USO DEL SOFTWARE MICROSOFT EXCEL COMO MEDIO DE COMPROBACIÓN DE LOS PROCESOS DE INTEGRACIÓN

Casos de longitud de arco de una curva y la suma de magnitudes de los vectores diferencia

Oscar Ruiz Chávez, Juan Luna González, Lidia Julieta Royval, María Concepción Salazar Álvarez, Eduardo José Loera Ochoa, Fernando Hermosillo Pérez

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

RESUMEN. En este escrito presentamos un particular enfoque de la interpretación de la integral definida, desarrollada en el marco de la suma de aproximaciones, que parten del tratamiento de la idea de longitud de cuerda, centrada en nociones como medir, cuantificar y comparar, intentamos poner a la vista las dificultades que tienen algunos estudiantes ante el proceso que se presenta de manera típica, para allanar dicho proceso presentamos los casos de: longitud de arco de una curva y la suma de magnitudes de los vectores diferencia.

Palabras clave: Longitud de cuerda, suma de sus magnitudes $\|\vec{r}'(t)\|$, suma de magnitudes de los vectores diferencia, Excel

INTRODUCCIÓN.

En los cursos de cálculo, el proceso de integración está relacionado con la idea de área, pero pocas veces se utiliza la interpretación de la integral para obtener la longitud de arco de una curva, ahora bien si utilizamos la forma vectorial, dada en términos de las ecuaciones paramétricas utilizadas para representar la curva, proporcionan una condición que dan una considerable ventaja, dado nuestro propósito de calcular la longitud de arco a través del cálculo de subintervalos del vector $\vec{r}'(t)$ y la suma de sus magnitudes $\|\vec{r}'(t)\|$. Nuestra idea intuitiva de lo que la longitud será, nos dice que debería sernos posible aproximarnos a la longitud de cuerda. Exploraremos algunos conceptos vinculados con la conservación de la longitud de cuerda, el proceso de integración como un proceso de acumulación de variación continua y la suma de magnitudes de los vectores diferencia, a través del uso de hojas de cálculo.

Un estudio realizado por Cordero (2003), no busca caracterizar dificultades de los estudiantes ante tareas que requieren de la integración, sino que se orientan al examen de las características necesarias para *entender* el concepto de integral, para la cual acude al empleo de diferentes marcos como el epistemológico, el cognitivo y el didáctico:

- Del análisis epistemológico se identificó un patrón de construcción de la teoría de integración con la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en donde la diferencia $F(x+dx) - F(x)$ y las condiciones de una función derivada F juega un papel definitivo.

Se le asoció un significado a la integral por medio de la noción de acumulación.

- Las situaciones que favorecen el pensar en las integrales, son fenómenos de cambio.

Considerar al área bajo una curva como modelo geométrico de la integral en un ambiente de variación continua exige mover lo estático. (1)

La utilización sistemática como recurso didáctico y como recurso cognitivo que dé coherencia a una serie de significados es la tarea a seguir. Coincidimos en que la mayor dificultad no radica en el uso de una nueva herramienta sino en concebir un proyecto en el cual tenga sentido la utilización de la misma y, a partir de, nuevos recursos tecnológicos puedan potenciar la propuesta educativa o enmarcarla (2). Tener la claridad para reconocer los espacios y tiempos de los hallazgos de cada uno de nuestros estudiantes, son algunas de las condiciones que intentamos que provoquen la reflexión y el razonamiento. Nuestra manera de orientar los temas está en un contexto geométrico y numérico, más intuitivo que abstracto.

DESARROLLO

Los conceptos de longitud de arco y medida de longitud en la enseñanza de las matemáticas, y el desarrollo de estos conceptos se deben presentar un entorno que dé cabida para adquirir ideas que proporcionen referencias y puedan comparar longitudes por aproximación, que permitan habituarse con la idea de longitud de cuerda y su medición todo en un ambiente de variación continua.

Consideremos la idea de que un vector tangente a una función vectorial de la forma $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ como un vector adherido a la curva, donde menor sea la magnitud del vector $\vec{r}(t)$ más se encontrará *adherido* permitiendo acercarse al valor exacto en cada aproximación.

Primer caso longitud de arco de una curva y la noción de acumulación.

Un ejemplo se presenta, con el tema de longitud de arco de una curva en el espacio.

> *Si C es una curva suave dada por* $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ *en un intervalo* $[a, b]$,
>
> *Entonces la longitud de arco de C en el intervalo es*
>
> $$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\; dt = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\| d\,t$$

Se desea es obtener la longitud de arco para $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{4}{3}t^{3/2}\hat{\jmath} + \frac{1}{2}t^2\hat{k}$ en el intervalo $[0,2]$. En esta ocasión utilizaremos un método numérico por aproximaciones de la suma de las magnitudes de los vectores $\vec{r}\,'(t)$.

Obtenemos $\vec{r}\,'(t) = \hat{\imath} + 2\sqrt{t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ y para obtener una primera aproximación, evaluamos para $t = 0$ y $t = 1$ (2 subintervalos)

$\vec{r}\,'(0) = \langle 1,0,0 \rangle$; $\|\vec{r}\,'(0)\| = 1$ $\vec{r}\,'(1) = \langle 1,2,1 \rangle$; $\|\vec{r}\,'(1)\| = \sqrt{6}$

$$\text{Aprox}_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489$$

Para obtener una segunda aproximación, para $t = 0\ , \frac{1}{2}\ , 1, \ \frac{3}{2}$ (4 subintervalos)

$\vec{r}\,'(0) = \langle 1,0,0 \rangle$; $\|\vec{r}\,'(0)\| = 1$ $\vec{r}\,'\left(\frac{1}{2}\right) = \langle 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \rangle$; $\left\|\vec{r}\,'\left(\frac{1}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\vec{r}\,'(1) = \langle 1,2,1 \rangle$; $\|\vec{r}\,'(1)\| = \sqrt{6}$ $\vec{r}\,'\left(\frac{3}{2}\right) = \langle 1, \sqrt{6}, \frac{3}{2} \rangle$; $\left\|\vec{r}\,'\left(\frac{3}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$

$$\text{Aprox}_2 = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{6} + \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{8.293646}{2} = 4.146823$$

Para obtener una tercera aproximación, evaluamos para $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$

(8 subintervalos)

$\vec{r}'(0) = \langle 1,0,0 \rangle$; $\|\vec{r}'(0)\| = 1$

$\vec{r}'\left(\frac{1}{4}\right) = \langle 1,1, \frac{1}{4} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{1}{4}\right)\right\| = \frac{\sqrt{33}}{4}$

$\vec{r}'\left(\frac{1}{2}\right) = \langle 1,\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{1}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\vec{r}'\left(\frac{3}{4}\right) = \langle 1,\sqrt{3}, \frac{3}{4} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{3}{4}\right)\right\| = \frac{\sqrt{73}}{4}$

$\vec{r}'(1) = \langle 1,2,1 \rangle$; $\|\vec{r}'(1)\| = \sqrt{6}$

$\vec{r}'\left(\frac{5}{4}\right) = \langle 1,\sqrt{5}, \frac{5}{4} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{5}{4}\right)\right\| = \frac{11}{4}$

$\vec{r}'\left(\frac{3}{2}\right) = \langle 1,\sqrt{6},\frac{3}{2} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{3}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$

$\vec{r}'\left(\frac{7}{4}\right) = \langle 1,\sqrt{7}, \frac{7}{4} \rangle$; $\left\|\vec{r}'\left(\frac{7}{4}\right)\right\| = \frac{\sqrt{177}}{4}$

$$A_3 = 1 + \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{73}}{4} + \sqrt{6} + \frac{11}{4} + \frac{\sqrt{37}}{2} + \frac{\sqrt{177}}{4} = \frac{17.941821}{4} = 4.485455$$

Utilizando la integral, la longitud de arco de $\vec{r}(t)$ para $t = 0$ hasta $t = 2$ está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3}\, dt \approx 4.815703$$

En nuestro caso las aproximaciones van tendiendo a este resultado:

$$A_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489$$

$$A_2 = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{6} + \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{8.293646}{2} = 4.146823$$

$$A_3 = 1 + \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{73}}{4} + \sqrt{6} + \frac{11}{4} + \frac{\sqrt{37}}{2} + \frac{\sqrt{177}}{4} = \frac{17.941821}{4} = 4.485455$$

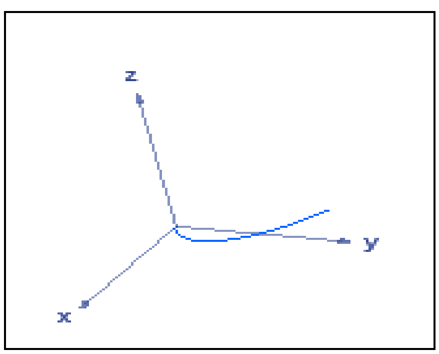


Figura 1. Curva $\vec{r}(t)$ en $I = [0,2]$

Esta es una representación paramétrica $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + \frac{4}{3}t^3\hat{\jmath} + \frac{1}{2}t^4\hat{k}$ diferente de la curva del ejemplo anterior ¿Significa esto que la longitud de arco depende del parámetro que se use? Obteniendo la longitud de arco de $\vec{r}(t)$ para $t = 0$ hasta $t = \sqrt{2}$ está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\ dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4t^2 + 16t^4 + 4t^6}\ dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}\ dt$$

$$\approx 4.815703$$

El resultado indica que es independiente de la forma de parametrizar la curva, prevalece la noción de conservación de la longitud. Es deseable que se encuentren otras formas de parametrizar la misma curva, así como la modificación de los límites de integración.

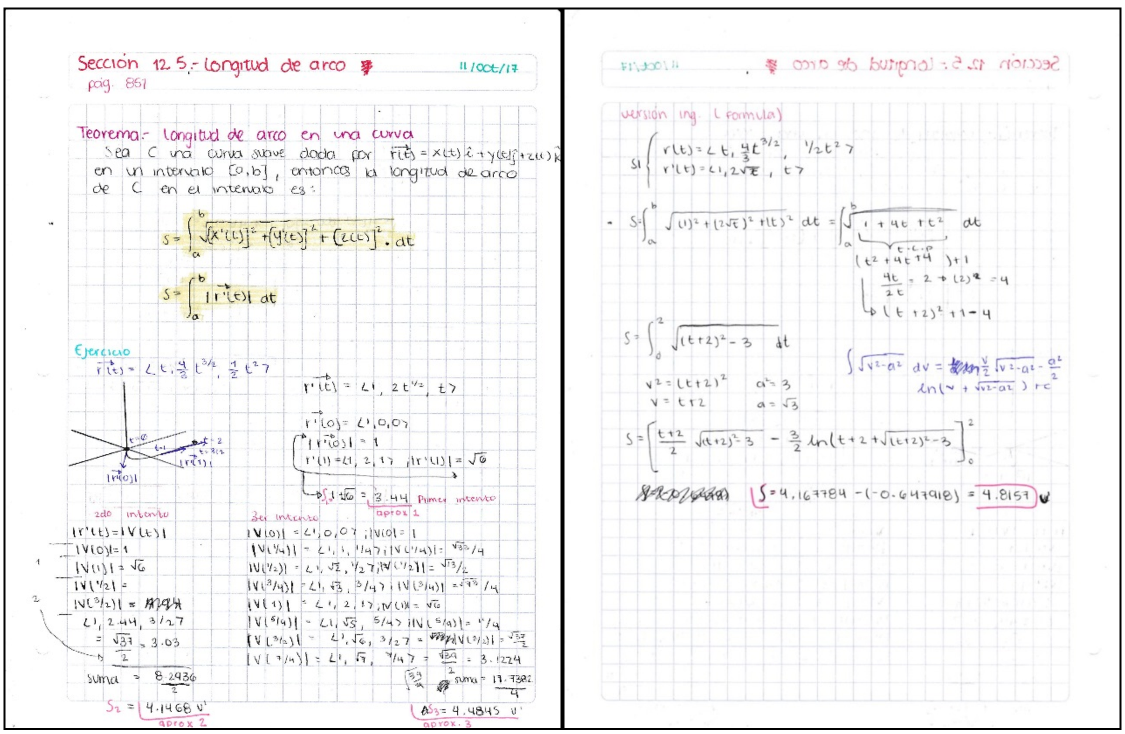


Figura. 2. Copia del ejercicio realizado en clase por un alumno

Segundo caso la suma de magnitudes de los vectores diferencia. Uso de tecnología

Este método, por ser iterativo, se presta para utilizar un software de uso general como lo es el Microsoft Excel en el cálculo de aproximaciones para 8, 16 o más subintervalos, e ir observando cómo se aproxima al valor dado por la integral.

Se utilizó la misma curva del ejemplo en clase, $\vec{r}'(t) = \hat{\imath} + 2\sqrt{t}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ pero la derivación se llevó a cabo por método numérico y la definición de derivada de una función vectorial $\vec{r}(t)$, donde el vector de posición se aproxima a un vector fijo como el límite de una función

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Conforme $\nabla t \to 0$, el vector $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ se aproxima a un vector tangente a la trayectoria de la función vectorial.

En la tabla para el cálculo de la longitud de arco se formaron las siguientes columnas:

La columna 2 para los valores de inicio y término del parámetro t, incremento de t y número de intervalos. Columna 4 para los valores de t en el punto medio del subintervalo. Columnas 5, 6 y 7 para el cálculo de las componentes de $\vec{r}(t)$ mientras que 8,9 y 10 para $\vec{r}(t+\Delta t)$. Columnas 11, 12 y 13 Se aproxima el valor de $\vec{r}'(t)$, columna 14 para $\|\vec{r}'(t)\|$ y las últimas 2 columnas para la suma de magnitudes y la obtención de la aproximación.

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	1	0.5	0.5	0.4714	0.125	0.50001	0.4714187	0.125005	1	1.41422063	0.500005	1.80278257	1.80278257	3.60556514
incremento	1	2	1.5	1.5	2.44949	1.125	1.50001	2.4495142	1.125015	1	2.44949383	1.500005	3.04138702	4.84416959	4.84416959

Primera aproximación: 2 subintervalos, factor 1. Aprox1=4.84416959

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	1	0.25	0.25	0.16667	0.03125	0.25001	0.1666767	0.0312525	1	1.00001	0.250005	1.4361485	1.4361485	2.87229699
incremento	0.5	2	0.75	0.75	0.86603	0.28125	0.75001	0.8660427	0.2812575	1	1.73205658	0.750005	2.13600737	3.57215587	3.57215587
intervalos	4	3	1.25	1.25	1.86339	0.78125	1.25001	1.8634123	0.7812625	1	2.23607245	1.250005	2.75000591	6.32216178	4.21477452
factor		4	1.75	1.75	3.08671	1.53125	1.75001	3.0867363	1.5312675	1	2.64575509	1.750005	3.32603931	9.64820109	4.82410054

Segunda aproximación: 4 subintervalos, factor 0.5. Aprox2=4.82410054

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	1	0.125	0.125	0.05893	0.00781	0.12501	0.0589326	0.0078138	1	0.70712092	0.125005	1.23111586	1.23111586	2.46223171
incremento	0.25	2	0.375	0.375	0.30619	0.07031	0.37501	0.3061985	0.0703163	1	1.22475304	0.375005	1.62500731	2.85612316	2.85612316
intervalos	8	3	0.625	0.625	0.65881	0.19531	0.62501	0.6588237	0.1953188	1	1.58114515	0.625005	1.97247338	4.82859655	3.21906436
factor		4	0.875	0.875	1.09132	0.38281	0.87501	1.0913354	0.3828213	1	1.87083404	0.875005	2.29470123	7.12329778	3.56164889
		5	1.125	1.125	1.59099	0.63281	1.12501	1.5910115	0.6328238	1	2.12132506	1.125005	2.60108751	9.72438529	3.88975412
		6	1.375	1.375	2.14977	0.94531	1.37501	2.1497973	0.9453263	1	2.34521214	1.375005	2.89666338	12.6210487	4.20701623
		7	1.625	1.625	2.76197	1.32031	1.62501	2.7619944	1.3203288	1	2.54951368	1.625005	3.18444049	15.8054892	4.51585405
		8	1.875	1.875	3.42327	1.75781	1.87501	3.4232934	1.7578313	1	2.73861644	1.875005	3.46636175	19.2718509	4.81796273

Tercera aproximación: 8 subintervalos, factor 0.25. Aprox3=4.81796273

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	1	0.0625	0.0625	0.02083	0.00195	0.06251	0.0208383	0.0019538	1	0.50002	0.062505	1.11978876	1.11978876	2.23957753
incremento	0.125	2	0.1875	0.1875	0.10825	0.01758	0.18751	0.1082618	0.01758	1	0.86603695	0.187505	1.33610558	2.45589435	2.45589435
intervalos	16	3	0.3125	0.3125	0.23292	0.04883	0.31251	0.2329349	0.0488313	1	1.11804293	0.312505	1.53221388	3.98810823	2.65873882
factor		4	0.4375	0.4375	0.38584	0.0957	0.43751	0.385852	0.0957075	1	1.32288321	0.437505	1.71505995	5.70316817	2.85158409
		5	0.5625	0.5625	0.5625	0.1582	0.56251	0.562515	0.1582088	1	1.50000667	0.562505	1.8884999	7.59166807	3.03666723
		6	0.6875	0.6875	0.76006	0.23633	0.68751	0.7600764	0.236335	1	1.65831843	0.687505	2.05491682	9.64658489	3.2155283
		7	0.8125	0.8125	0.9765	0.33008	0.81251	0.9765215	0.3300863	1	1.80278118	0.812505	2.21589358	11.8624785	3.38927956
		8	0.9375	0.9375	1.21031	0.43945	0.93751	1.2103267	0.4394625	1	1.93649684	0.937505	2.3725378	14.2350163	3.55875407
		9	1.0625	1.0625	1.46027	0.56445	1.06251	1.4602872	0.5644638	1	2.06155766	1.062505	2.52565573	16.760672	3.72459378
		10	1.1875	1.1875	1.7254	0.70508	1.18751	1.7254193	0.70509	1	2.17945406	1.187505	2.67585278	19.4365248	3.88730496
		11	1.3125	1.3125	2.00488	0.86133	1.31251	2.0048998	0.8613413	1	2.29129221	1.312505	2.82359512	22.2601199	4.04729453
		12	1.4375	1.4375	2.298	1.0332	1.43751	2.2980266	1.0332175	1	2.39791993	1.437505	2.96924917	25.2293691	4.20489485
		13	1.5625	1.5625	2.60417	1.2207	1.56251	2.6041917	1.2207188	1	2.500004	1.562505	3.11310807	28.3424772	4.3603811
		14	1.6875	1.6875	2.92284	1.42383	1.68751	2.9228617	1.423845	1	2.59808006	1.687505	3.25540982	31.597887	4.51398385
		15	1.8125	1.8125	3.25354	1.64258	1.81251	3.253564	1.6425963	1	2.69258612	1.812505	3.39635016	34.9942371	4.66589828
		16	1.9375	1.9375	3.59585	1.87695	1.93751	3.5958757	1.8769725	1	2.78388577	1.937505	3.53609186	38.530329	4.81629112

Cuarta aproximación: 16 subintervalos, factor 0.125. Aprox4=4.81629112

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	1	0.025	0.025	0.00527	0.00031	0.02501	0.0052736	0.0003128	1	0.31625939	0.025005	1.04911641	1.04911641	2.09823283
incremento	0.05	2	0.075	0.075	0.02739	0.00281	0.07501	0.0273916	0.0028133	1	0.54774081	0.075005	1.14264857	2.19176498	2.19176498
intervalos	40	3	0.125	0.125	0.05893	0.00781	0.12501	0.0589326	0.0078138	1	0.70712092	0.125005	1.23111586	3.42288084	2.28192056
factor		4	0.175	0.175	0.09761	0.01531	0.17501	0.0976187	0.0153143	1	0.83667198	0.175005	1.31554048	4.73842132	2.36921066
		5	0.225	0.225	0.1423	0.02531	0.22501	0.142312	0.0253148	1	0.94869384	0.225005	1.39665574	6.13507705	2.45403082
		6	0.275	0.275	0.19228	0.03781	0.27501	0.1922921	0.0378153	1	1.04881838	0.275005	1.47500771	7.61008477	2.53669492
		7	0.325	0.325	0.24704	0.05281	0.32501	0.2470494	0.0528158	1	1.1401842	0.325005	1.55101523	9.1611	2.61745714
		8	0.375	0.375	0.30619	0.07031	0.37501	0.3061985	0.0703163	1	1.22475304	0.375005	1.62500731	10.7861073	2.69652683
		9	0.425	0.425	0.36942	0.09031	0.42501	0.3694345	0.0903168	1	1.30384815	0.425005	1.69724755	12.4833549	2.77407886
		10	0.475	0.475	0.43649	0.11281	0.47501	0.4365087	0.1128173	1	1.37841213	0.475005	1.76795072	14.2513056	2.85026112
		11	0.525	0.525	0.5072	0.13781	0.52501	0.5072127	0.1378178	1	1.44914458	0.525005	1.83729427	16.0885999	2.92519997
		12	0.575	0.575	0.58135	0.16531	0.57501	0.5813689	0.1653183	1	1.51658168	0.575005	1.90542666	17.9940265	2.99900442
		13	0.625	0.625	0.65881	0.19531	0.62501	0.6588237	0.1953188	1	1.58114515	0.625005	1.97247338	19.9664999	3.07176921
		14	0.675	0.675	0.73943	0.22781	0.67501	0.7394419	0.2278193	1	1.64317376	0.675005	2.03854157	22.0050415	3.14357735
		15	0.725	0.725	0.82309	0.26281	0.72501	0.823104	0.2628198	1	1.70294451	0.725005	2.10372343	24.1087649	3.21450199
		16	0.775	0.775	0.90969	0.30031	0.77501	0.9097031	0.3003203	1	1.76068737	0.775005	2.16809888	26.2768638	3.28460797
		17	0.825	0.825	0.99912	0.34031	0.82501	0.9991428	0.3403208	1	1.81659572	0.825005	2.23173772	28.5086015	3.35395312
		18	0.875	0.875	1.09132	0.38281	0.87501	1.0913354	0.3828213	1	1.87083404	0.875005	2.29470123	30.8033027	3.42258919
		19	0.925	0.925	1.18618	0.42781	0.92501	1.1862013	0.4278218	1	1.9235436	0.925005	2.35704354	33.1603463	3.49056276
		20	0.975	0.975	1.28365	0.47531	0.97501	1.2836669	0.4753223	1	1.97484683	0.975005	2.41881267	35.5791589	3.55791589
		21	1.025	1.025	1.38364	0.52531	1.02501	1.3836648	0.5253228	1	2.02485061	1.025005	2.48005146	38.0592104	3.6246867
		22	1.075	1.075	1.48611	0.57781	1.07501	1.4861324	0.5778233	1	2.07364896	1.075005	2.54079825	40.6000087	3.69090988
		23	1.125	1.125	1.59099	0.63281	1.12501	1.5910115	0.6328238	1	2.12132506	1.125005	2.60108751	43.2010962	3.75661706
		24	1.175	1.175	1.69823	0.69031	1.17501	1.6982479	0.6903243	1	2.16795295	1.175005	2.66095035	45.8620465	3.82183721
		25	1.225	1.225	1.80777	0.75031	1.22501	1.8077909	0.7503248	1	2.21359888	1.225005	2.7204149	48.5824614	3.88659691
		26	1.275	1.275	1.91957	0.81281	1.27501	1.9195928	0.8128253	1	2.25832239	1.275005	2.77950675	51.3619682	3.95092063
		27	1.325	1.325	2.03359	0.87781	1.32501	2.0336091	0.8778258	1	2.30217723	1.325005	2.83824915	54.2002173	4.01483091
		28	1.375	1.375	2.14977	0.94531	1.37501	2.1497973	0.9453263	1	2.34521214	1.375005	2.89666338	57.0968807	4.07834862
		29	1.425	1.425	2.26809	1.01531	1.42501	2.2681178	1.0153268	1	2.38747147	1.425005	2.9547689	60.0516496	4.14149308
		30	1.475	1.475	2.38851	1.08781	1.47501	2.3885327	1.0878273	1	2.42899568	1.475005	3.01258357	63.0642332	4.20428221
		31	1.525	1.525	2.51098	1.16281	1.52501	2.5110061	1.1628278	1	2.46982186	1.525005	3.07012382	66.134357	4.26673271
		32	1.575	1.575	2.63548	1.24031	1.57501	2.6355042	1.2403283	1	2.50998406	1.575005	3.12740479	69.2617618	4.32886011
		33	1.625	1.625	2.76197	1.32031	1.62501	2.7619944	1.3203288	1	2.54951368	1.625005	3.18444049	72.4462023	4.39067893
		34	1.675	1.675	2.89042	1.40281	1.67501	2.8904459	1.4028293	1	2.58843968	1.675005	3.24124386	75.6874461	4.45220271
		35	1.725	1.725	3.0208	1.48781	1.72501	3.0208291	1.4878298	1	2.62678891	1.725005	3.2978269	78.985273	4.51344417
		36	1.775	1.775	3.15309	1.57531	1.77501	3.153116	1.5753303	1	2.66458627	1.775005	3.35420076	82.3394738	4.57441521
		37	1.825	1.825	3.28725	1.66531	1.82501	3.2872793	1.6653308	1	2.70185492	1.825005	3.41037582	85.7498496	4.63512701
		38	1.875	1.875	3.42327	1.75781	1.87501	3.4232934	1.7578313	1	2.73861644	1.875005	3.46636175	89.2162114	4.69559007
		39	1.925	1.925	3.56111	1.85281	1.92501	3.5611332	1.8528318	1	2.77489099	1.925005	3.52216755	92.7383789	4.7558143
		40	1.975	1.975	3.70075	1.95031	1.97501	3.700775	1.9503323	1	2.81069742	1.975005	3.57780166	96.3161806	4.81580903

Quinta aproximación: 40 subintervalos, factor 0.05. Aprox5= 4.81580903

En otro ejemplo, usamos una curva en el plano con ecuación:

$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^{\frac{3}{2}}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ para $0 \leq t \leq 2$, con $\vec{r}'(t) = \hat{\imath} + \frac{3\sqrt{t}}{2}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ y

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$. Su longitud de arco $s = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\ dt = 3.527 \ldots$

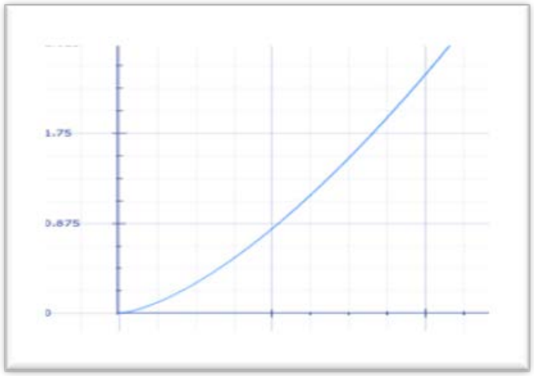
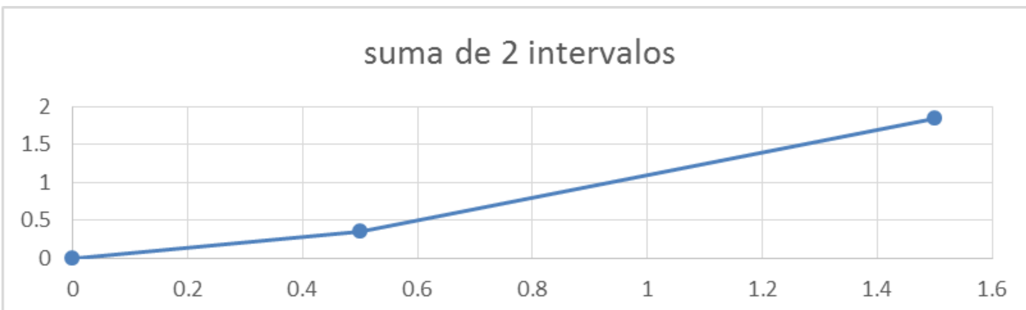


Figura 3. Gráfica de la curva $\vec{r}\,'(t) = t\hat{\imath} + t^{3/2}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

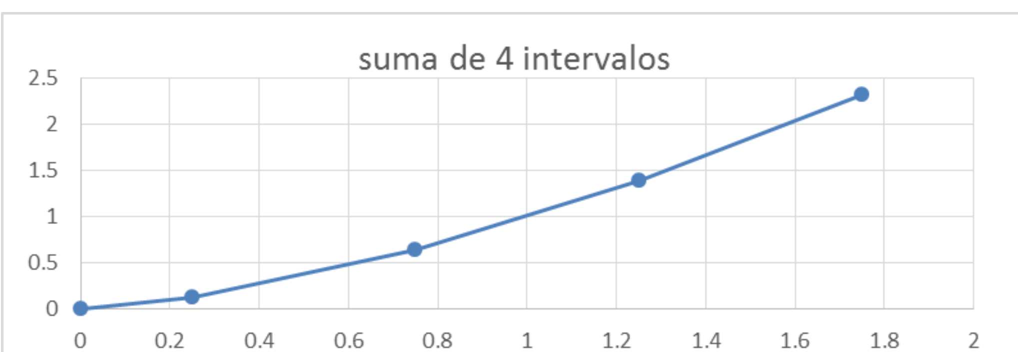
Primera aproximación

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)=ti+t^(3/2)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	0	0	0	0	0	0.00001	3.162E-08	0	1	0.00316228	0	1.000005	1.000005	0
Incremento	1	1	0.5	0.5	0.35355	0	0.50001	0.353564	0	1	1.06066548	0	1.45774183	1.45774183	2.91548366
Intervalos	2	2	1.5	1.5	1.83712	0	1.50001	1.8371357	0	1	1.83712037	0	2.09165276	3.54939459	3.54939459



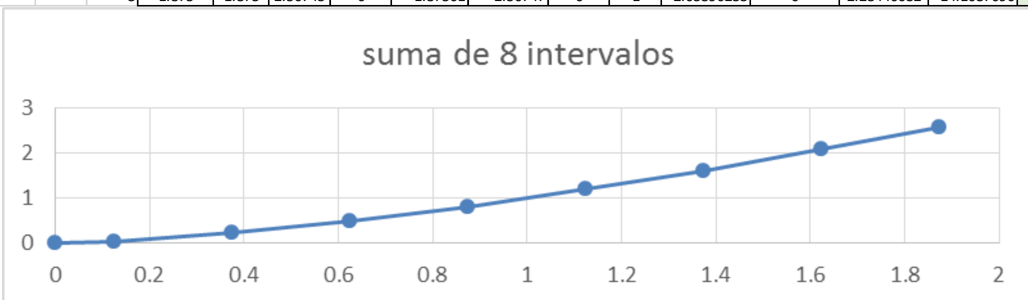
Segunda aproximación

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)=ti+t^(3/2)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	0	0	0	0	0	0.00001	3.162E-08	0	1	0.00316228	0	1.000005	1.000005	0
incremento	0.5	1	0.25	0.25	0.125	0	0.25001	0.1250075	0	1	0.7500075	0	1.2500045	1.2500045	2.500009
intervalos	4	2	0.75	0.75	0.64952	0	0.75001	0.649532	0	1	1.29904244	0	1.63936306	2.88936756	2.88936756
		3	1.25	1.25	1.39754	0	1.25001	1.3975593	0	1	1.67705434	0	1.9525653	4.84193286	3.22795524
		4	1.75	1.75	2.31503	0	1.75001	2.3150522	0	1	1.98431632	0	2.22205114	7.063984	3.531992

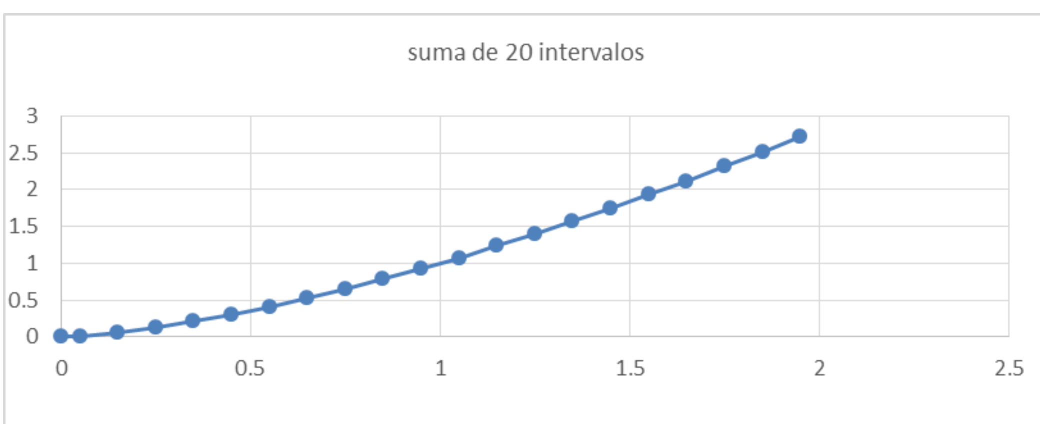


Tercera aproximación

			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)=ti+t^(3/2)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	0	0	0	0	0	0.00001	3.162E-08	0	1	0.00316228	0	1.000005	1.000005	0
incremento	0.25	1	0.125	0.125	0.04419	0	0.12501	0.0441995	0	1	0.53034069	0	1.13192811	1.13192811	2.26385622
intervalos	8	2	0.375	0.375	0.22964	0	0.37501	0.2296488	0	1	0.91856478	0	1.3578517	2.48977982	2.48977982
		3	0.625	0.625	0.49411	0	0.62501	0.4941177	0	1	1.18585887	0	1.55121283	4.04099265	2.6939951
		4	0.875	0.875	0.81849	0	0.87501	0.8185016	0	1	1.40312553	0	1.72300936	5.76400201	2.882001
		5	1.125	1.125	1.19324	0	1.12501	1.1932586	0	1	1.59099379	0	1.87916504	7.64316705	3.05726682
		6	1.375	1.375	1.61233	0	1.37501	1.612348	0	1	1.75890911	0	2.02330454	9.66647158	3.22215719
		7	1.625	1.625	2.07148	0	1.62501	2.0714958	0	1	1.91213526	0	2.15783717	11.8243088	3.37837393
		8	1.875	1.875	2.56745	0	1.87501	2.56747	0	1	2.05396233	0	2.28446082	14.1087696	3.52719239



			CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PARAMETRIZADA UTILIZANDO MAGNITUDES DE DIFERENCIAS												
0.00001	Dt														
Valor inicial	0		t	r(t)=ti+t^(3/2)			r(t+Dt)			(r(t+Dt)-r(t))/Dt			Magnitud	Sumas	por factor
Valor final	2	0	0	0	0	0	0.00001	3.162E-08	0	1	0.00316228	0	1.000005	1.000005	0
incremento	0.1	1	0.05	0.05	0.01118	0	0.05001	0.0111837	0	1	0.33542697	0	1.05475649	1.05475649	2.10951298
intervalos	20	2	0.15	0.15	0.05809	0	0.15001	0.0581006	0	1	0.58095718	0	1.15650821	2.2112647	2.2112647
		3	0.25	0.25	0.125	0	0.25001	0.1250075	0	1	0.7500075	0	1.2500045	3.4612692	2.3075128
		4	0.35	0.35	0.20706	0	0.35001	0.2070717	0	1	0.88741831	0	1.3369784	4.79824761	2.3991238
		5	0.45	0.45	0.30187	0	0.45001	0.3018792	0	1	1.00623618	0	1.41863006	6.21687767	2.48675107
		6	0.55	0.55	0.40789	0	0.55001	0.407902	0	1	1.11243483	0	1.49583129	7.71270896	2.57090299
		7	0.65	0.65	0.52405	0	0.65001	0.5240588	0	1	1.20934331	0	1.56923907	9.28194802	2.65198515
		8	0.75	0.75	0.64952	0	0.75001	0.649532	0	1	1.29904244	0	1.63936306	10.9213111	2.73032777
		9	0.85	0.85	0.78366	0	0.85001	0.7836751	0	1	1.38293574	0	1.70660811	12.6279192	2.80620427
		10	0.95	0.95	0.92595	0	0.95001	0.9259601	0	1	1.462023	0	1.77130213	14.3992213	2.87984427
		11	1.05	1.05	1.07593	0	1.05001	1.0759452	0	1	1.53704627	0	1.83371515	16.2329365	2.951443
		12	1.15	1.15	1.23324	0	1.15001	1.2332537	0	1	1.60857429	0	1.89407266	18.1270091	3.02116819
		13	1.25	1.25	1.39754	0	1.25001	1.3975593	0	1	1.67705434	0	1.9525653	20.0795744	3.0891653
		14	1.35	1.35	1.56856	0	1.35001	1.5685757	0	1	1.74284573	0	2.00935593	22.0889304	3.15556148
		15	1.45	1.45	1.74603	0	1.45001	1.7460493	0	1	1.8062423	0	2.06458501	24.1535154	3.22046872
		16	1.55	1.55	1.92973	0	1.55001	1.9297531	0	1	1.86748795	0	2.11837467	26.2718901	3.28398626
		17	1.65	1.65	2.11946	0	1.65001	2.1194826	0	1	1.92678781	0	2.17083193	28.442722	3.34620259
		18	1.75	1.75	2.31503	0	1.75001	2.3150522	0	1	1.98431632	0	2.22205114	30.6647731	3.40719701
		19	1.85	1.85	2.51627	0	1.85001	2.5162924	0	1	2.04022333	0	2.27211603	32.9368891	3.46704096
		20	1.95	1.95	2.72303	0	1.95001	2.7230478	0	1	2.09463869	0	2.3211013	35.2579904	3.52579904



CONCLUSIONES

Mencionar que el enfoque de los libros de texto, sigue estando en una forma rigurosa y teórica más abstracta y deductiva, cuando nuestro enfoque es concreto y numérico-gráfico (Cordero 2003). Estos textos no estimulan el uso de los recursos tecnológicos en la experimentación y exploración de problemas y conceptos matemáticos.

Específicamente, diferentes investigaciones muestran que los estudiantes tienen dificultades con la conceptualización de los procesos de integración y que éstas se refieren al desequilibrio existente entre lo conceptual y lo algorítmico. De ahí que coincidamos con quienes afirman que, bajo el influjo del discurso matemático escolar, la enseñanza del cálculo integral privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de integración en detrimento propiamente de la comprensión de las nociones básicas como se señala en Cordero (2003).

Para llevar adelante este punto de vista, habrá que desarrollar actividades didácticas que conlleve nociones intuitivas relacionadas con el proceso de aprehensión de los conceptual, aunque esto último nos lleve a trabajar de una manera menos formal, pero más intuitiva.

REFERENCIAS

Litwin, E. (2005). La tecnología educativa en el debate didáctico contemporáneo, Tecnologías educativas en tiempos de Internet. Amorrortu editores. Buenos Aires, Argentina.

Larson, R.; Edwards, B. (2014). Cálculo II, Décima edición, CENGACE Learning, México, D.F., México. Páginas 851 y 852.

Terrazas, S. Flores, S. Mederos, B. Mederos, O. (2011). Graficando funciones vectoriales usando mathematica. CULCyT, Año 8, No 45.

Cordero, F. (2003). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CITAS

(1) M.ª Guadalupe Cabañas Sánchez, Ricardo Cantoral Uriza, La integral definida: un enfoque socioepistemológico, Matemática Educativa Algunos Aspectos de la Socioepistemología y la Visualización en el Aula, página 12. Ediciones Díaz de Santos México

(2) Litwin, E. La tecnología educativa en el debate didáctico contemporáneo, Tecnologías educativas en tiempos de Internet. Amorrortu editores. Buenos Aires, Argentina. (2005).