemente conexa Ω. Entonces

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi$$

depende solamente de los puntos finales de γ en Ω.

Demostración: Sea $\{e_1,e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Vamos a considerar a $\mathbb{R}^2$ como un álgebra de Banach con el producto dado en el ejemplo (1.1).

Si $\gamma:[a,b]:\to\mathbb{R}^2$ es un camino en una región Ω en $\mathbb{R}^2$ y $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es una función N-derivable en Ω, entonces

$$f(x,y)=f_1(x,y)e_1+f_2(x,y)e_2$$

donde $f_1,f_2:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son las funciones componentes y usando el producto dado en el ejemplo (1.1) tenemos

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi=\int_a^b\left(f_1(\gamma(t))e_1+f_2(\gamma(t))e_2\right)\left(\gamma_1'(t)e_1+\gamma_2'(t)e_2\right)dt$$
$$=\int_a^b\left(h_1(t)e_1+h_2(t)e_2\right)dt$$

donde

$$2h_1(t)=3f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)+f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)+f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)-f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t),$$
$$2h_2(t)=-f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)+f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)+f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)+3f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)$$

i.e.,

$$2h_1(t) = \left(3f_1(\gamma(t)) + f_1(\gamma(t)),\ f_2(\gamma(t)) - f_2(\gamma(t))\right)\cdot\left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right),$$

$$2h_2(t) = \left(-f_1(\gamma(t)) + f_1(\gamma(t)) + f_2(\gamma(t)) + 3f_2(\gamma(t))\ \right)\cdot\left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right)$$

donde los puntos denotan el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.Teniendo en cuenta los campos

$$F_1 = \left(3f_1 + f_2, f_1 - f_2\right), F_2 = \left(-f_1 + f_2, f_1 + 3f_2\right),$$

tenemos la igualdad

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = \left(\int_\gamma F_1\right)e_1 + \left(\int_\gamma F_2\right)e_2,$$

donde las integrales de la derecha son las usuales integrales de línea en $\mathbb{R}^3$.

Queremos probar que F_1 y F_2 son campos conservativos, esto es, sus rotacionales son las funciones cero

$$\nabla \times F_1 = \nabla \times F_2 .$$

De la definición de rotacional y como f_1 y f_2 no dependen de z tenemos

$$curl\, F_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3f_1 + f_2 & f_1 - f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial\left(f_1 - f_2\right)}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial\left(3f_1 + f_2\right)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial\left(f_1 - f_2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(3f_1 + f_2\right)}{\partial y}\right)e_3$$

$$= \left(\frac{\partial\left(f_1 - f_2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(3f_1 + f_2\right)}{\partial y}\right)e_3.$$

Pero el coeficiente de e_3 es exactamente la primer ecuación Cauchy-Riemann dada en el ejemplo 3.1, así tenemos que

$$curl\, F_1 = 0 .$$

Del mismo modo, usando la segunda ecuación de Cauchy-Riemann dada en el ejemplo 3.1 obtenemos que $curl\, F_2 = 0$. Por lo tanto, las integrales

$$\int_\gamma F_1 \quad , \quad \int_\gamma F_2$$

depende solamente de los puntos finales y lo mismo sucede con la integral

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi .$$

Con lo que terminamos la demostración.

Bibliografía.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional analysis with applications*. USA: John Wiley and Sons.

Ahlfors, L.V. 1979. *Complex Analysis*. USA: McGraw-Hill International Book Co.

Marsden J. y M. Hoffman. 1998. *Análisis Clásico Elemental*. Mex.: Addison-Wesley.