

---

---

## UNA INTRODUCCIÓN AL MODELADO A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE LAS PRIMERAS DIFERENCIAS FINITAS Y LA EXPERIMENTACIÓN.

Juan Luna González, Oscar Ruiz Chávez, Mario Ávila Sandoval, Carlos López Ruvalcaba, Sergio Flores García

Departamento de Física y Matemáticas, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

El presente trabajo muestra algunos resultados obtenidos al incorporar la experimentación de situaciones físicas con los alumnos de ingeniería en el curso de Cálculo Diferencial con una variable, en un momento previo al estudio de la derivada, utilizando el vaciado en flujos continuos y discretos como en el caso del agua y la arena, así como la pérdida de masa de hielo seco por sublimación de  $\text{CO}_2$ . Se realizaron una serie de prácticas orientadas al estudio de la variación, la percepción de variables, las diferentes formas de representar la variación y el tratamiento más o menos formal del uso de las primeras y segundas diferencias para determinar la formalización de fenómenos cuadráticos o exponenciales, partiendo de diferentes situaciones-problema consistentes en situaciones abiertas de modelación. En la parte final se hicieron algunas reflexiones sobre las prácticas operativas y discursivas que mostraron los alumnos frente a este tipo de situaciones.

**Palabras clave:** modelos simples de variación, primeras y segundas diferencias.

### Introducción

La experimentación ofrece un sin número de oportunidades, presentar un fenómeno físico en una secuencia abierta y sin la mención de título alguno que dé pauta al tipo de comportamiento del fenómeno, es una ocasión que ofrece la posibilidad de observar las distintas maneras de abordar el problema, empezando por la forma de recolección de datos usando herramientas de medición elementales como un cronómetro, o una báscula. La manera en que posteriormente, se recurre a un análisis de corte numérico orientado al cálculo de las primeras y segundas diferencias de las lecturas encaminadas a caracterizar comportamiento lineal, cuadrático o exponencial del fenómeno y, solo al final, la utilización de sensores de fuerza, *software* y computadora.

Presentaremos algunas conclusiones obtenidas a partir de la implementación de la

experimentación en los diferentes registros de representación entre las que se pueden resaltar las siguientes:

- 1).- Las prácticas presentadas de manera abierta, permiten que el alumno aborde el problema planteado de muy distintas maneras, donde se pueda identificar el antecedente matemático de cada estudiante.
- 2).- Ante situaciones de estimación y predicción del fenómeno, los estudiantes resuelven en función de la idea que tienen de las matemáticas y de la física.
- 3).- La selección de los experimentos tuvo particular énfasis en utilizar fenómenos físicos donde fuera posible registrar con muy pocos instrumentos la toma de datos, dado que se reconoce que si, por un lado se necesita la vivencia experimental de un fenómeno, también conlleva a errores de medición inherentes que pareciera pueden

entorpecer la construcción de conceptos físicos y matemáticos.

### Consideraciones Teóricas

En el marco del aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la ciencia, se considera que:

- En los programas de ingeniería, la matemática es una herramienta con fines específicos.
- Los conocimientos de la matemática nacen integrados, es decir, se aprende matemáticas en el contexto de las ciencias. (*Camarena, 2006*)
- Desde los primeros grados de la educación Básica puede iniciarse el estudio de la variación con la pretensión de que los educandos, en esta etapa, desarrollen las habilidades del pensamiento relacionadas con: percepción de variables, relación de dependencias entre variables, las diferentes formas de representar la variación y algunos modelos simples de variación. (*Ávila, 2008*)
- Muchos autores como *Tall (2002)*, consignan que didácticamente, el primer contacto con conceptos de la física o de las matemáticas, tiene que darse desde un enfoque intuitivo-sensorial y la experimentación con fenómenos físicos muestra ser un medio idóneo para esto.

### Metodología

La metodología empleada en la experimentación implica la presentación de un fenómeno físico en una secuencia abierta en la cual se plantean al estudiante cuestionamientos relacionados con la identificación de variables, forma en que

estas cambian, con qué rapidez lo hacen, estimaciones y predicción de valores futuros, etc., con el fin de analizar las herramientas empujadas por los estudiantes, para posteriormente formalizar algunas herramientas utilizadas por ellos, encaminado esto a la generación de conceptos primarios del cálculo.

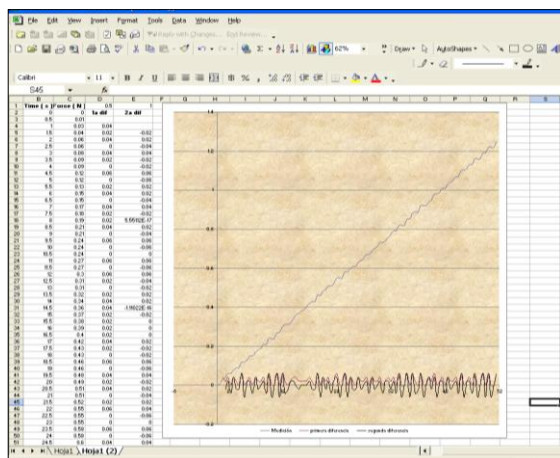
Algunas de las acciones emprendidas en el desarrollo de la metodología se describen brevemente a continuación. Con la finalidad de que el estudiante se enfrentara a una situación de variación, se programó un experimento basado en el vaciado de arena, aprovechando la cualidad de que éste, se da con rapidez constante. Primeramente el estudiante toma lecturas de la masa de arena vaciada contra el tiempo, valiéndose de una báscula electrónica y cronómetro. Al alumno se le introduce a una dinámica de predicción, donde su único recurso es el uso de su antecedente matemático y la posibilidad de repetir tantas veces como desee el experimento, todo esto en el contexto de una experiencia inédita para él y sin el seguimiento de una secuencia de aprendizaje estrictamente establecida (Ver figura 1).



**Figura 1.** Herramientas usadas en el experimento de la arena.

El experimento nos brinda la posibilidad de reconocer los métodos y herramientas matemáticas usadas por el estudiante.

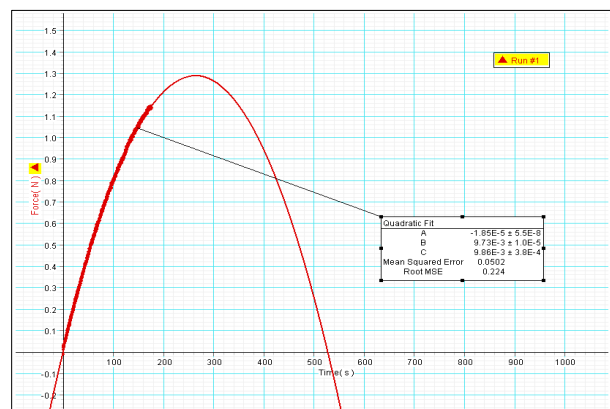
Con un afán de sistematizar la manera de abordar y analizar el tipo de comportamiento del fenómeno de variación, se induce al estudiante al uso de recursos más sofisticados como los sensores y el *DataStudio*<sup>®</sup>, además de la exportación de bases numéricas de datos al *Excel*<sup>®</sup> que permiten realizar un análisis en términos del cálculo de primeras y segundas diferencias de las variables utilizadas (Ver figura 2).



**Figura 2.** Manipulación de los datos numéricos en *Excel*<sup>®</sup>.

Una de las razones del porqué se consideró la necesidad de utilizar estas herramientas que nos proporcionan elementos de corte gráfico, fue porque los estudiantes, ante el problema inicial, no recurrieron al uso de esquemas geométricos para responder a los problemas planteados. Además que permite sistematizar las experiencias en general, aún para situaciones cuadráticas como la que se describe a continuación.

Uno de los pocos fenómenos que nos brinda la naturaleza de un comportamiento cuadrático es el vaciado de un líquido como el agua, en particular, la masa de agua acumulada al vaciar por el fondo. El problema se plantea bajo la consideración de que el alumno se enfrente a una situación de variación no lineal y que motive la búsqueda de este comportamiento, usando la herramienta de cálculo de diferencias; además del desarrollo de sus habilidades en manipular datos numéricos provenientes del uso de sensores y hojas de cálculo. En la figura 3, se presenta la gráfica de la relación entre el peso (en Newtons, mediante el uso de un sensor de fuerza) del agua recuperada y el tiempo (en segundos).



**Figura 3.** Gráfica del peso de agua acumulada contra el tiempo en *DataStudio*<sup>®</sup>.

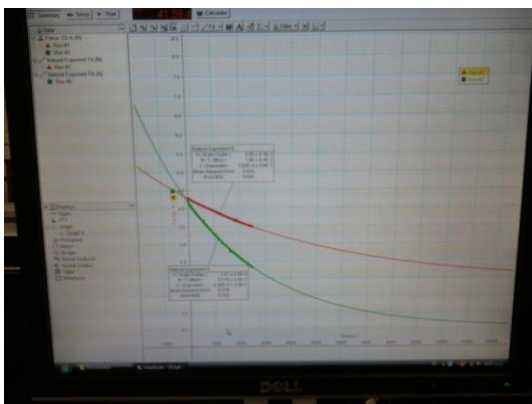
El trabajo de los estudiantes, ahora, principalmente consiste en la selección adecuada de los datos para concluir con el reconocimiento del fenómeno como cuadrático al reconocer las segundas diferencias constantes.

También se realizó experimentación sobre el comportamiento de la masa de un trozo de hielo seco ( $\text{CO}_2$ ) ante un fenómeno

de sublimación, con respecto al tiempo. Fenómeno que no corresponde a un comportamiento ni lineal, ni cuadrático (figura 4). La intención de este experimento era mostrar a los estudiantes, que no todos los fenómenos necesariamente deben caer en comportamientos del tipo polinomial. Se tuvo que recurrir a una hoja de cálculo para observar el comportamiento aproximadamente exponencial del fenómeno. En la figura 5 se muestra la recolección de datos con el sensor en el *DataStudio*®.



**Figura 4.** Medición de la masa del hielo seco con respecto al tiempo.



**Figura 5.** Gráfica de los datos recabados en el fenómeno de sublimación del hielo seco (sólido y triturado).

## Resultados

Los métodos utilizados con mayor éxito surgen de los estudiantes para responder preguntas planteadas referentes a la variación del fenómeno, tienen que ver con el cálculo de diferencias, es decir, manipulaciones de corte numérico con los datos rescatados.

Los estudiantes que realizaron representaciones geométricas del fenómeno de variación prácticamente no pudieron utilizarlas para responder los cuestionamientos planteados, referentes a la descripción de la variación y su rapidez.

Los procedimientos analíticos iniciales referidos hacia la predicción presentaron tendencias hacia la linealización y el uso de las reglas de tres, exitosas ante los fenómenos de este tipo, pero fallidas ante fenómenos no lineales, fue necesario un tratamiento mas o menos formal del uso de las primeras y segundas diferencias para determinar la formalización de fenómenos cuadráticos o exponenciales, sin embargo algunos aspectos interesantes al usar la experimentación son:

- Que el experimento mismo se vuelve un elemento de validación que una situación ideal pudiera no proveer.
- El observar el fenómeno en el laboratorio proporciona pistas iniciales muy útiles acerca de comportamiento de la variación y su rapidez.
- Se da pie para el uso de otras disciplinas que permitan encontrar la descripción analítica del fenómeno.
- Se empieza a relacionar la forma de las gráficas con el tipo de variación, aunque raras veces se utilizan para extraer información numérica o analítica de la

misma, podemos decir que el carácter analítico de la curva no es todavía aceptado por el estudiante.

La recolección de datos y los errores implícitos en las mediciones, que parecieran ser un obstáculo, no lo son, por el contrario tienden a desarrollar actividades en la experimentación y a aliviar con las formas de medición, actividad que es relevante en el campo laboral de los estudiantes de ingeniería y que posiblemente marquen una diferencia significativa con respecto a construir conceptos fundamentales de la derivada por medio de simulaciones de computadora.

Para la descripción de las variables estudiadas en los fenómenos trabajados se establece de manera prácticamente natural la relación (de covariación) con respecto al tiempo.

El uso natural de la variable tiempo permitió plantear sin problemas cuestiones referentes a la rapidez de la variación, desde su concepción más sencilla.

## Conclusiones

Consideramos que el aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la experimentación de fenómenos de la física o de la ciencia en general, brinda la posibilidad de utilizar las ideas más intuitivas de los estudiantes estimuladas por la percepción de sus sentidos y de promover algunas habilidades en la experimentación, como el lidiar con bases de datos no ideales provenientes de la medición y el hacer uso de una diversidad de herramientas matemáticas como estrategias y métodos numéricos o un mayor uso de los recursos geométricos.

## Referencias

- Ávila, R. 2008. *Los problemas de variación y la matemática del cambio en la educación básica*, VII Foro de la Enseñanza de las Matemáticas. Irapuato Guanajuato, México.
- Camarena, P. 2006. *La matemática en el contexto de las ciencias en los retos educativos del siglo XXI*, Científica. 4 (10): 167-107.
- Tall, D. 2002. *Differing modes of proof and belief in mathematics*. International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand. pp. 91-107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.